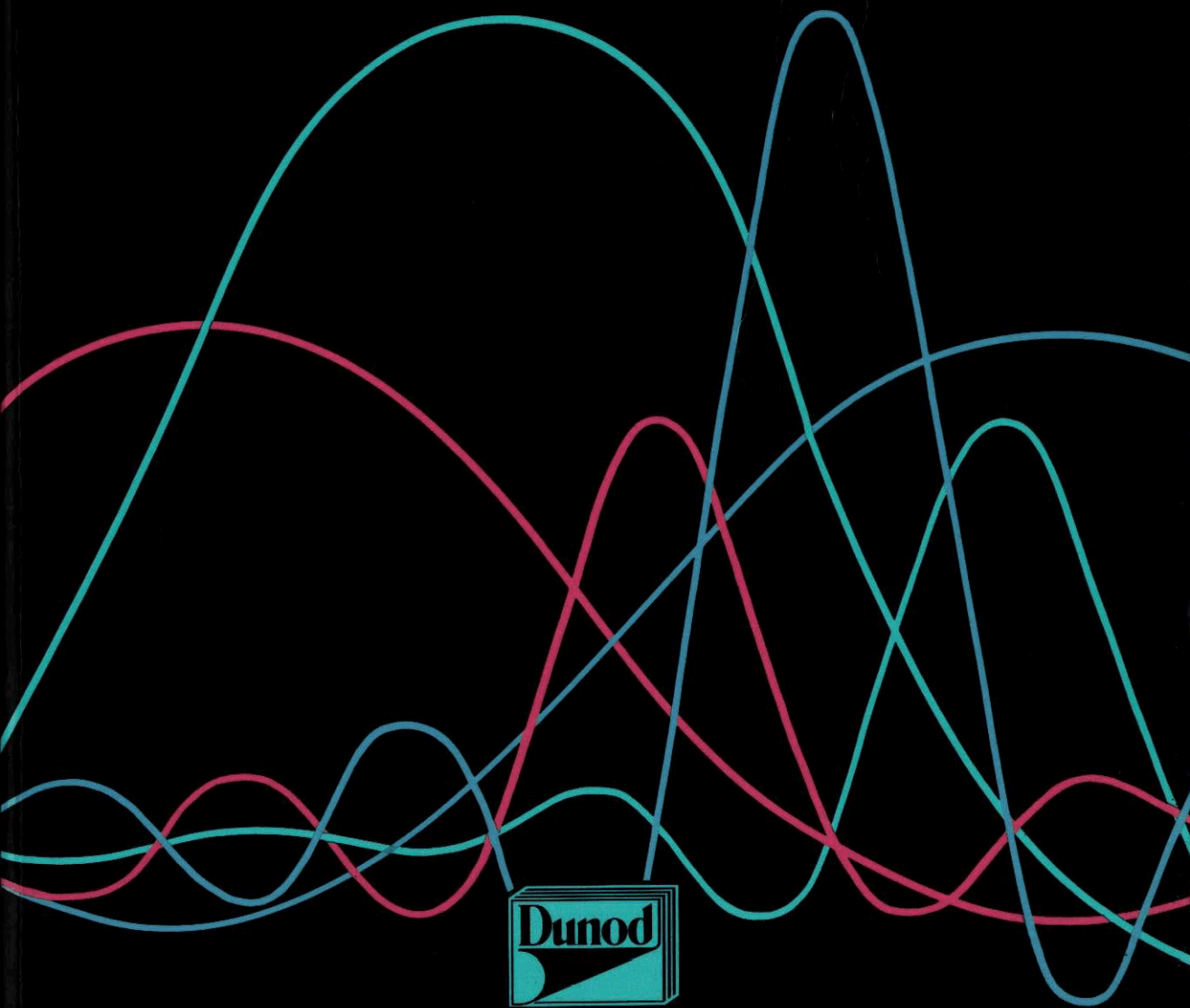
ELECTRONIQUE

F. MANNEVILLE - J. ESQUIEU

THÉORIE DU SIGNAL ET COMPOSANTS

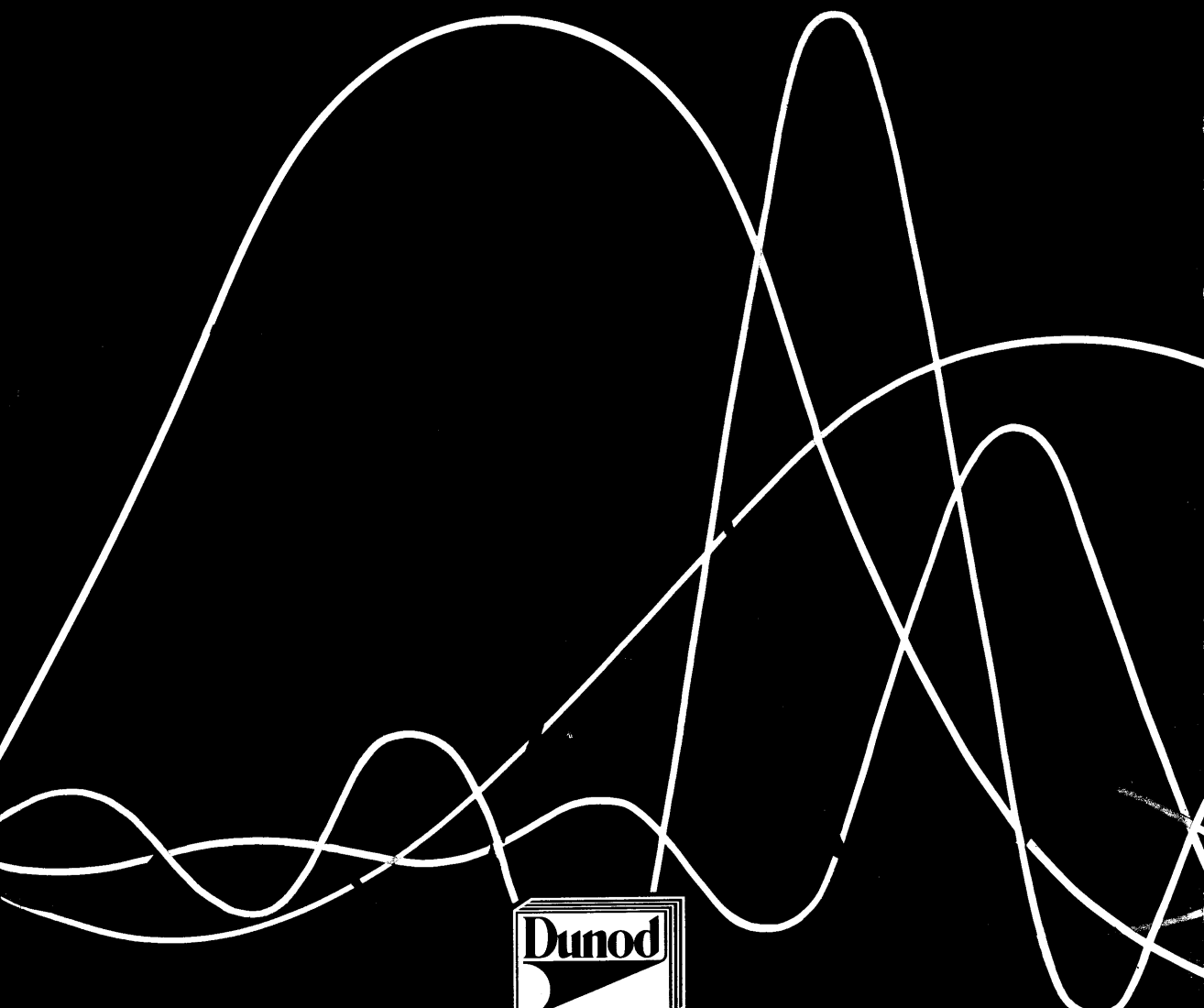


Dunod

ELECTRONIQUE

F. MANNEVILLE - J. ESQUIEU

THÉORIE DU SIGNAL ET COMPOSANTS



Dunod

ELECTRONIQUE

THÉORIE DU SIGNAL ET COMPOSANTS

F. MANNEVILLE
IPR
Ancien élève de l'ENS Cachan
Agrégé de physique appliquée

J. ESQUIEU
Professeur au lycée de Brive
Ancien élève de l'ENS Cachan
Agrégé de physique appliquée

Classes de Techniciens supérieurs
Instituts Universitaires de Technologie
Classes préparatoires des lycées techniques
Formation continue

Dunod

© BORDAS, Paris, 1989
ISBN 2-04-018915-7

« Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur, ou de ses ayants-droit, ou ayants-cause, est illicite (loi du 11 mars 1957, alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. La loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective d'une part, et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration. »

avant-propos

Depuis plus de 20 ans aucun ouvrage d'électronique destiné aux sections de Techniciens Supérieurs de la filière Électronique n'a été publié. Cela a été dû à l'évolution très rapide des technologies de l'Électronique, et aux modifications apportées aux programmes de ces sections.

Actuellement la définition de ceux-ci permet de penser qu'ils ne subiront pas de modifications importantes avant plusieurs années.

Cependant afin de ne pas risquer de réaliser un manuel obsolète dès sa sortie, nous nous sommes attachés à faire ressortir les grands principes qui règlent l'électronique et qui ne dépendent pas de la technologie.

Nous espérons ainsi avoir réalisé un livre de référence où tout ce qui est nécessaire à l'électronicien, du technicien supérieur, de l'élève en premier cycle universitaire technologique, en classe préparatoire aux grandes écoles à l'ingénieur, est présent.

Ce cours se décompose en deux tomes, nous abordons dans le premier tous les éléments théoriques nécessaires pour l'étude du «**signal**» et les connaissances suffisantes pour comprendre le fonctionnement des **composants électroniques.** Dans le second nous mettons en œuvre les acquis en étudiant les **systèmes** sur l'ensemble des domaines de l'électronique.

table des matières

THÉORIE DU SIGNAL

Chapitre 1 : *Lois générales des réseaux linéaires* 3

1 – Les éléments actifs 3
2 – Les éléments passifs 5
3 – Les réseaux résistifs 6
4 – Les réseaux associant résistance et capacité 8
5 – Réseaux associant résistance et inductance 13
6 – Les réseaux associant résistance inductance et capacité 16
Exercices 24

Chapitre 2 : *Signaux sinusoïdaux* 26

1 – Préambule 26
2 – Vecteurs de Fresnel 26
3 – Nombres complexes 29
4 – Impédance complexe 30
5 – Lois des réseaux linéaires en régime sinusoïdal permanent . 31
6 – Circuit associant résistance et capacité 31
7 – Circuit associant résistance et inductance 34
8 – Circuits associant résistance, inductance et capacité 35
9 – Représentation des fonctions de transfert 37
10 – Quadripôles passifs linéaires .. 51
Exercices 61

Chapitre 3 – *Signaux périodiques* 63

1 – Théorème de Fourier 63
2 – Forme exponentielle 68
3 – Spectre bilatéral 69
4 – Transformée discrète de Fourier 70
Exercices 80

Chapitre 4 – *Signaux quelconques* 84

1 – Transformée de Laplace 84
2 – Application à la résolution des systèmes 86
3 – Transmittance de Laplace 90
4 – Impédance opérationnelle 90
Exercices 93

Chapitre 5 – *Signaux échantillonnés* 94

1 – Échantillonnage 94
2 – Spectre du signal échantillonné 95
3 – Reconstitution du signal 96
4 – Transformée en Z 97
5 – Détermination des équations de récurrence 100
Exercices 107

Chapitre 6 – *Étude énergétique* 109

1 – Équations générales 109
2 – Puissances absorbées par les récepteurs élémentaires 111
3 – Application : étude énergétique de deux régulateurs de tension 114
4 – Application : adaptation en puissance 115
5 – Mesures de puissance 116
Exercices 117

Chapitre 7 – *Signaux aléatoires* 119

1 – Introduction 119
2 – Grandeurs aléatoires 119
3 – Variables aléatoires 121
4 – Application à l'électronique .. 125

COMPOSANTS

Chapitre 1 — *Théorie générale simplifiée des semi-conducteurs* 130

1 — Rappels d'électrostatique..... 131
2 — Rappels sur la structure de la matière 133
3 — Semi-conducteur intrinsèque.. 133
4 — Semi-conducteur de type *N* .. 134
5 — Semi-conducteur de type *P*... 135
6 — Conduction des semi-conducteurs..... 136
7 — Effet Hall..... 137
8 — Diffusion 138
9 — Jonction *P-N* 138
Exercices..... 144

Chapitre 2 — *Diode à jonction P-N* 145

1 — Description et symbole 145
2 — Diode en court-circuit 145
3 — Diode polarisée en direct 145
4 — Diode polarisée en inverse ... 146
5 — Caractéristique d'une diode à jonction..... 146
6 — Schéma équivalent d'une diode à jonction 147
7 — Diode idéale et degré d'approximation 147
8 — Limitations d'une diode à jonction 147
9 — Temps de commutation d'une diode 148
10 — Quelques applications des diodes à jonction 150
11 — Diode Zener 157
12 — Photodiodes 159
Exercices..... 150

Chapitre 3 — *Le transistor à jonctions* ... 161

1 — Description et symbole 161
2 — Effet transistor 161
3 — Mise en équations 163
4 — Caractéristiques du transistor. 163
5 — Régimes de fonctionnement du transistor..... 165
6 — Fonctionnement du transistor en commutation..... 166
7 — Fonctionnement du transistor en amplification 173
Exercices..... 195

Chapitre 4 — *Le transistor à effet de champ* 200

1 — Description du transistor à effet de champ à jonctions (JFet ou TEC) 200
2 — Fonctionnement du J. FET... 200
3 — Mise en équations 201
4 — Caractéristiques du J. FET ... 202
5 — J. FET à canal *P*..... 207
6 — Influence de la température .. 207
7 — Capacités du J. FET 208
8 — Utilisation du J. FET en amplification 209
9 — Fonctionnement en porte analogique..... 221
Exercices..... 226

Chapitre 5 — *Amplificateur de différence* 227

1 — Principe..... 227
2 — Montage à sortie flottante ... 227
3 — Montage à référence commune 230
4 — Comportement en grands signaux..... 231
Exercices..... 234

Chapitre 6 — *Amplificateur opérationnel* . 237

1 — Définition et propriétés fondamentales 237
2 — Équation des montages fondamentaux 237
3 — Amplificateur opérationnel réel 241
4 — Erreurs dites de « calcul » 242
5 — Erreurs dites « statiques » 245
6 — Erreurs dites « dynamiques ».. 249
Exercices..... 255

1re partie

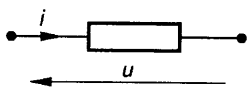
THÉORIE DU SIGNAL

1 lois générales des réseaux linéaires

Les circuits électroniques linéaires sont décrits à partir de cinq éléments principaux :

- deux éléments actifs :
  - générateur de tension,
  - générateur de courant,
- trois éléments passifs :
  - résistance,
  - capacité,
  - inductance.

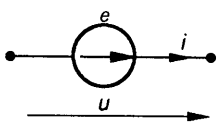
Chaque élément est caractérisé par la relation qu'il impose entre la tension à ses bornes et le courant qui le traverse. Cette relation $u = f(i)$ est la *caractéristique* de l'élément :



1. LES ÉLÉMENTS ACTIFS

1.1. GÉNÉRATEUR DE TENSION

Le générateur de tension dont le symbole est le suivant :



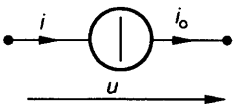
impose la valeur de la tension à ses bornes quel que soit le courant qui le traverse; sa caractéristique est donc :

$$u = e \qquad \forall i$$

On l'appelle aussi force électromotrice e.

1.2. GÉNÉRATEUR DE COURANT

Le générateur de courant dont le symbole est le suivant :



impose la valeur du courant qui le traverse quelle que soit la tension à ses bornes; sa caractéristique est donc :

$$i = i_0 \qquad \forall u$$

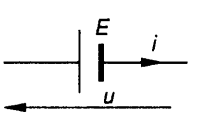
1.3. DIFFÉRENTES FORMES DE SIGNAUX

La grandeur électrique imposée (courant dans le cas du générateur de courant, tension dans le cas du générateur de tension) peut avoir une forme quelconque.

Cependant on peut séparer quelques formes fondamentales :

1.3.1. Signal constant

Dans le cas du générateur de tension, on utilise alors le symbole suivant :



$$u = E \qquad \forall i$$

1.3.2. Signal périodique

Le signal électrique se reproduit identique à lui-même au cours du temps. La période T est le plus petit intervalle de temps au bout duquel le signal reprend la même valeur. La fréquence f est l'inverse de la période :

$$f = \frac{1}{T}.$$

On définit, pour le signal périodique $a(t)$, les grandeurs caractéristiques suivantes :

– *valeur moyenne :*

$$A_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a(t)\,\mathrm{d}t;$$

– *valeur efficace :* A telle que

$$A^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarquons que le carré de la valeur efficace est la valeur moyenne du carré du signal, ce qui permet de donner le schéma synoptique d'un appareil capable de mesurer les valeurs efficaces (*fig.* 1).

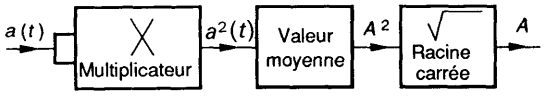


Fig. 1.

1.3.3. Signal sinusoïdal

Le signal représenté sur la figure 2 s'écrit

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \varphi)$$

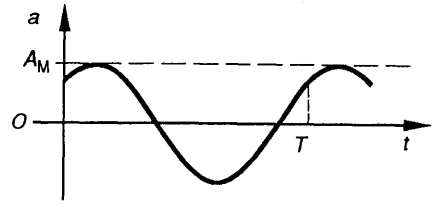


Fig. 2.

- A_M est la valeur maximale;
- ω est la pulsation mesurée en radians par seconde (rad . s^{-1}); la définition de la période conduit aux relations :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f;$$

- φ est la phase à l'origine mesurée en radians.

Le signal sinusoïdal étant un cas particulier de signal périodique, on peut calculer :

- $$A_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} A_M \cos(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{A_M}{T\omega}\sin(\omega t + \varphi)\right]_{t_0}^{t_0+T} = 0,$$

ce qui est évident d'après l'observation de la courbe $a(t)$:

- $$A^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} A_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{A_M^2}{2T}\left[t + \frac{\sin(2\omega t + 2\varphi)}{2\omega}\right]_{t_0}^{t_0+T}$$
$$= \frac{A_M^2}{2},$$

soit $$A = \frac{A_M}{\sqrt{2}}.$$

Nous écrirons donc le signal sinusoïdal sous la forme :

$$a(t) = A\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi).$$

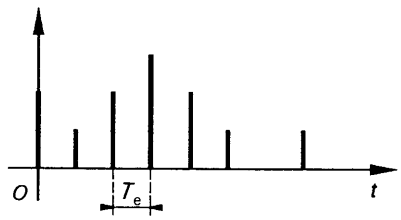
1.3.4. Signal échantillonné

Le signal, échantillonné à la fréquence $F_e = \frac{1}{T_e}$, est constitué d'une suite de valeurs

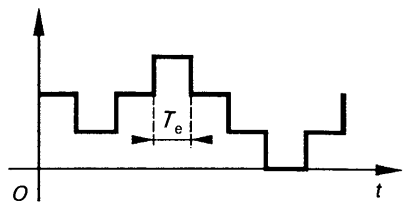
$$\{\ldots a(0),\ a(T_e),\ a(2T_e),\ \ldots,\ a(nT_e),\ldots\} = a^*(t).$$

Cette suite de valeurs peut être convertie en tension par l'intermédiaire d'un convertisseur numérique analogique. On obtient alors les formes de signaux donnés par la figure 3 selon que le signal est bloqué ou non entre deux échantillons.

L'observation des courbes (*fig.* 3) permet de constater un « retard » du signal échantillonné et bloqué par rapport au signal échantillonné. L'étude théorique le confirmera.



$a(t)$ échantillonné



$a(t)$ échantillonné et bloqué

Fig. 3.

1.3.5. Signal aléatoire

Il est, dans ce cas, impossible de connaître la valeur exacte du signal $a(t)$ à l'instant t. Le signal est alors défini en termes de probabilité : $P(x, t)\,dx$ est la probabilité pour qu'à l'instant t, le signal $a(t)$ soit compris entre x et $x + dx$.

Suivant la forme du signal, il existe des méthodes spécifiques d'analyse du comportement des circuits électroniques : ces méthodes seront exposées dans les chapitres suivants.

2. LES ÉLÉMENTS PASSIFS

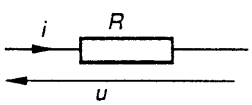
Si les éléments actifs produisent le signal, les éléments passifs subissent le signal et réagissent en fonction de leur caractéristique.

2.1. ÉLÉMENT PASSIF NON RÉACTIF. RÉSISTANCE *R*

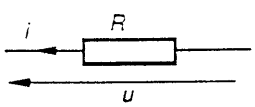
Compte tenu des sens d'orientation :

- de l'espace vis-à-vis de la tension u,
- du conducteur vis-à-vis du courant i,

la caractéristique de la résistance est la suivante :



$$u = + Ri$$



$$u = - Ri$$

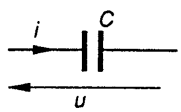
R est la résistance, elle se mesure en ohms (Ω).

2.2. ÉLÉMENTS PASSIFS RÉACTIFS

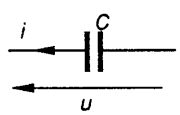
Les éléments réactifs font intervenir une dérivation dans leur caractéristique.

2.2.1. Capacité *C*

Compte tenu des sens d'orientation, la caractéristique d'une capacité est la suivante :



$$i = + C\frac{du}{dt}$$

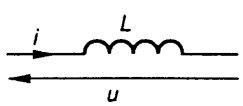


$$i = - C\frac{du}{dt}$$

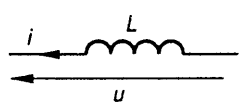
C est la capacité du condensateur, elle se mesure en farads (F).

2.2.2. Inductance *L*

Compte tenu des sens d'orientation, la caractéristique d'une inductance est la suivante :



$$u = + L\frac{di}{dt}$$



$$u = - L\frac{di}{dt}$$

L est l'inductance de la bobine, elle se mesure en henrys (H).

On peut dégager, pour le signe intervenant dans les caractéristiques, une propriété générale pour les éléments passifs :

- le signe est + si l'espace et le conducteur sont orientés en sens inverse,
- le signe est − si l'espace et le conducteur sont orientés dans le même sens.

3. LES RÉSEAUX RÉSISTIFS

Ce sont des réseaux dont les seuls éléments passifs sont des résistances.

3.1. LOIS DE KIRCHHOFF

3.1.1. Loi des nœuds

On appelle nœud N, un point où arrivent plusieurs branches (*fig.* 4).

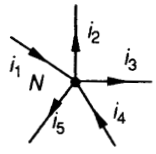


Fig. 4.

Il ne peut y avoir accumulation permanente de charges en un point, car le potentiel y deviendrait infini. On en déduit

$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 - i_5 = 0.$$

Dans le cas général, on écrit :

$\Sigma \pm i_n = 0$ signe + si le conducteur est orienté vers le nœud

3.1.2. Loi des mailles

On appelle maille, un ensemble de branches formant un circuit fermé (*fig.* 5).

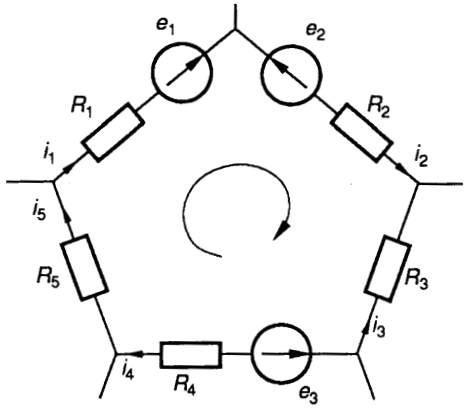


Fig. 5.

En écrivant que la somme des différences de potentiel est nulle lorsqu'on tourne sur la maille, on obtient :

$$e_1 - R_1 i_1 - e_2 - R_2 i_2 + R_3 i_3 - e_3 - R_4 i_4 - R_5 i_5 = 0,$$

soit

$$e_1 - e_2 - e_3 = R_1 i_1 + R_2 i_2 - R_3 i_3 + R_4 i_4 + R_5 i_5.$$

Dans le cas général :
- on oriente chaque branche;
- on choisit un sens de parcours sur la maille.

On écrit :

$$\Sigma \pm e_n = \Sigma \pm R_n i_n$$

- La force électromotrice e_n est précédée du signe + si son sens est identique au sens de parcours de la maille.
- Le terme $R_n i_n$ est précédé du signe + si le sens d'orientation de la branche n est identique au sens de parcours de la maille.

3.2. THÉORÈME DE MILLMAN

Considérons le réseau à n branches de la figure 6.

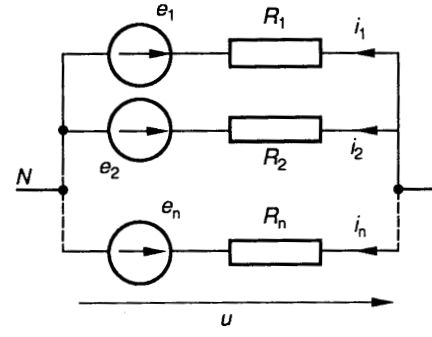


Fig. 6.

La loi des nœuds au point N

$$(i_1 + i_2 + ... + i_n = 0)$$

conduit à :

$$\frac{u - e_1}{R_1} + \frac{u - e_2}{R_2} + ... + \frac{u - e_n}{R_n} = 0$$

soit

$$u = \frac{\dfrac{e_1}{R_1} + \dfrac{e_2}{R_2} + ... + \dfrac{e_n}{R_n}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + ... + \dfrac{1}{R_n}}$$

Cette formule est connue sous le nom de théorème de Millman.

3.3. GÉNÉRATEUR DE THÉVENIN. GÉNÉRATEUR DE NORTON

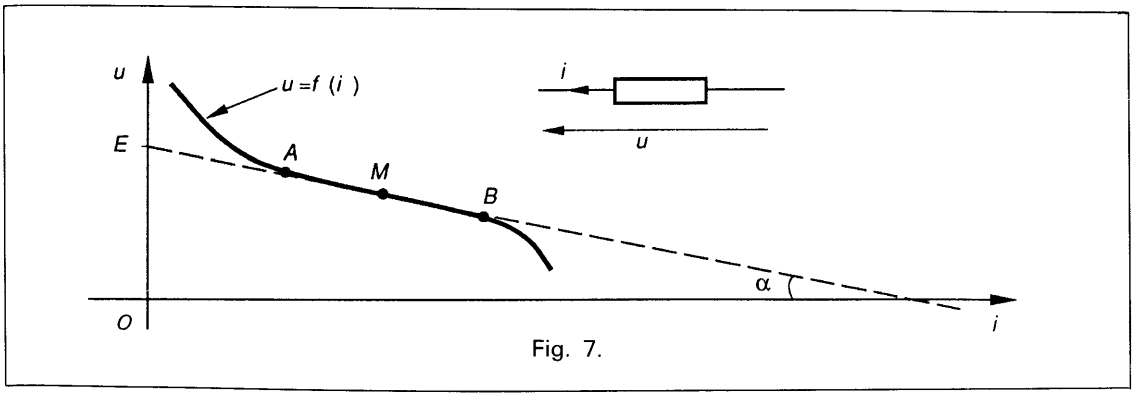


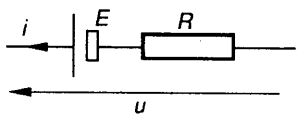
Fig. 7.

Considérons un composant dont la caractéristique $u = f(i)$ est décrite par la courbe de la figure 7.

Tant que le point de fonctionnement M ne sort pas du segment AB (fonctionnement linéaire), la caractéristique $u = f(i)$ s'identifie à :

$u = E - i(\tan \alpha) = E - Ri$ en posant $R = \tan \alpha$.

Tant que le point M reste entre A et B, on peut donner, du composant, le schéma équivalent de la figure 8 :



$u = E - Ri$

Fig. 8.

Ce schéma constitue le *générateur de Thévenin* équivalent au composant.

La formule précédente peut s'écrire $i = \frac{E}{R} - \frac{u}{R}$, ce qui conduit au schéma équivalent de la figure 9 (dit *générateur de Norton* équivalent).

$$i = \frac{E}{R} - \frac{u}{R}$$

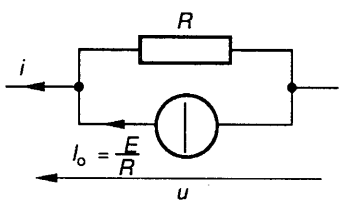


Fig. 9.

L'équivalence entre les schémas des figures 8 et 9 permet de résoudre certains problèmes par simple transformation de schémas.

3.4. THÉORÈME DE SUPERPOSITION

Soit un réseau possédant n forces électromotrices $e_1, e_2, ..., e_n$.

Compte tenu de la linéarité des lois de Kirchhoff, le courant i_p dans la branche p du réseau est une fonction linéaire de $e_1, e_2, ..., e_n$, soit :

$$i_p = a_{p_1} e_1 + a_{p_2} e_2 + ... + a_{p_n} e_n.$$

Les coefficients $a_{p_1}, a_{p_2}, ..., a_{p_n}$ dépendent des résistances du réseau.

Le courant i_p peut s'écrire :

$$i_p = i_{p_1} + i_{p_2} + ... + i_{p_n}$$

où $i_{p_i} = a_{p_i} e_i$ est le courant qu'impose, dans la branche p, le générateur e_i supposé seul.

D'où l'énoncé du théorème de superposition :

Théorème

Le courant dans une branche d'un réseau linéaire est la somme des courants qu'impose dans cette branche, chaque force électromotrice supposée seule.

3.5. THÉORÈME DE THÉVENIN

Soit un réseau résistif et soient deux points A et B de ce circuit ; branchons une résistance R entre les deux points A et B. Nous obtenons alors le schéma de la figure 10 (état I).

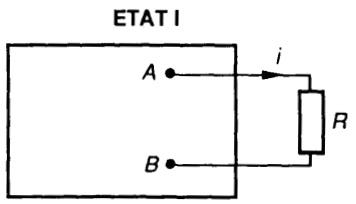


Fig. 10.

On se propose de calculer le courant i dans la branche AB.

Pour cela, on imagine, à partir de l'état I les deux états suivants.

3.5.1. État II

On place en série dans la branche AB un générateur de tension tel que le courant soit nul dans cette branche (*fig.* 11).

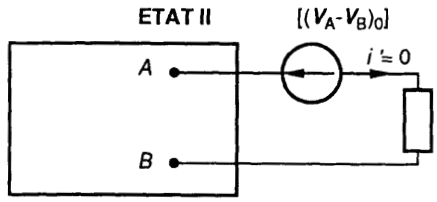


Fig. 11.

La valeur d'un tel générateur de tension est $(V_A - V_B)_0$: tension qui apparaît entre les points A et B lorsque la branche est ouverte.

3.5.2. État III

A partir de l'état II, on imagine que toutes les forces électromotrices du réseau sont remplacées par des courts-circuits à l'exception de $(V_A - V_B)_0$. Le réseau est alors équivalent à une résistance R_{eq} (*fig.* 12) et le courant dans la branche AB s'écrit : $i'' = -\dfrac{(V_A - V_B)_0}{R + R_{eq}}$.

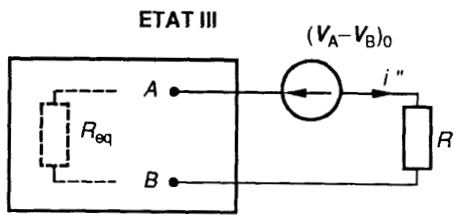


Fig. 12.

L'état II résulte de la superposition des états I et III : le théorème de superposition permet d'écrire $i' = 0 = i + i''$, soit

$$i = -i'' = \frac{(V_A - V_B)_0}{R + R_{eq}}$$

et le réseau peut être décrit par le schéma équivalent de la figure 13, dans lequel :

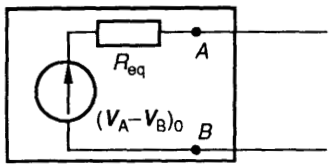


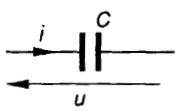
Fig. 13.

- $(V_A - V_B)_0$ est la tension qui apparaît entre les points A et B lorsque la charge est débranchée,
- R_{eq} est la résistance vue entre les points A et B lorsque la charge est débranchée et lorsque toutes les forces électromotrices sont remplacées par des courts-circuits.

4. LES RÉSEAUX ASSOCIANT RÉSISTANCE ET CAPACITÉ

4.1. PROPRIÉTÉS DES CAPACITÉS

4.1.1. Équation fondamentale



$$i = C\frac{du}{dt}$$

4.1.2. Conséquences de l'équation fondamentale

En régime continu établi : les grandeurs électriques sont constantes :

$$u = \text{Cte} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad i = 0.$$

En régime continu établi, la capacité se comporte comme un circuit ouvert.

En régime périodique établi : les grandeurs électriques reprennent périodiquement la même valeur :

$$u(t_0 + T) = u(t_0), \qquad \text{quel que soit } t_0.$$

Le calcul de la valeur moyenne du courant dans la capacité conduit à :

$$I_{moy} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} C\,du$$

$$= \frac{C}{T}[u(t_0 + T) - u(t_0)] = 0$$

En régime périodique établi, la valeur moyenne du courant, dans une capacité, est nulle.

En régime quelconque : l'équation fondamentale conduit à $\frac{du}{dt} = \frac{i}{C}$, C étant par définition différent de zéro (sinon il n'y aurait pas de capacité), on peut en conclure que $\frac{du}{dt}$ n'est jamais infini à moins que le courant dans la capacité puisse être considéré comme infini. Nous en tirons les propriétés suivantes :

- la tension aux bornes d'une capacité ne peut pas subir de discontinuité :

$$\boxed{u(t_{0+}) = u(t_{0-}), \qquad \text{quel que soit } t_0}$$

  à moins qu'à l'instant t_0, le courant puisse être considéré comme infini;
- la capacité s'oppose aux variations de la tension à ses bornes et ce d'autant plus que :
  - C est plus grand,
  - le courant dans la capacité est plus faible.

Les remarques précédentes permettent de comprendre le fonctionnement de certains dispositifs. Considérons par exemple le schéma de la figure 14.

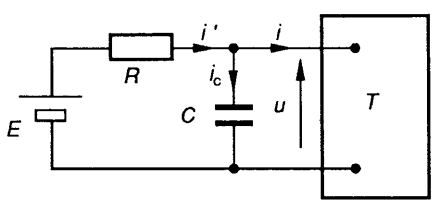


Fig. 14.

T est un composant (ou un ensemble de composants) dont la caractéristique $u = f(i)$ est donnée à la figure 15.

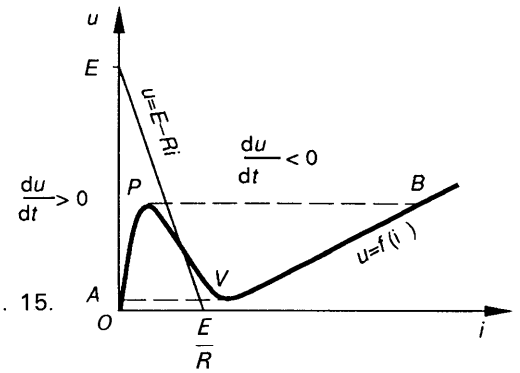


Fig. 15.

La tension u est obtenue par résolution du système d'équations :

$$\begin{cases} E = Ri' + u \\ i' = i + i_c \\ i_c = C\dfrac{du}{dt} \\ u = f(i) \end{cases}$$

qui se ramène au système

$$\begin{cases} C\dfrac{du}{dt} = \dfrac{E-u}{R} - i \\ u = f(i) \end{cases}$$

L'équation $u = f(i)$ étant donnée graphiquement, la résolution ne peut être que graphique; traçons, pour ce faire, la droite d'équation $i = \frac{E-u}{R}$ (ou $u = E - Ri$).

Elle partage le plan (u, i) en trois sous-ensembles :

- l'ensemble des points de la droite pour lesquels $\frac{E-u}{R} - i = 0$, c'est-à-dire $\frac{du}{dt} = 0$;
- l'ensemble des points situés à gauche de la droite, pour lesquels $\frac{E-u}{R} - i > 0$, c'est-à-dire $\frac{du}{dt} > 0$;
- l'ensemble des points situés à droite de la droite pour lesquels $\frac{du}{dt} < 0$.

Le point de fonctionnement de coordonnées (u, i) se trouve obligatoirement sur la courbe $u = f(i)$. Supposons qu'à l'instant initial, ce point soit en A, où $\frac{du}{dt}$ est positif. La tension u doit donc être croissante et le point de fonctionnement monte jusqu'au point P où il rencontre les deux conditions contradictoires :

- caractéristique décroissante de tous côtés,
- $\frac{du}{dt} > 0$ qui impose la croissance de u.

La seule solution pour le point de fonctionnement est de passer en B, et ce, horizontalement, car la tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité.

En B, $\frac{du}{dt}$ est négatif et le point de fonctionnement descend jusqu'en V, où il rencontre les deux conditions contradictoires :

- caractéristique croissante de tous côtés,
- $\frac{du}{dt} < 0$ qui impose la décroissance de u.

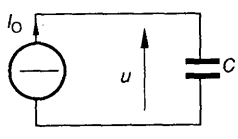
La seule solution, pour le point de fonctionnement, est de passer horizontalement en A et le cycle recommence.

Le système, ne possédant aucun état stable, constitue un *oscillateur*.

Remarquons que les oscillations ne sont possibles que parce que le point de concours de la caractéristique $u = f(i)$ et de la droite $u = E - Ri$ se trouve sur la portion décroissante de la caractéristique $u = f(i)$. Le point de fonctionnement ne se trouve jamais sur la droite $u = E - Ri$. S'il en était autrement, il rencontrerait la condition $\frac{du}{dt} = 0$, soit $u = \text{Cte}$, et le point de fonctionnement s'arrêterait là.

4.2. ALIMENTATION D'UNE CAPACITÉ PAR UN GÉNÉRATEUR DE COURANT CONSTANT

Considérons le réseau de la figure 16. A l'instant $t = 0$, la tension aux bornes de la capacité est égale à U_0,



$$I_0 = C\frac{du}{dt} \quad \text{soit} \quad \frac{du}{dt} = \frac{I_0}{C},$$

$$u = \frac{I_0}{C}t + U_0.$$

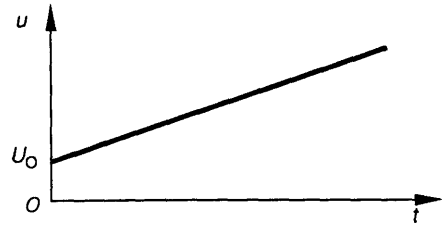


Fig. 16.

On obtient donc une « rampe » en alimentant une capacité à courant constant. Cette propriété conduit à de nombreuses applications; on peut en déduire, par exemple, le schéma synoptique d'un générateur de tension triangulaire (*fig.* 17).

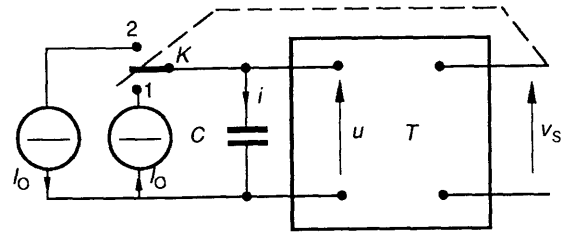


Fig. 17.

• Le bloc T établit entre les tensions v_S et u la relation décrite par le diagramme (*fig.* 18) :

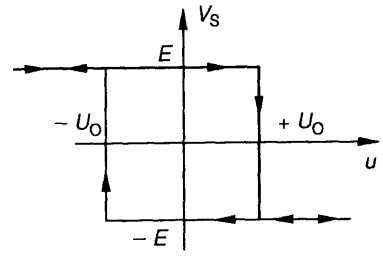


Fig. 18.

* lorsque u atteint $+ U_0$ par valeurs croissantes, v_S bascule de $+ E$ à $- E$,

* lorsque u atteint $- U_0$ par valeurs décroissantes, v_S bascule de $- E$ à $+ E$.

• L'interrupteur K est commandé par la tension v_S :

* K est en 2 lorsque $v_S = - E$,

* K est en 1 lorsque $v_S = + E$.

Le courant i dans la capacité prenant alternativement les valeurs $+ I_0$ et $- I_0$, la tension u évolue conformément au diagramme de la figure 19.

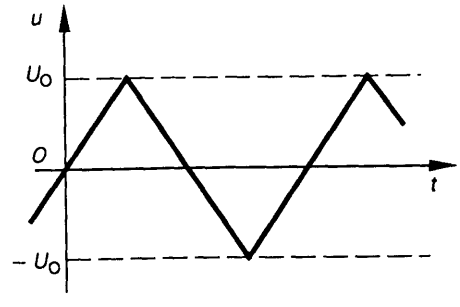


Fig. 19.

4.3. ALIMENTATION D'UNE CAPACITÉ À TRAVERS UNE RÉSISTANCE

4.3.1. Alimentation par un générateur de tension constante

Soit le schéma de la figure 20.

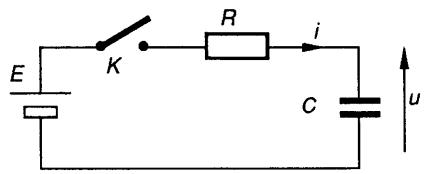


Fig. 20.

A l'instant $t = 0$, $u = U_0$, on ferme l'interrupteur K.

Des équations :

$$\begin{cases} E = Ri + u \\ i = C\dfrac{du}{dt} \end{cases} \quad \text{on tire} \quad \boldsymbol{E = RC\frac{du}{dt} + u,}$$

équation différentielle du premier ordre dont la solution est déterminée de la manière suivante.

SOLUTION DE L'ÉQUATION SANS SECOND MEMBRE

$$RC\frac{du}{dt} + u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{u}{k} = -\frac{t}{RC}$$

$$\boldsymbol{u = k\,e^{-t/RC}.}$$

SOLUTION PARTICULIÈRE

Le second membre étant constant, on cherche la solution sous la forme $u = \text{Cte}$, soit $\dfrac{du}{dt} = 0$. Il vient alors :

$$\boldsymbol{u = E.}$$

SOLUTION GÉNÉRALE

Elle est obtenue en faisant la somme de la solution particulière et de la solution de l'équation sans second membre :

$$\boldsymbol{u = E + k\,e^{-t/RC}.}$$

CALCUL DE LA CONSTANTE D'APRÈS LES CONDITIONS INITIALES

$$\begin{cases} u(0-) = U_0 \\ u(0+) = E + k \end{cases} \qquad \boldsymbol{u(0+) = u(0-)}$$

car u est la tension aux bornes de la capacité et à l'instant $t = 0$, la résistance R limite le courant i à $\dfrac{E - U_0}{R}$, donc $k = U_0 - E$.

Solution finale : $u = E + (U_0 - E)\,e^{-t/RC}$

Traçons la courbe donnant les variations de la tension u en fonction du temps :

- lorsque t tend vers l'infini u tend vers E,
- la pente de la tangente à l'origine est

$$\frac{du}{dt}(0+) = \frac{i(0+)}{C} = \frac{E - u(0+)}{RC}$$

$$= \frac{E - u(0-)}{RC} = \frac{E - U_0}{RC}$$

La tangente à l'origine coupe donc l'asymptote $u = E$ à l'instant $\tau = RC$.

Les courbes décrites figure 21 donnent les variations de u dans les conditions :

- $U_0 = E$,
- $U_0 > E$,
- $U_0 < E$,

$\tau = RC$ est la constante de temps du circuit résistance-capacité.

Dans le cas où $U_0 = 0$, on définit le temps de montée t_r par le temps nécessaire à la tension pour passer de 10 % à 90 % de la valeur finale.

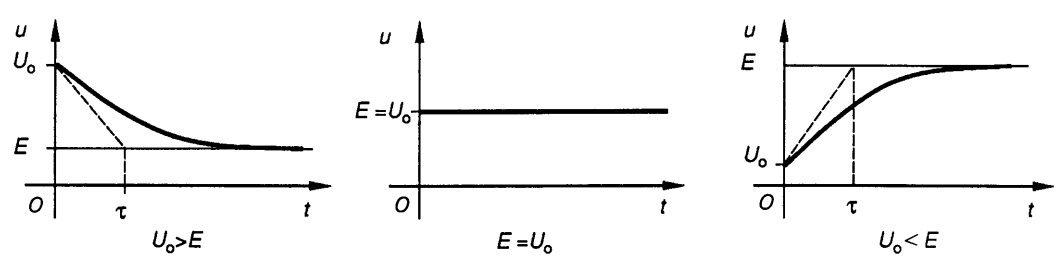


Fig. 21.

Le calcul de t_r à partir de l'équation

$$u = E - E\,e^{-t/RC}$$

conduit à :

$$t_r = RC \ln 9 = 2{,}2RC.$$

On définit, dans les mêmes conditions, le temps de réponse à 5 %, $t_{r\%}$, par le temps au bout duquel la tension u ne diffère que de 5 % de sa valeur finale (*fig.* 22).

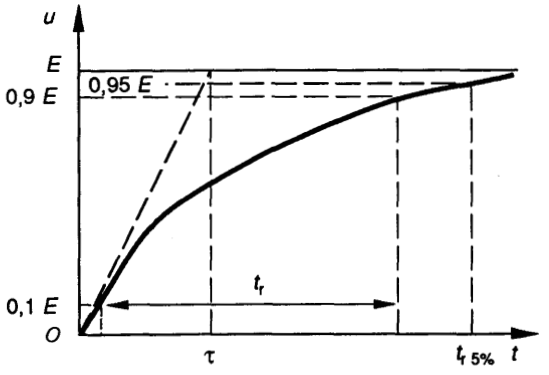


Fig. 22.

Le calcul de $t_{r\,5\%}$ à partir de $u = E - E\,e^{-t/RC}$ conduit à :

$$t_{r\,5\%} = 3RC$$

Variations du courant *i*

De l'expression de $u = E + (U_0 - E)\,e^{-t/RC}$, on déduit l'équation de i à partir de l'une ou l'autre des équations initiales :

$$\begin{cases} i = C\dfrac{du}{dt}, \\ E = Ri + u, \end{cases} \quad \text{soit} \quad i = \frac{E - U_0}{R}\,e^{-t/RC}.$$

Les courbes décrites figure 23 donnent les variations de i dans les conditions :

- $U_0 = E$,
- $U_0 > E$,
- $U_0 < E$,

4.3.2. Alimentation par une rampe de tension

Soit le schéma de la figure 24 avec $e = at + E_0$

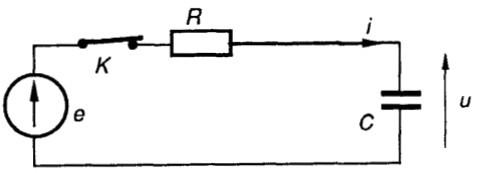


Fig. 24.

A l'instant $t = 0$, la tension u étant égale à U_0, on ferme l'interrupteur K.

Des équations :

$$\begin{cases} e = Ri + u, \\ i = C\dfrac{du}{dt}, \end{cases}$$

on tire $\quad e = at + E_0 = RC\dfrac{du}{dt} + u.$

SOLUTION DE L'ÉQUATION SANS SECOND MEMBRE

$$u = k\,e^{-t/RC}$$

SOLUTION PARTICULIÈRE

Le second membre étant une fonction linéaire du temps, on cherche la solution particulière sous la forme $u = mt + n$, soit $\dfrac{du}{dt} = m$.

Remplaçons u et $\dfrac{du}{dt}$ dans l'équation différentielle, il vient :

$$at + E_0 = RCm + mt + n.$$

Cette équation devant être vérifiée quel que soit t, on obtient :

$$\begin{cases} m = a \\ RCm + n = E_0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} m = a \\ n = E_0 - aRC \end{cases}$$

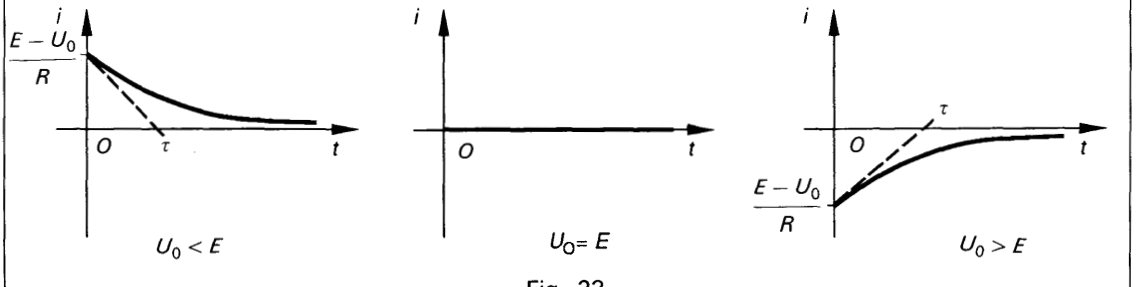


Fig. 23.

SOLUTION GÉNÉRALE

$$u = at + E_0 - aRC + k\,e^{-t/RC}$$

CALCUL DE LA CONSTANTE D'INTÉGRATION D'APRÈS LES CONDITIONS INITIALES

$$\begin{cases} u(0+) = E_0 - aRC + k \\ u(0-) = U_0 \end{cases}$$

$u(0+)$ étant égal à $u(0-)$, on en déduit la valeur de k

$$k = U_0 - E_0 + aRC.$$

SOLUTION FINALE

$$u = at + E_0 - aRC + (U_0 - E_0 + aRC)\,e^{-t/RC}$$

Traçons la courbe donnant les variations de la tension u en fonction du temps :

- lorsque t tend vers l'infini u se rapproche de la droite $at + E_0 - aRC$; la tension u suit donc l'évolution de la tension $e - aRC$; aRC constitue **l'erreur de traînage;**
- la pente de la tangente à l'origine est

$$\frac{du}{dt}(0+) = \frac{i(0+)}{C} = \frac{e(0+) - u(0+)}{RC}$$
$$= \frac{e(0+) - u(0-)}{RC} = \frac{E_0 - U_0}{RC}$$

son équation est $u = \dfrac{E_0 - U_0}{RC}t + U_0$;
à l'instant $t = \tau = RC$ sa valeur est E_0;

la courbe représentative de u est donnée par la figure 25.

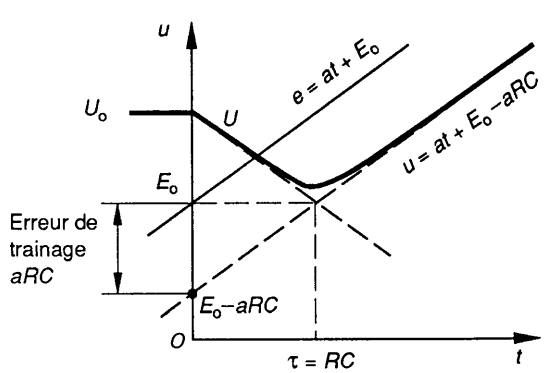


Fig. 25.

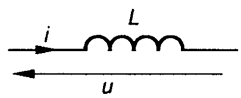
4.3.3. Remarques à propos de la solution de l'équation différentielle

La solution de l'équation sans second membre, de la forme $k\,e^{-t/RC}$, dépend des conditions initiales, et disparaît au cours du temps. Elle constitue *le régime transitoire.*
La solution particulière, indépendante des conditions initiales, et qui subsiste, après disparition de l'équation sans second membre, constitue *le régime permanent.*

5. RÉSEAUX ASSOCIANT RÉSISTANCE ET INDUCTANCE

5.1. PROPRIÉTÉS DES INDUCTANCES

5.1.1. Équation fondamentale



$$u = L\frac{di}{dt}$$

5.1.2. Conséquences de l'équation fondamentale

En régime continu établi, les grandeurs électriques sont constantes, soit

$$i = \text{Cte} \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow u = 0.$$

En régime continu établi, l'inductance se comporte comme un court-circuit.

En régime périodique établi, les grandeurs électriques reprennent périodiquement la même valeur : $i(t_0 + T) = i(t_0)$ quel que soit t_0.
Le calcul de la valeur moyenne de la tension conduit à

$$U_{moy} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} L\,di$$
$$= \frac{L}{T}[i(t_0 + T) - i(t_0)] = 0.$$

En régime périodique établi, la valeur moyenne de la tension aux bornes d'une inductance est nulle.

En régime quelconque, l'équation fondamentale conduit à $\frac{di}{dt} = \frac{u}{L}$. L étant, par définition, différent de zéro (sinon il n'y aurait pas d'inductance), on peut en conclure que $\frac{di}{dt}$ n'est jamais infini à moins que la tension aux bornes de l'inductance puisse être considérée comme infinie. Nous en tirons les conclusions suivantes :

- le courant dans une inductance ne peut pas subir de discontinuité,

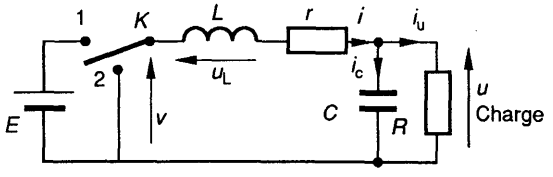
$$i(t_{0+}) = i(t_{0-}) \qquad \text{quel que soit } t_0$$

  à moins qu'à l'instant t_0, la tension aux bornes de l'inductance puisse être considérée comme infinie;

- l'inductance s'oppose aux variations du courant qui la traverse et ce d'autant plus que :
  - L est plus grand;
  - la tension aux bornes de l'inductance est plus faible.

Ces remarques permettent de comprendre le fonctionnement de certains dispositifs comme par exemple l'alimentation à découpage.

En effet, on peut donner, d'une alimentation à découpage, le schéma équivalent de la figure 26.



r est la résistance de la bobine d'inductance L

Fig. 26.

L'interrupteur est basculé périodiquement de la position 1 à la position 2 :

$nT < t < nT + aT$ $\quad K$ est en 1

$nT + aT < t < (n+1)T$ $\quad K$ est en 2

où $a < 1$ est le rapport cyclique.

Ce qui donne pour la tension v la courbe de variations décrite à la figure 27.

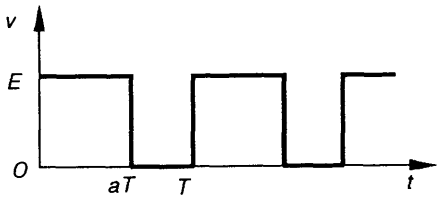


Fig. 27.

La capacité s'opposant à la variation de la tension à ses bornes, la tension u reste sensiblement constante et égale à U_0.

Les équations entre valeurs instantanées

$$\begin{cases} v = u_L + ri + u \\ i = i_C + i_u \end{cases}$$

conduisent à

$$\begin{cases} V_{moy} = rI_{moy} + U_0 = aE \\ I_{moy} = I_{u\,moy} \end{cases}$$

car la tension moyenne aux bornes de l'inductance et le courant moyen dans le condensateur sont nuls en régime périodique établi.

On en déduit :

$$U_0 = aE - rI_{u\,moy}.$$

Pour l'alimentation de la charge R, le montage se comporte comme un générateur :

- de force électromotrice aE réglable par le rapport cyclique a,
- de résistance interne r.

5.2. ÉTABLISSEMENT DU COURANT DANS UN CIRCUIT INDUCTIF

Considérons le schéma donné figure 28.

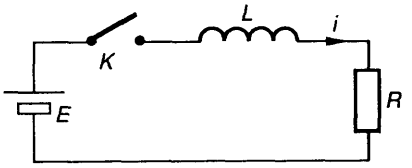


Fig. 28.

A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. On obtient, pour le courant i, l'équation suivante :

$$E = Ri + L\frac{di}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{E}{R} = i + \frac{L}{R}\frac{di}{dt}.$$

Cette équation différentielle du premier ordre est identique à celle qui a été résolue au paragraphe 4.3.1. On en déduit par analogie la loi de variations du courant i :

$$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

Ce qui donne, pour le courant i, la courbe de variation décrite à la figure 29.

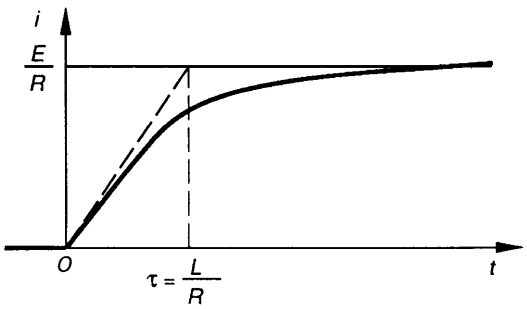


Fig. 29.

Lorsque t tend vers l'infini, i tend vers $\frac{E}{R}$, ce qui est normal, car nous avons vu qu'en régime continu établi l'inductance se comporte comme un court-circuit.

5.3. RUPTURE DU COURANT DANS UN CIRCUIT INDUCTIF

Reprenons le schéma de la figure 28 et supposons qu'à l'instant $t = 0$, le courant étant établi à $\frac{E}{R}$, on ouvre l'interrupteur K. Il apparaît alors deux exigences contradictoires :

- celle de l'expérimentateur qui veut faire passer instantanément le courant i de $\frac{E}{R}$ à 0;
- celle de l'inductance qui ne tolère aucune variation brutale du courant i qui la traverse.

En définitive c'est l'inductance qui l'emporte en provoquant aux bornes de l'interrupteur une surtension telle qu'elle provoque l'ionisation de l'air entre les lames de l'interrupteur. Il y apparaît donc une étincelle conductrice qui referme le circuit que l'expérimentateur pensait avoir ouvert.

Il faut donc ajouter à l'inductance un circuit lui permettant de prolonger le courant qui la traverse; ce circuit peut être réalisé par une simple résistance R_1 conformément au schéma de la figure 30.

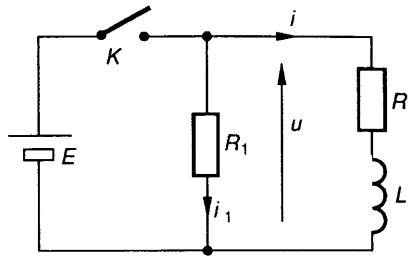


Fig. 30.

Des équations

$$\begin{cases} u = Ri + L\dfrac{di}{dt} \\ i = -i_1 \\ u = R_1 i_1 \end{cases}$$

on tire

$$\frac{L}{R + R_1}\frac{di}{dt} + i = 0,$$

équation différentielle du premier ordre sans second membre dont la solution est de la forme

$$i = k\, e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R + R_1},$$

k est calculé d'après les conditions initiales $\left(\text{à } t = 0,\ i = \frac{E}{R}\right)$ soit $k = \frac{E}{R}$ et

$$i = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

On en déduit les lois de variation de i_1 et de u :

$$i_1 = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau}, \quad u = -\frac{R_1 E}{R} e^{-t/\tau}.$$

Les courbes de variation correspondantes sont données figure 31.

La surtension apparaissant à l'ouverture de K, $\left(-\frac{R_1 E}{R}\right)$ est d'autant plus faible que R_1 est plus petite; mais le dispositif présente l'inconvénient de dissiper dans R_1 une puissance inutile $\left(\frac{E^2}{R_1}\right)$ d'autant plus importante que R_1 est plus faible. On peut y remédier en plaçant en série avec R_1 un élément (diode) qui supprime le courant i_1 positif

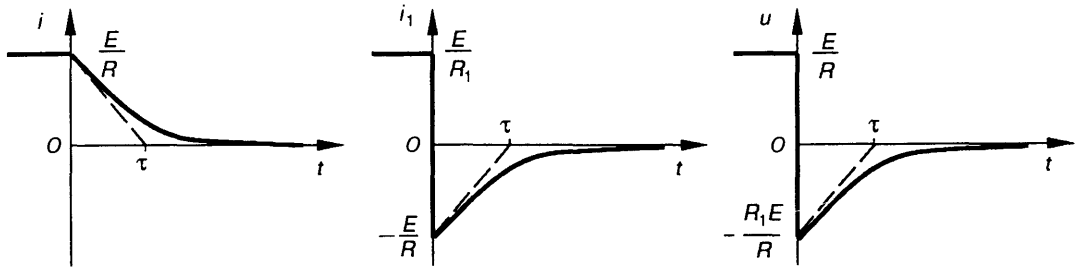


Fig. 31.

tout en conservant le courant i_1 négatif qui prolonge le courant dans l'inductance lors de l'ouverture de K.

6. LES RÉSEAUX ASSOCIANT RÉSISTANCE INDUCTANCE ET CAPACITÉ

6.1. ÉQUATIONS DES MONTAGES FONDAMENTAUX

6.1.1. Circuit R-L-C série alimenté par un générateur de tension

Considérons le schéma de la figure 32.

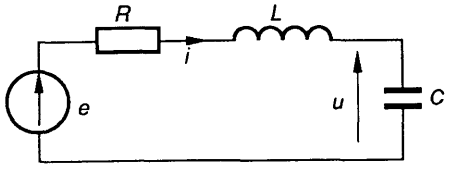


Fig. 32.

Des équations initiales :

$$\begin{cases} e = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u \\ i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

on déduit :

– l'équation différentielle de la tension u :

$$\frac{e}{LC} = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u,$$

– l'équation différentielle du courant i :

$$\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i.$$

6.1.2. Circuit *R-L-C* parallèle alimenté par un générateur de courant

Considérons le schéma de la figure 33.

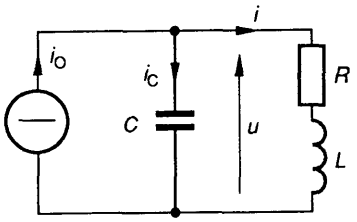


Fig. 33.

Des équations initiales

$$\begin{cases} i_0 = i_C + i \\ i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\ u = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

on déduit :

– l'équation différentielle de la tension u :

$$\frac{R}{LC}i_0 + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}i_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u;$$

– l'équation différentielle du courant i :

$$\frac{i_0}{LC} = \frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i.$$

6.1.3. Forme générale de l'équation différentielle du 2e ordre

On constate dans les deux exemples précédents que les circuits associant une inductance et une capacité sont régis par une équation différentielle du 2e ordre à coefficients constants de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2x = f(t).$$

Le second membre $f(t)$ dépend de la forme du signal imposé par les générateurs de tension ou de courant.

Dans les exemples précédents, on obtient, par identification :

$$\begin{cases} 2m\omega_0 = \dfrac{R}{L} \\ \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ m = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}} \end{cases}$$

ω_0 est la *pulsation propre du circuit;*
m est son *coefficient d'amortissement.*

6.2. CIRCUIT *R-L-C-* SÉRIE EN RÉGIME LIBRE

Considérons le schéma de la figure 34.

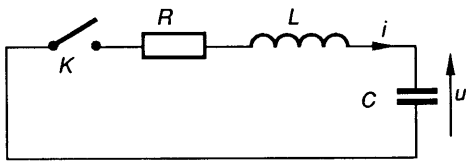


Fig. 34.

A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K, les conditions initiales étant les suivantes : $i(0-) = 0$, $u(0-) = U_0$.

Les variations de la tension u sont régies par l'équation différentielle du 2e ordre sans second membre :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $m = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

La solution de cette équation est de la forme $A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)$ dans laquelle :

- A_1 et A_2 sont deux constantes à déterminer d'après les conditions initiales,
- $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont deux solutions particulières.

Afin de déterminer $f_1(t)$ et $f_2(t)$ cherchons a tel que e^{at} soit solution de l'équation différentielle. Il vient alors

$$e^{at}[a^2 + 2m\omega_0 a + \omega_0^2] = 0,$$

soit $a^2 + 2m\omega_0 a + \omega_0^2 = 0$, équation caractéristique de l'équation différentielle.

Le discriminant est

$$\Delta' = m^2\omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2(m^2 - 1).$$

6.2.1. $m > 1$

Les solutions de l'équation caractéristique sont réelles et négatives :

$$a_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$$

et $$a_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1},$$

et la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$u = A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t}.$$

Pour la détermination de A_1 et A_2 les conditions initiales permettent d'écrire

$$\begin{cases} u(0+) = A_1 + A_2 \\ u(0-) = U_0 \end{cases}$$ et $u(0-) = u(0+)$, car

u est la tension aux bornes d'une capacité, soit $A_1 + A_2 = U_0$;

$$\begin{cases} i(0+) = C\dfrac{du}{dt}(0+) = C[A_1 a_1 + A_2 a_2] \\ i(0-) = 0 \end{cases}$$

et $i(0-) = i(0+)$ car i est le courant dans une inductance; soit $a_1 A_1 + A_2 a_2 = 0$.

A_1 et A_2 sont donc solutions du système

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = U_0 \\ a_1 A_1 + a_2 A_2 = 0 \end{cases}$$

soit $A_1 = \dfrac{U_0 a_2}{a_2 - a_1}$ $A_2 = \dfrac{U_0 a_1}{a_1 - a_2}$.

La courbe décrivant les variations de u est donnée figure 35.*a*.

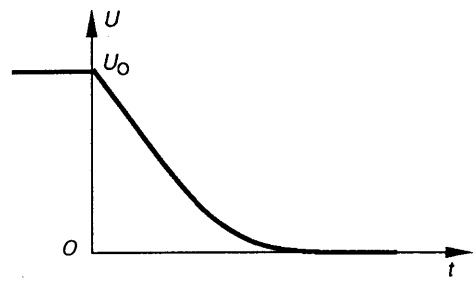


Fig. 35.a

6.2.2. $m = 1$

L'équation caractéristique à une racine double : $a_0 = -\omega_0$ et la solution de l'équation différentielle est de la forme $u = (At + B)e^{-\omega_0 t}$.

A et B sont déterminées d'après les conditions initiales et la courbe donnant les variations de u a la même allure que celle obtenue pour $m > 1$ (*fig.* 35.*a*).

6.2.3. $m < 1$

Les racines de l'équation caractéristique sont imaginaires conjuguées :

$$a_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$
$$a_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

et la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$u = A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t}.$$

Le calcul de A_1 et A_2 d'après les conditions initiales conduit à

$$A_1 = \frac{U_0 a_2}{a_2 - a_1} = \frac{U_0(m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2})}{2j\omega_0\sqrt{1-m^2}}$$

en posant $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$, il vient alors

$$A_1 = U_0\frac{(m\omega_0 + j\omega)}{2j\omega}$$

$$A_2 = \frac{U_0 a_1}{a_1 - a_2} = \frac{U_0(-m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2})}{2j\omega_0\sqrt{1-m^2}}$$
$$= U_0\frac{-m\omega_0 + j\omega}{2j\omega}$$

il vient alors

$$u = U_0 e^{-m\omega_0 t}\left[\frac{m\omega_0}{\omega}\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right],$$

soit $u = U_0 e^{-m\omega_0 t}\left[\cos\omega t + \frac{m\omega_0}{\omega}\sin\omega t\right]$.

Si l'on pose $\frac{m\omega_0}{\omega} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ il vient :

$$u = \frac{U_0}{\cos\theta} e^{-m\omega_0 t}[\cos\omega t\cos\theta + \sin\omega t\sin\theta]$$
$$= \frac{U_0}{\cos\theta} e^{-m\omega_0 t}\cos(\omega t - \theta).$$

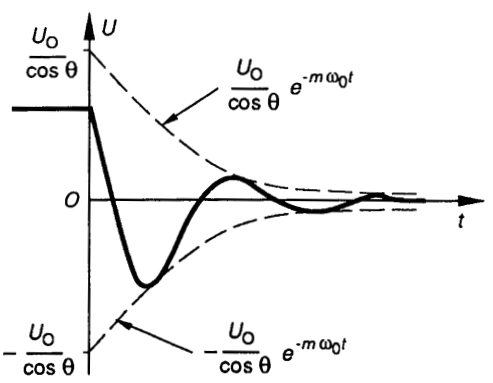


Fig. 35.b

La courbe décrivant les variations de u est donnée figure 35.b. Le cosinus évoluant entre + 1 et − 1, la courbe est comprise entre les deux exponentielles $\frac{U_0}{\cos\theta} e^{-m\omega_0 t}$ et $-\frac{U_0}{\cos\theta} e^{-m\omega_0 t}$.

De cette étude nous retiendrons :

Solution de l'équation différentielle sans second membre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

a) $m > 1$:

$$x = A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t}$$

avec $a_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2-1}$

$a_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2-1}$

b) $m = 1$:

$$x = (At + B) e^{-\omega_0 t}$$

c) $m < 1$: $x = A_0 e^{-m\omega_0 t}\cos(\omega t + \varphi)$

avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$

A, A_0, A_1, A_2, B et φ sont déterminées à partir des conditions initiales.

REMARQUE

La condition $m = 0$ étant un cas particulier de la condition $m < 1$, la solution correspondante est de la forme $u = A_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Les conditions initiales

$$\begin{cases} u(0+) = u(0-) = U_0, \\ i(0+) = C\dfrac{du}{dt}(0+) = 0, \end{cases} \quad \textit{imposent}$$

$$\begin{cases} U_0 = A_0\cos\varphi, \\ 0 = -\omega_0 A_0\sin\varphi \end{cases} \quad \textit{soit} \quad \begin{cases} A_0 = U_0 \\ \varphi = 0, \end{cases}$$

ce qui conduit à $u = U_0\cos\omega_0 t$, d'où l'on déduit

$$i = C\frac{du}{dt} = -C\omega_0 U_0\sin\omega_0 t.$$

La condition $m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = 0$ impose $R = 0$ (ce qui est un cas limite) ; le schéma correspondant est donné figure 36.a et les lois de variations de u et de i figure 36.b.

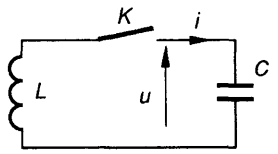


Fig. 36.a

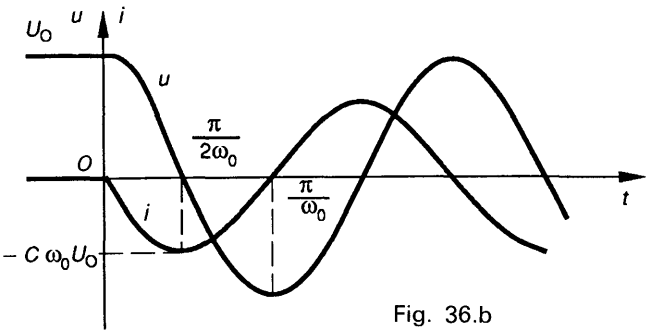


Fig. 36.b

Il apparaît, dans le circuit, des oscillations permanentes, dont on peut donner l'explication physique suivante :

– à l'instant $t = 0$, $u = U_0$, on ferme l'interrupteur K; on offre ainsi, à la capacité, un circuit lui permettant de se décharger;

– à l'instant $t = \frac{\pi}{2\omega_0}$, la capacité est déchargée, mais le courant i est extrêmum et l'inductance, ne tolérant aucune variation brutale du courant i, prolonge ce courant en provoquant la charge de la capacité en sens inverse;

– à l'instant $t = \frac{\pi}{\omega_0}$, $i = 0$, mais la capacité se trouve chargée sous $u = -U_0$, d'où une nouvelle décharge, et ainsi de suite.

6.3. CIRCUIT R-L-C SÉRIE ALIMENTÉ PAR UN GÉNÉRATEUR DE TENSION CONSTANTE

Considérons le schéma de la figure 37.

A l'instant $t = 0$, $u(0-) = 0$, $i(0-) = 0$, on ferme l'interrupteur K.

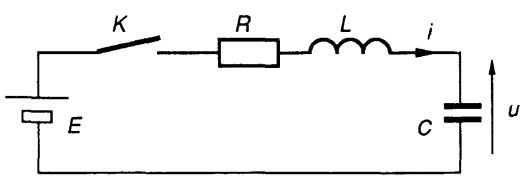


Fig. 37.

Dans ces conditions, la loi de variation de la tension u, est appelée ***réponse indicielle.***

L'évolution de la tension u en fonction du temps obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$.

Solution particulière

Le second membre étant constant, on la cherche sous la forme :

$$u = \text{Cte} \quad \text{soit} \quad \frac{du}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2u}{dt^2} = 0;$$

il vient alors $\boldsymbol{u = E.}$

Solution finale

Reprenons les résultats établis au paragraphe 6.2.

• *a)* $\boldsymbol{m > 1}$ **:** La solution de l'équation sans second membre se met sous la forme :

$$u = A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t}$$

avec $a_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$

et $a_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1}.$

Ce qui donne pour la solution générale l'équation :

$$\boldsymbol{u = E + A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t}.}$$

Les conditions initiales conduisent au système :

$$\begin{cases} u(0+) = u(0-) = 0 = E + A_1 + A_2 \\ i(0+) = i(0-) = C\dfrac{du}{dt}(0+) \\ \qquad\qquad = a_1 A_1 + a_2 A_2 = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = -E \\ a_1 A_1 + a_2 A_2 = 0, \end{cases}$$

dont la résolution conduit à :

$$A_1 = \frac{-a_2 E}{a_2 - a_1} = -E\,\frac{m + \sqrt{m^2 - 1}}{2\sqrt{m^2 - 1}},$$

$$A_2 = \frac{-a_1 E}{a_1 - a_2} = +E\,\frac{m - \sqrt{m^2 - 1}}{2\sqrt{m^2 - 1}},$$

La courbe de variations de la tension u est donnée figure 38. Lorsque t tend vers l'infini, a_1 et a_2 étant négatifs, u tend vers E.

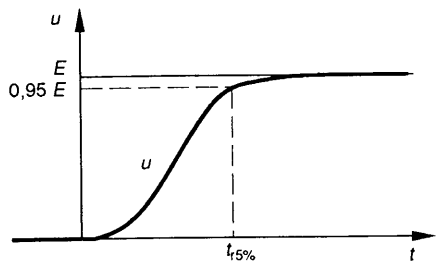


Fig. 38.

La pente de la tangente à l'origine est :

$$\frac{du}{dt}(0+) = \frac{i(0+)}{C} = \frac{i(0-)}{C} = 0.$$

– ***Cas particulier m ⩾ 1***

$$A_1 = -E\,\frac{m + \sqrt{m^2 - 1}}{2\sqrt{m^2 - 1}} \approx -E,$$

$$A_2 = E\,\frac{m - m\sqrt{1 - 1/m^2}}{2\sqrt{m^2 - 1}} \approx \frac{E}{4m^2},$$

$$a_1 = -m\omega_0 + \omega_0 m\sqrt{1 - 1/m^2} \approx -\frac{\omega_0}{2m},$$

$$a_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1} \approx -2m\omega_0,$$

m étant supposé grand par rapport à 1, $|A_1|$ est infiniment grand par rapport à $|A_2|$,
$|a_1|$ est infiniment petit par rapport à $|a_2|$.
Le terme $A_2\,e^{a_2 t}$ devient donc très rapidement négligeable par rapport au terme $A_1\,e^{a_1 t}$ et la tension u se rapproche très rapidement de $\boldsymbol{u = E - E\,e^{-\frac{\omega_0}{2m}t}}$.
On est alors en présence d'un ***mode dominant.***

– ***Temps de réponse à 5 % dans le cas où m ⩾ 1***

De l'expression $u = E - E\,e^{-\frac{\omega_0}{2m}t}$, on tire $e^{-\frac{\omega_0}{2m}t_{r5\%}} = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20}$, soit

$$t_{r5\%} = \frac{2m}{\omega_0}\ln 20 = 3 \times \frac{2m}{\omega_0},$$

soit

$$\boxed{\frac{t_{r5\%}}{\dfrac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{3m}{\pi}}$$

La courbe donnant les variations de $\dfrac{t_{r5\%}}{\dfrac{2\pi}{\omega_0}}$ en fonction de m est donnée figure 41 en échelle ln-ln.

• *b)* ***m < 1 :*** La solution de l'équation sans second membre se met sous la forme :

$$u = A_0\,e^{-m\omega_0 t}\cos(\omega t + \varphi)$$

avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - m^2}$.

Ce qui donne pour la solution générale l'équation :

$$\boldsymbol{u = E + A_0\,e^{-m\omega_0 t}\cos(\omega t + \varphi).}$$

Les conditions initiales conduisent au système :

$$u(0+) = u(0-) = 0 = E + A_0\cos\varphi$$

$$i(0+) = i(0-) = C\frac{du}{dt}(0+) = 0$$

$$= A_0[-m\omega_0\cos\varphi - \omega\sin\varphi].$$

soit

$$\begin{cases} \tan\varphi = -\dfrac{m\omega_0}{\omega} = -\dfrac{m}{\sqrt{1 - m^2}}, \\ A_0 = -\dfrac{E}{\cos\varphi} = -\dfrac{E}{\sqrt{1 - m^2}}. \end{cases}$$

La courbe des variations de la tension u est donnée sur la figure 39.
La pente de la tangente à l'origine est :

$$\frac{du}{dt}(0+) = \frac{i(0+)}{C} = \frac{i(0-)}{C} = 0.$$

Au cours du temps, la tension u passe au-dessus de la valeur finale E.

On définit le *dépassement d* par :

$$\boldsymbol{d = \frac{U_{max} - E}{E}.}$$

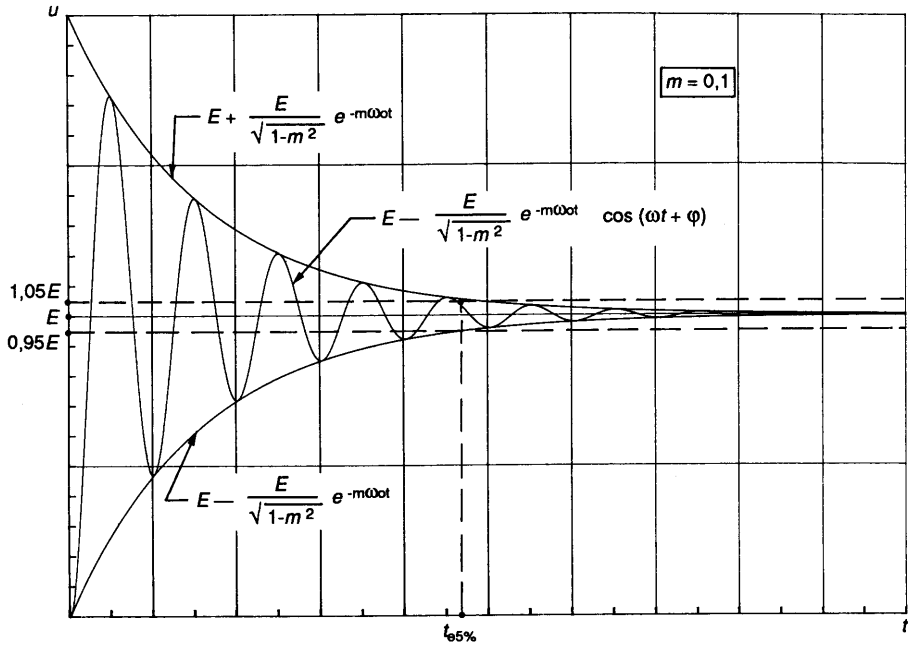


Fig. 39.

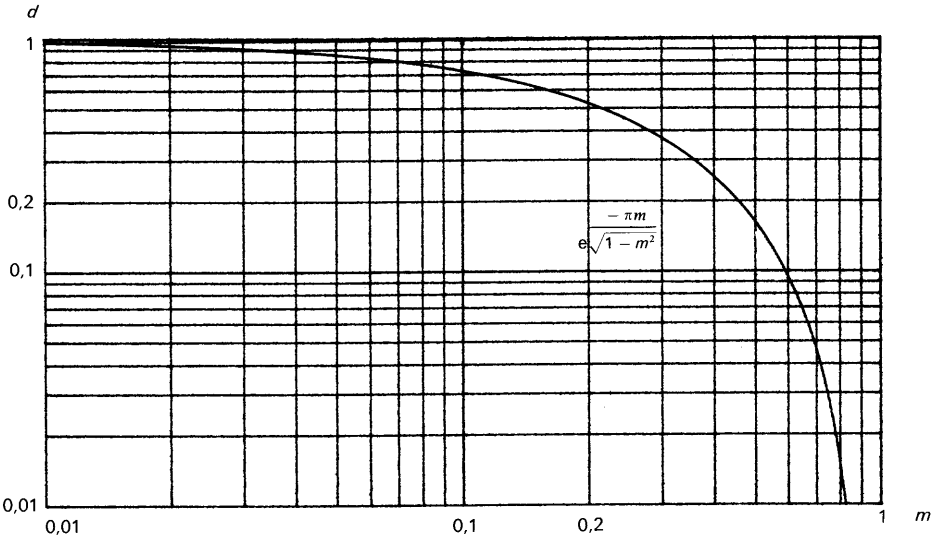


Fig. 40.

— ***Calcul du dépassement***

u est extrêmum lorsque

$$\frac{du}{dt} = \frac{E}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t}$$

$$[m\omega_0 \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi)] = 0$$

c'est-à-dire pour

$$\tan(\omega t + \varphi) = -\frac{m\omega_0}{\omega} = \tan \varphi,$$

soit $\omega t = k\pi$.

Le premier maximum se produit pour $t = \frac{\pi}{\omega}$ soit

$$U_{max} = E - \frac{E}{\cos \varphi} e^{-\frac{m\omega_0 \pi}{\omega}} \cos(\pi + \varphi)$$

soit $U_{max} = E + E\, e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$. Ce qui conduit à :

$$\boxed{d = e^{\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}}$$

La courbe donnant les variations de d en fonction de m en échelles ln-ln, est donnée figure 40.

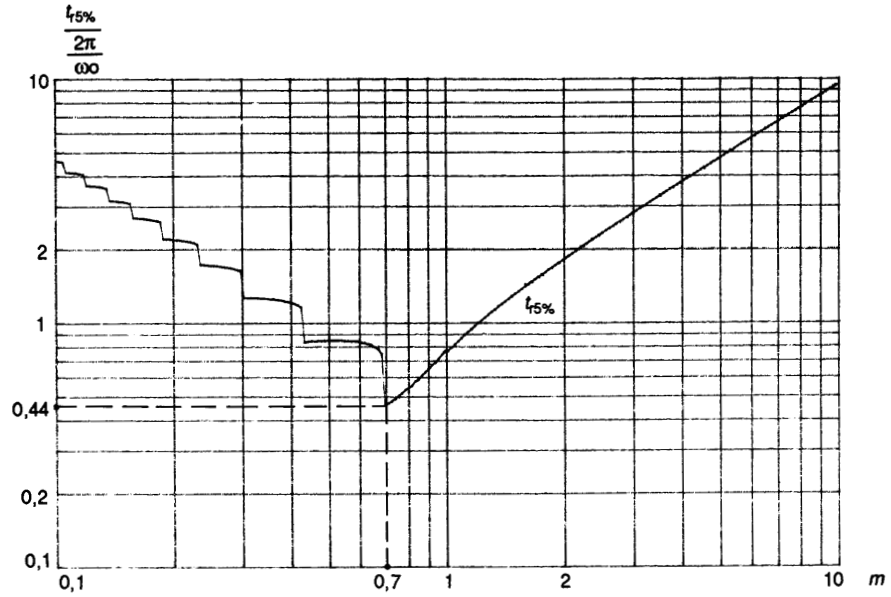


Fig. 41.

— ***Temps de réponse à 5 %***

Le temps de réponse à 5 % est le temps au bout duquel la tension u reste comprise entre les deux horizontales d'ordonnées 1,05 E et 0,95 E.

Le tracé point par point montre que $t_{r5\%}$ est *minimal* pour $m = 0{,}7$. Sa valeur est alors

$$t_{r5\%\min} = 0{,}44\,\frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Ce qui correspond, pour u, à la courbe de variations de la figure 42.

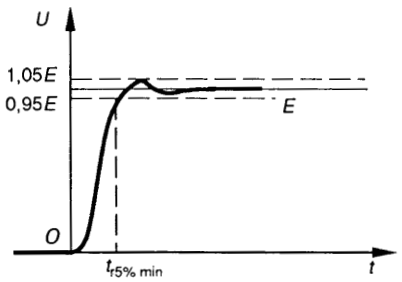


Fig. 42.

Lorsque t tend vers l'infini, $e^{-m\omega_0 t}$ tend vers zéro, et u tend vers E.

La courbe donnant les variations de $\dfrac{t_{r5\%}}{2\pi/\omega_0}$ en fonction de m en échelles ln-ln est donnée figure 41.

Dans le cas où m est très petit par rapport à 1, $\dfrac{E}{\sqrt{1-m^2}}$ est très voisin de E, les oscillations sont très importantes et l'on peut assimiler le temps de réponse à 5 % au temps au bout duquel l'exponentielle

$$E - \frac{E}{\sqrt{1-m^2}}\,e^{-m\omega_0 t} \approx E[1 - e^{-m\omega_0 t}]$$

coupe l'horizontale 0,95 E, soit

$$e^{-m\omega_0 t_{r5\%}} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20},$$

soit

$$t_{r5\%} = \frac{3}{m\omega_0}:$$

$$\boxed{\frac{t_{r5\%}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{3}{2\pi m}.}$$

Nous retiendrons les résultats suivants qui nous seront utiles, en particulier pour l'étude des asservissements linéaires :

Réponse indicielle du système régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = H\omega_0^2$$

où H est une constante.

— Pour t tendant vers l'infini x tend vers H : l'erreur **statique** est nulle.

— Pour $m > 1$ la réponse est exponentielle et le dépassement est nul.

— Pour $m < 1$ la réponse est sinusoïdale amortie et le dépassement est donné par

$$e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$$

— Le temps de réponse à 5 % est minimal pour $m = 0{,}7$ et vaut $t_{r5\%\min} = 0{,}44\,\dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

6.4. APPLICATION : ANNULATION DE LA SURTENSION AUX BORNES D'UN CIRCUIT INDUCTIF

Nous avons vu au paragraphe 5.3 que, lorsqu'on ouvre l'interrupteur K du schéma donné à la figure 28 il apparaît une forte surtension aux bornes du circuit inductif.

Pour annuler cette surtension, on place aux bornes du circuit inductif R, L, un élément qui s'oppose à la variation brutale de la tension à ses bornes, c'est-à-dire une capacité. On obtient ainsi le schéma de la figure 43.

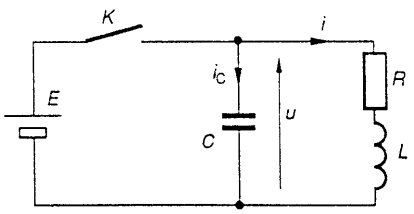


Fig. 43.

A l'instant $t = 0$, le courant i étant établi à $\frac{E}{R}$ et u étant égal à E, on ouvre K. Des équations générales :

$$\begin{cases} u = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ i_C = -i \\ i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

on tire $$u + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = 0,$$

soit $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

avec $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

• Pour $m > 1$ c'est-à-dire $C > \frac{4L}{R^2}$ la loi de variations de u est exponentielle (*fig.* 44) et la tension u revient vers zéro sans devenir négative.

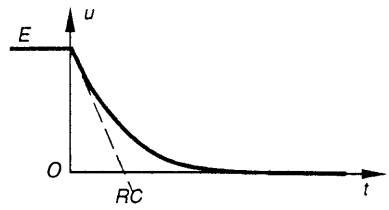


Fig. 44.

La pente de la tangente à l'origine est

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0+) = -\frac{i(0+)}{C} = -\frac{i(0-)}{C} = -\frac{E}{RC}.$$

• Pour $m < 1$, $\left(C < \frac{4L}{R^2}\right)$, la réponse est sinusoïdale amortie, de la forme

$$u = A\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}\cos(\omega t + \varphi).$$

Les conditions initiales conduisent à :

$$\begin{cases} u(0+) = u(0-) = E = A\cos\varphi \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0+) = \dfrac{-i(0+)}{C} = -\dfrac{i(0-)}{C} = -\dfrac{E}{RC} \\ \qquad\qquad = A[-m\omega_0\cos\varphi - \omega\sin\varphi], \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \tan\varphi = \dfrac{1}{\omega}\left[\dfrac{1}{RC} - m\omega_0\right] = \dfrac{1}{\omega}\left[\dfrac{1}{RC} - \dfrac{R}{2L}\right] \\ A = \dfrac{E}{\cos\varphi}. \end{cases}$$

Pour $\frac{1}{RC} = \frac{R}{2L}$, soit $C = \frac{2L}{R^2}$, φ est nul et la tension u varie suivant la loi

$$u = E\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}\cos\omega t.$$

Comme $\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$ et $|\cos\omega t|$ sont inférieurs à 1, $|u|$ restera inférieur à E ce qui élimine la surtension.

6.5. RÉGIME TRANSITOIRE RÉGIME PERMANENT

Nous avons vu que la solution de l'équation différentielle du deuxième ordre se compose de :

– la solution de l'équation sans second membre, qui dépend des conditions initiales et qui disparaît au cours du temps qu'elle soit exponentielle ou sinusoïdale amortie; comme pour l'équation différentielle du premier ordre, elle constitue ***le régime transitoire***;

– la solution particulière, indépendante des conditions initiales et qui persiste après disparition de la solution de l'équation sans second membre représente ***le régime permanent.***

EXERCICES

1. Le schéma de principe d'un convertisseur numérique-analogique est donné figure 1.

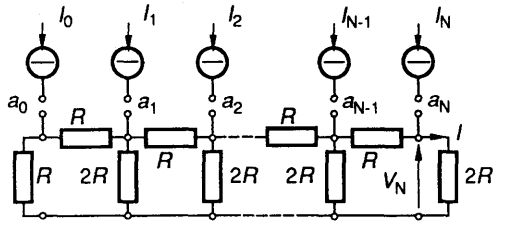


Fig. 1.

Les sources sont indépendantes et les courants ne dépendent pas des potentiels des nœuds 0, 1, 2, ..., N.
On a alors :

$$V_N = k_0 I_0 + k_1 I_1 + k_2 I_2 + \ldots + k_N I_N$$

où k_1, k_2, ..., k_N sont des coefficients ne dépendant que des résistances du réseau.

1° On ferme le seul interrupteur a_n (*fig.* 2). Montrer que pour le calcul des courants et tensions dans le dipôle B, on peut remplacer le dipôle A par un dipôle équivalent (source de Norton), constitué par une source de courant en parallèle sur une résistance dont on calculera les valeurs en fonction de I_n et R.

2° Le seul interrupteur fermé étant toujours a_n, recommencer ce calcul de dipôle équivalent en incluant successivement à A les nœuds $(n+1)$, $(n+2)$, ..., (N); en déduire V_N en fonction de I_n, n et N.

3° Pour exprimer la tension V_N en fonction de l'état des interrupteurs, on convient de représenter les sources de courants aux nœuds par la notation : $a_0 I_0$, $a_1 I_1$, $a_2 I_2$, ..., $a_N I_N$ (a_i ayant la valeur 0 ou 1 suivant que l'interrupteur a_i est ouvert ou fermé).
Montrer que l'application du théorème de superposition permet d'exprimer V_N en fonction de $(I_0, I_1, I_2, \ldots, I_n)$.
Montrer que si tous les courants sont égaux à une valeur unique I_R on peut alors écrire :

$$V_N = K(a_0 2^0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 + \ldots + a_N 2^N)$$

K étant un paramètre que l'on déterminera.

4° On s'intéresse au courant I dans la dernière résistance $2R$ du réseau. Donner l'expression de I en fonction de I_R et des variables binaires a_0, a_1, ..., a_N.

5° On veut obtenir 251 valeurs différentes du courant I (en comptant la valeur nulle).
Combien de générateurs de courant doit-on utiliser (valeur numérique de $N+1$). Dans quels états sont les interrupteurs a_0 à a_N pour la valeur la plus élevée de I?

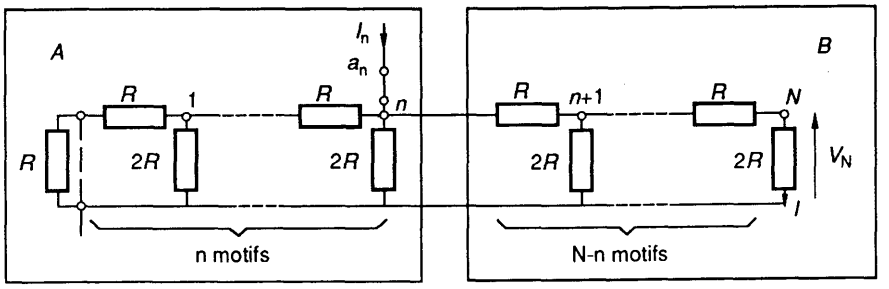
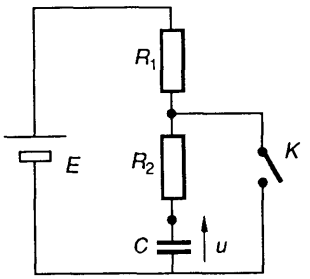


Fig. 2.

2. Soit le dispositif ci-dessous.



1° A l'instant $t = 0$, la tension u étant égale à $u(0-) = \frac{E}{3}$, on ouvre l'interrupteur K.

a) Établir l'équation différentielle régissant les variations de la tension u.

b) Intégrer cette équation compte tenu des conditions initiales.

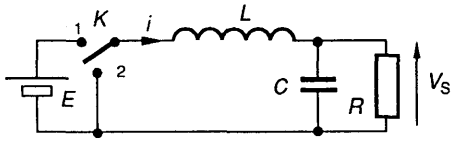
c) Calculer, en fonction de R_1, R_2 et C, l'instant t_1, pour lequel $u = \frac{2E}{3}$.

2° A l'instant $t' = 0$, la tension u étant égale à $u(0-) = \frac{2E}{3}$, on ferme l'interrupteur K.

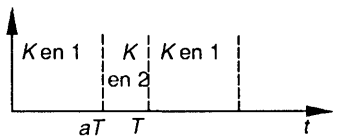
a) Établir l'équation différentielle régissant les variations de la tension u.
b) Intégrer cette équation compte tenu des conditions initiales.
c) Calculer, en fonction de R_1, R_2 et C, l'instant t'_1 au bout duquel la tension u est égale à $\frac{E}{3}$.

3° Un dispositif électronique ouvre l'interrupteur lorsque la tension u devient inférieure à $\frac{E}{3}$ et le ferme lorsqu'elle devient supérieure à $\frac{2E}{3}$.
a) Tracer l'évolution de la tension $u(t)$.
b) Quelle est la période de $u(t)$.

3. Soit le schéma ci-dessous.



Le condensateur est supposé suffisamment grand pour que la tension à ses bornes V_s *soit constante.*
L'interrupteur K est alternativement basculé sur la position 1 et sur la position 2, suivant le chronogramme ci-dessous :
pour $0 < t < aT$, K est en 1,
pour $aT < t < T$, K est en 2.



1° K étant en position 1, établir l'équation différentielle du courant i en fonction de E, V_S et L.

2° Sachant qu'à l'instant $t = 0$, $i = I_0$, résoudre cette équation et établir la loi de variations $i(t)$ en fonction de V_S, L, E et I_0.

3° Calculer la valeur I_{max} de i pour $t = aT$.

4° A l'instant $t = aT$, K est basculé en position 2.
Établir la nouvelle équation différentielle du courant i.

5° Résoudre cette équation et déterminer la loi de variations de $i(t)$, pour $aT < t < T$, en fonction de a, T, V_S, E et I_0.

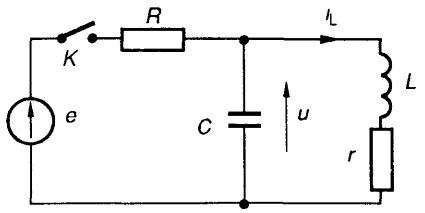
6° Sachant qu'à l'instant $t = T$, $i = I_0$, calculer V_s en fonction de a et E.

7° La valeur moyenne du courant dans le condensateur étant nulle, calculer $I_0 + I_{max}$ en fonction de a, E et R.

8° En utilisant les questions 7° et 3°, calculer I_0, en fonction de a, E, R, L et T.

9° On s'impose que le courant I_0 ne puisse pas devenir négatif.
Déterminer la valeur maximale de R en fonction de L, a, T.

4. Le circuit de déviation magnétique d'un tube cathodique radar (d'inductance L, et de résistance r) est attaqué par un générateur de tension e comme l'indique le montage.



A l'instant $t = 0$, $u(0_-) = 0$, $i_L(0_-) = 0$, on ferme K.

1° Montrer que $\frac{di_L}{dt\ (0_+)} = 0$.

2° Établir l'équation différentielle donnant i_L en fonction des éléments du circuit. On donne $rC \ll \frac{L}{R}$ et $r \ll R$.
Simplifier cette équation et la mettre sous la forme :

$$\frac{\omega_0^2 e}{R} = \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2m\ \omega_0 \frac{d_{i_L}}{dt} + \omega_0^2 i_L$$

Exprimer m et ω_0 en fonction de R, L et C.

3° Donner la relation entre R, L et C pour que la solution de l'équation sans second membre soit celle de l'amortissement critique :

$$i_L = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

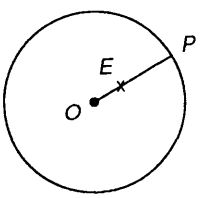
Cette condition est supposée satisfaite pour la suite du problème.

4° La tension délivrée par le générateur est de la forme $e = at + b$.
a) Intégrer l'équation du 2°. (On cherchera la solution particulière sous la forme $ut + v$.)
b) Établir la relation entre a, b, L, R et C pour que la solution finale soit du type :

$$i_L = Dt[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}].$$

Préciser les valeurs de D et τ. Tracer les variations de $i_L(t)$.

5° On donne $L = 45$ mH, $r = 25\ \Omega$. On admet $e^{-\frac{t}{\tau}} \ll 1$ dès que $t > 5\tau$.
L'émission de l'onde RADAR et le départ du spot sont simultanées. Le spot se déplace de O en P proportionnellement à i_L. L'onde RADAR se déplace à la vitesse de la lumière $3 \cdot 10^8$ m . s^{-1}. L'écho E apparaît comme un point brillant sur le rayon OP.



Montrer que la mesure de OP n'est proportionnelle à la distance de l'objectif qu'à partir d'une certaine distance d. Calculer C pour avoir $d = 2\,250$ mètres. En déduire R. Vérifier que les approximations du 2° sont justifiées.

2 signaux sinusoïdaux

1. PRÉAMBULE

Nous avons vu qu'un signal sinusoïdal est de la forme

$$a = A_M \cos(\omega t + \varphi)$$

dans laquelle A_M est la valeur maximale, $A = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$ est la valeur efficace, ω est la pulsation, φ est la phase à l'origine.

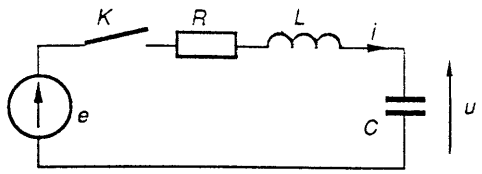


Fig. 1.

Proposons-nous, à titre d'exemple, de déterminer la tension u sur le schéma de la figure 1, dans lequel

$$e = E_M \cos(\omega t + \theta).$$

L'évolution de la tension u est régie par l'équation différentielle :

$$\omega_0^2 e = \omega_0^2 u + 2m\omega_0 \frac{du}{dt} + \frac{d^2u}{dt^2}$$
$$= \omega_0^2 E_M \cos(\omega t + \theta).$$

La solution se compose de :

- la solution de l'équation sans second membre que nous avons étudiée au chapitre 1. Elle représente le régime transitoire et disparaît au cours du temps;
- la solution particulière qui dépend du second membre, donc de la forme du signal.

Nous exposerons, dans ce chapitre, deux méthodes permettant de déterminer la solution particulière des équations différentielles dont le second membre est sinusoïdal.

Sachant que cette solution se met sous la forme $A_M \cos(\omega t + \varphi)$, dans laquelle ω est imposée par le signal, il faut déterminer *deux inconnues* A_M *et* φ. Pour cela nous utiliserons des *outils mathématiques* qui transportent *deux informations.* Ce seront :

– les vecteurs d'un plan; ils sont caractérisés par deux grandeurs :

$$\begin{cases} \text{composante horizontale} \\ \text{composante verticale} \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} \text{module} \\ \text{angle avec un axe orienté} \end{cases}$$

– les nombres complexes; ils sont caractérisés par les deux grandeurs :

$$\begin{cases} \text{partie réelle} \\ \text{partie imaginaire} \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} \text{module} \\ \text{argument} \end{cases}$$

2. VECTEURS DE FRESNEL

Remarquons (*fig.* 2) que l'expression d'une grandeur sinusoïdale

$$a = A_M \cos(\omega t + \varphi)$$

correspond à la projection, sur un axe Ox, d'un vecteur $\vec{A}$, de module A_M, qui fait avec l'axe Ox l'angle $\omega t + \varphi$.

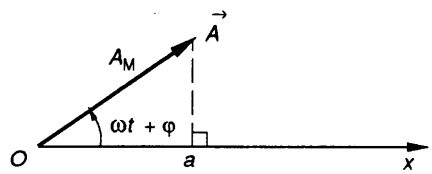


Fig. 2.

En figeant le diagramme de la figure 2 à l'instant $t = 0$, nous conviendrons d'associer à toute grandeur sinusoïdale $a = A_M \cos(\omega t + \varphi)$ un vecteur $\vec{A}$, de module A_M, faisant un angle φ avec un axe Ox. Cette correspondance est schématisée sur la figure 3 :

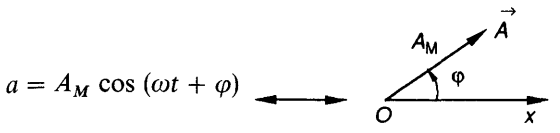


Fig. 3.

On réalise ainsi une application de l'ensemble des grandeurs sinusoïdales dans l'ensemble des vecteurs d'un plan. Ces vecteurs sont appelés vecteurs de Fresnel et le plan correspondant, plan de Fresnel.

REMARQUES

La définition que nous avons choisie pour cette application n'est pas la seule possible :

- *on peut choisir pour la longueur du vecteur associé, la valeur efficace de la grandeur sinusoïdale; les diagrammes obtenus ne diffèrent que d'une homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$;*
- *on peut aussi prendre l'application correspondant à la figure 2; la définition que nous avons choisie permet de nous affranchir du terme ωt, commun à toutes les grandeurs sinusoïdales du circuit.*

Passons en revue les opérations effectuées, sur le signal, par les composants passifs, ceci afin de déterminer les opérations correspondantes dans l'ensemble des vecteurs associés. Il s'agit de :

- l'opération somme comme, par exemple, la loi des nœuds : $i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$;
- l'opération multiplication par un nombre comme la loi d'ohm : $u = Ri$;
- l'opération dérivation, par exemple : $i = C\dfrac{du}{dt}$;
- l'opération intégration, par exemple : $i = \dfrac{1}{L}\int u\,dt$.

2.1. OPÉRATION SOMME

Soient deux grandeurs sinusoïdales

$$a_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

et

$$a_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

auxquelles sont associés, respectivement les vecteurs $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$.

Proposons-nous de déterminer le vecteur associé à la somme $a = a_1 + a_2$:

$$\begin{aligned} a &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= A_1 \cos\omega t \cos\varphi_1 - A_1 \sin\omega t \sin\varphi_1 \\ &\qquad + A_2 \cos\omega t \cos\varphi_2 - A_2 \sin\omega t \sin\varphi_2 \\ &= \cos\omega t[A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2] \\ &\qquad - \sin\omega t[A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2] \\ &= [A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2] \\ &\qquad [\cos\omega t - \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \sin\omega t] \end{aligned}$$

ou en posant

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2},$$

avec $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}{\cos\varphi} \\ &\qquad [\cos\omega t \cos\varphi - \sin\omega t \sin\varphi] \\ &= \frac{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}{\cos\varphi} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{A}$ associé à la somme $a = a_1 + a_2$ fait donc, avec l'axe orienté Ox, l'angle φ tel que

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2},$$

et son module est A_M tel que

$$A_M \cos\varphi = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2.$$

Traçons, dans le plan de Fresnel, le vecteur $\vec{A'}$ obtenu en faisant la somme vectorielle des vecteurs $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$ (*fig.* 4).

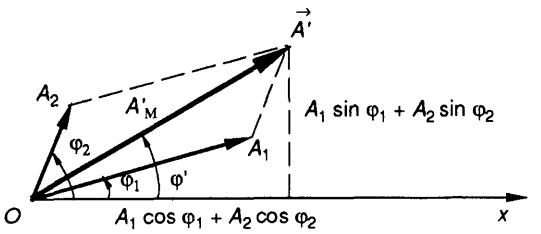


Fig. 4.

La projection, sur un axe quelconque, de la somme de deux vecteurs étant égale à la somme des projections, on peut écrire :

$$\begin{cases} A'_M \cos\varphi' = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 \\ \tan\varphi' = \dfrac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \end{cases}$$

avec $\varphi_1 < \varphi' < \varphi_2$,

ce qui permet de conclure que le vecteur $\vec{A}$ est identique au vecteur $\vec{A'}$.

L'opération somme dans l'ensemble des grandeurs sinusoïdales se traduit par l'opération somme vectorielle dans l'ensemble des vecteurs de Fresnel.

2.2. OPÉRATION MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE

Soit une grandeur sinusoïdale

$$a = A_M \cos(\omega t + \varphi)$$

à laquelle est associé le vecteur $\vec{A}$. A la grandeur sinusoïdale $ka = kA_M \cos(\omega t + \varphi)$ est associé le vecteur de module kA_M et d'argument φ, c'est-à-dire le vecteur $\overrightarrow{kA}$ (*fig.* 5).

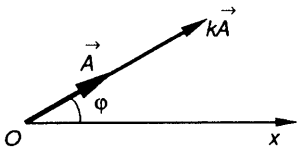


Fig. 5.

L'opération multiplication par un nombre dans l'ensemble des grandeurs sinusoïdales, se traduit par l'opération multiplication par un nombre dans l'ensemble des vecteurs de Fresnel.

2.3. OPÉRATION DÉRIVATION

Soit une grandeur sinusoïdale

$$a = A_M \cos(\omega t + \varphi)$$

à laquelle est associé le vecteur $\vec{A}$. Déterminons le vecteur associé à la grandeur $\frac{da}{dt}$:

$$\frac{da}{dt} = -A_M \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= A_M \omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Le vecteur $\vec{A}_d$ associé à $\frac{da}{dt}$ a pour module $\omega \cdot A_M$ et fait avec l'axe Ox l'angle $\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ (*fig.* 6).

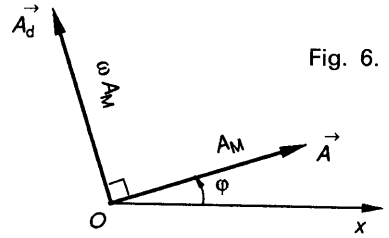


Fig. 6.

L'opération dérivation dans l'ensemble des grandeurs sinusoïdales se traduit, dans l'ensemble des vecteurs de Fresnel, par une multiplication du module par ω et par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$.

2.4. OPÉRATION INTÉGRATION

Soit une grandeur sinusoïdale

$$a = A_M \cos(\omega t + \varphi)$$

à laquelle est associé le vecteur $\vec{A}$. Déterminons le vecteur associé à $\int a\,dt$:

$$\int a\,dt = \frac{A_M}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{A_M}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Le vecteur $\vec{A}_i$ associé à $\int a\,dt$ a pour module $\frac{A_M}{\omega}$ et fait avec l'axe Ox l'angle $\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ (*fig.* 7).

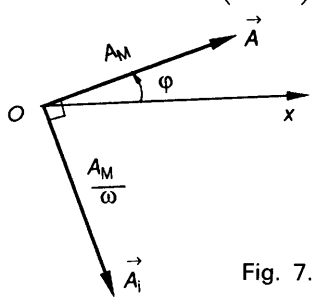


Fig. 7.

L'opération intégration dans l'ensemble des grandeurs sinusoïdales se traduit dans l'ensemble des vecteurs de Fresnel par une division du module par ω et par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$.

2.5. APPLICATION À LA RÉSOLUTION DU PROBLÈME DU PARAGRAPHE I

La traduction dans le plan de Fresnel de l'équation :

$$\omega_0^2 e = \omega_0^2 u + 2m\omega_0 \frac{du}{dt} + \frac{d^2u}{dt^2}$$

est décrite par la figure 8.

On en déduit que u est en retard sur e d'un angle $\varphi = \arctan \dfrac{2m\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$ et que sa valeur maximale U_M est telle que

$$\omega_0^4 E_M^2 = U_M^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4m^2\omega^2\omega_0^2].$$

u s'écrit donc :

$$u = \frac{\omega_0^2 E_M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4m^2\omega^2\omega_0^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{2m\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

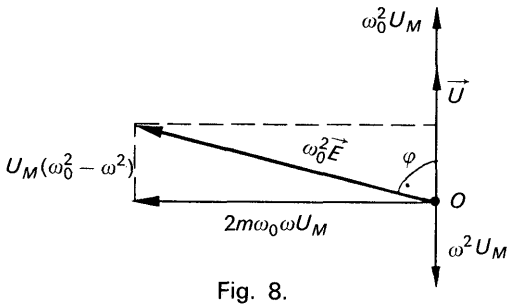


Fig. 8.

3. NOMBRES COMPLEXES

Considérons le diagramme vectoriel de la figure 3 et complétons-le par un axe vertical. Nous obtenons alors le plan de la figure 9 que nous pouvons identifier au plan complexe.

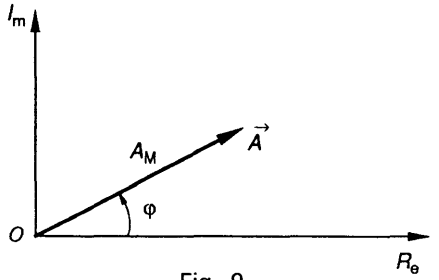


Fig. 9.

Sachant que tout vecteur $\vec{A}$ du plan complexe est l'image d'un nombre complexe $\underline{A}$, on associe ainsi à toute grandeur sinusoïdale

$$a = A_M \cos(\omega t + \varphi)$$

un nombre complexe $\underline{A}$ dont le module est égal à A_M et dont l'argument est égal à φ, c'est-à-dire

$$\underline{A} = A_M[\cos\varphi + j \sin\varphi] = A_M e^{j\varphi}.$$

On réalise ainsi une application de l'ensemble des grandeurs sinusoïdales dans l'ensemble des nombres complexes :

$$a = A_M \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \underline{A} = A_M e^{j\varphi}.$$

Déterminons, dans l'ensemble des nombres complexes, les opérations correspondant à celles effectuées dans l'ensemble des grandeurs sinusoïdales.

3.1. OPÉRATION SOMME

Soient deux nombres complexes $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ et leurs vecteurs images, respectivement $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$. Le vecteur image de $\underline{A}_1 + \underline{A}_2$ étant $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$, on peut en conclure que l'opération somme dans l'ensemble des grandeurs sinusoïdales se traduit par l'opération somme dans l'ensemble des nombres complexes.

3.2. OPÉRATION MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE

Si le vecteur $\vec{A}$ est l'image du nombre complexe $\underline{A}$, l'image du nombre complexe $k\underline{A}$ est le vecteur $k\vec{A}$. On peut en conclure que l'opération multiplication par un nombre dans l'ensemble des grandeurs sinusoïdales se traduit par l'opération multiplication par un nombre dans l'ensemble des nombres complexes.

3.3. OPÉRATION DÉRIVATION

Si le vecteur $\vec{A}$ est l'image du nombre complexe $\underline{A}$, le vecteur obtenu à partir de $\vec{A}$ par rotation de $+\dfrac{\pi}{2}$ est l'image du nombre complexe $j\underline{A}$.

L'opération dérivation dans l'ensemble des grandeurs sinusoïdales, se traduisant, dans l'ensemble des vecteurs par une multiplication par ω et une rotation de $+\frac{\pi}{2}$, correspond dans l'ensemble des nombres complexes à **une multiplication par jω.**

3.4. OPÉRATION INTÉGRATION

Le même raisonnement nous permet de conclure que l'opération intégration, dans l'ensemble des grandeurs sinusoïdales, se traduit dans l'ensemble des nombres complexes par une **division par jω.**

3.5. APPLICATION À LA RÉSOLUTION DU PROBLÈME DU PARAGRAPHE 1

L'équation $\omega_0^2 e = \omega_0^2 u + 2m\omega_0 \frac{du}{dt} + \frac{d^2u}{dt^2}$ se traduit dans le plan complexe par

$$\omega_0^2 \underline{E} = \underline{U}[\omega_0^2 + 2j\omega m\omega_0 + (j\omega)^2]$$

où $\underline{E}$ et $\underline{U}$ sont les nombres complexes associés respectivement à e et u.

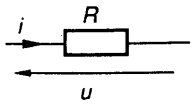
Soit $\underline{U} = \frac{\omega_0^2 \underline{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2jm\omega_0\omega}$, le module U_M de $\underline{U}$ est $\frac{\omega_0^2 E_M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4m^2\omega_0^2\omega^2}}$, son argument est $-\arctan \frac{2m\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$; u s'écrit donc

$$u = \frac{\omega_0^2 E_M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4m^2\omega_0^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{2m\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

4. IMPÉDANCE COMPLEXE

Traduisons, dans le plan de Fresnel et dans l'ensemble des nombres complexes les relations imposées par les caractéristiques des éléments passifs.

4.1. RÉSISTANCE *R*



L'équation $u = Ri$ se traduit dans le plan de Fresnel par le schéma de la figure 10 et dans le plan complexe par :

$$\underline{U} = R\underline{I}$$

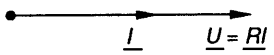
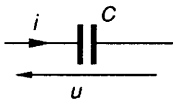


Fig. 10.

4.2. CAPACITÉ *C*



L'équation $i = C\frac{du}{dt}$ se traduit dans le plan de Fresnel par le schéma de la figure 11 et dans le plan complexe par : $\underline{I} = jC\omega\underline{U}$.

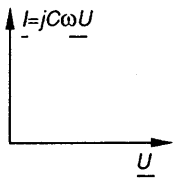
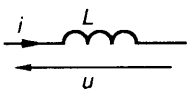


Fig. 11.

4.3. INDUCTANCE *L*



L'équation $u = L\frac{di}{dt}$ se traduit dans le plan de Fresnel par le schéma de la figure 12 et dans le plan complexe par : $\underline{U} = jL\omega\underline{I}$.

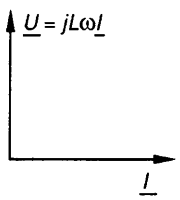


Fig. 12.

4.4. IMPÉDANCE COMPLEXE

D'une manière générale, nous appellerons impédance complexe d'un élément passif le rapport entre les nombres complexes associés à la tension aux bornes et au courant qui le traverse :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}.$$

L'inverse de l'impédance $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ est l'admittance du composant soit :

- pour une résistance $\underline{Z} = R$, $\underline{Y} = \frac{1}{R}$,
- pour un condensateur $\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}$, $\underline{Y} = \mathrm{j}C\omega$,
- pour une inductance $\underline{Z} = \mathrm{j}L\omega$, $\underline{Y} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}$.

5. LOIS DES RÉSEAUX LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL PERMANENT

La relation $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$ en régime sinusoïdal permanent, est identique à la relation $u = Ri$ des réseaux résistifs, relation à partir de laquelle ont été démontrés un certain nombre de théorèmes. En conséquence, tous les théorèmes démontrés au paragraphe 3 du chapitre précédent, sont valables en régime sinusoïdal permanent, à condition de raisonner dans l'ensemble des nombres complexes associés.

6. CIRCUIT ASSOCIANT RÉSISTANCE ET CAPACITÉ

Soit le circuit schématisé sur la figure 13, avec $u = U_M \cos(\omega t + \theta)$. On peut écrire, entre les nombres complexes $\underline{U}$ et $\underline{I}$, la relation

$$\underline{U} = \left(R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\underline{I}$$

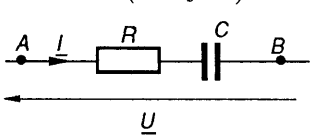


Fig. 13.

qui se traduit dans le plan de Fresnel par le diagramme de la figure 14.

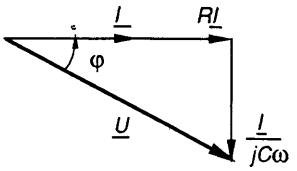


Fig. 14.

On en déduit que i a pour valeur maximum $I_M = \dfrac{U_M}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}}$ et qu'il est en avance sur u de $\varphi = \arctan \dfrac{1}{RC\omega}$.

Son expression est donc

$$i = \frac{U_M}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}} \cos\left(\omega t + \theta + \arctan \frac{1}{RC\omega}\right).$$

6.1. CIRCUIT *RC* PARALLÈLE ÉQUIVALENT

On peut donner, du schéma de la figure 13, le schéma équivalent de la figure 15. Les éléments R' et C' sont calculés en fonction de R et C de telle sorte que les circuits des figures 13 et 15 présentent la même impédance entre les points A et B.

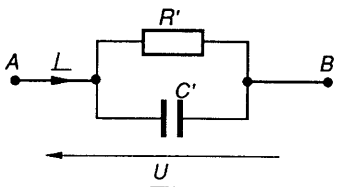


Fig. 15.

$$R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} = \frac{1}{\dfrac{1}{R'} + \mathrm{j}C'\omega}$$

ou $\dfrac{1}{R'} + \mathrm{j}C'\omega = \dfrac{1}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}$

$$= \frac{\mathrm{j}C\omega}{1 + \mathrm{j}RC\omega} = \frac{\mathrm{j}C\omega(1 - \mathrm{j}RC\omega)}{1 + R^2C^2\omega^2}.$$

En égalant parties réelles et imaginaires, il vient :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R'} = \dfrac{RC^2\omega^2}{1+R^2C^2\omega^2}, \\ C'\omega = \dfrac{C\omega}{1+R^2C^2\omega^2} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} R' = R\left[1+\dfrac{1}{R^2C^2\omega^2}\right], \\ C' = C\left[\dfrac{\dfrac{1}{R^2C^2\omega^2}}{1+\dfrac{1}{R^2C^2\omega^2}}\right]. \end{cases}$$

On pose $\boldsymbol{Q = \dfrac{1}{RC\omega}}$: facteur de qualité du circuit R-C série. Il vient alors :

$$\boldsymbol{R' = R[1+Q^2]}, \qquad \boldsymbol{C' = C\dfrac{Q^2}{1+Q^2}}.$$

Par combinaison des formules précédentes, on peut exprimer Q en fonction de R' et C' soit :

$$Q = \frac{1}{RC\omega} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1+Q^2}{R'}\cdot\frac{Q^2}{C'(1+Q^2)} = \frac{Q^2}{R'C'\omega}$$

$$\boldsymbol{Q = R'C'\omega = \dfrac{1}{RC\omega}}.$$

Condensateur réel : on peut donner, pour un condensateur, le schéma équivalent de la figure 15, dans lequel la résistance R' traduit les phénomènes parasites suivants :

- résistance de fuite de l'isolant,
- pertes par hystérésis diélectrique.

Dans le cas d'un condensateur de bonne qualité, Q est très grand par rapport à 1, et on peut écrire les formules approchées : $\begin{cases} C' \approx C \\ R' \approx Q^2R \end{cases}$.

On définit aussi, pour un condensateur, l'angle de perte δ par

$$\tan\delta = \frac{1}{Q} = RC\omega = \frac{1}{R'C'\omega},$$

δ est relié à φ par $\tan\delta = RC\omega = \dfrac{1}{\tan\varphi}$, soit

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Pour un condensateur parfait le courant est en avance de $\dfrac{\pi}{2}$ sur la tension à ses bornes.

Pour un condensateur réel cet angle est égal à $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \delta$, ce qui justifie la dénomination d'angle de pertes.

6.2. CIRCUIT PASSE-BAS DU PREMIER ORDRE

Redessinons le schéma de la figure 13 sous la forme donnée à la figure 16 et déterminons le rapport $\underline{T} = \dfrac{\underline{V}}{\underline{U}}$, appelé fonction de transfert :

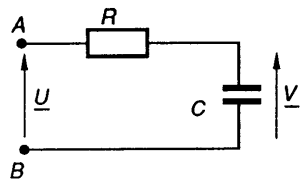


Fig. 16.

$$\underline{T} = \frac{\dfrac{1}{jC\omega}}{R+\dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1+jRC\omega} = \frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

en posant $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$.

Écrivons l'équation précédente en module et en argument :

- $T = |\underline{T}|$ est le rapport des valeurs maximales de u et de v; c'est aussi le rapport de leurs valeurs efficaces V et U, soit :

$$T = \frac{V}{U} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}},$$

- $\varphi = \arg\underline{T}$ est l'angle d'avance de la tension v sur la tension u, soit :

$$\varphi = -\arctan\frac{\omega}{\omega_0}.$$

Les représentations graphiques de T et φ en fonction de ω seront étudiées au paragraphe 9. Remarquons, d'ores et déjà, que

$$V = \frac{U}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

est d'autant plus faible que ω est plus grand. La valeur maximale est, pour $\omega = 0$, $V_{max} = U$.

On définit la bande passante par l'ensemble des pulsations telles que $V > \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$, soit :

$$\frac{U}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} > \frac{U}{\sqrt{2}}, \quad \text{soit} \quad \omega < \omega_0.$$

Le circuit de la figure 16, dont la fonction de transfert est $\underline{T} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$, est un circuit passe-bas. Sa pulsation de coupure est $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Remarquons, d'autre part, que pour des pulsations ω très grandes par rapport à ω_0, $\underline{T}$ est peu différent de $\frac{\underline{V}}{\underline{U}} = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$, soit $\underline{U} = \underline{V} j\frac{\omega}{\omega_0}$. Cette équation est la traduction dans l'ensemble des complexes de l'équation différentielle

$$u = \frac{1}{\omega_0}\frac{dv}{dt}.$$

soit en intégrant $v = \omega_0 \int u\, dt$.

La tension de sortie est donc proportionnelle à l'intégrale de la tension d'entrée.

Pour des signaux sinusoïdaux dont la pulsation est très grande par rapport à $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, le circuit de la figure 16 se comporte comme un intégrateur.

6.3. CIRCUIT PASSE-HAUT DU PREMIER ORDRE

Redessinons le schéma de la figure 13 sous la forme donnée à la figure 17.

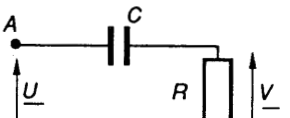


Fig. 17.

La fonction de transfert $\underline{T} = \frac{\underline{V}}{\underline{U}}$ s'écrit :

$$\underline{T} = \frac{\underline{V}}{\underline{U}} = \frac{R}{R+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Écrivons l'équation précédente en module et en argument :

• $T = |\underline{T}|$ rapport des valeurs efficaces de u et de v s'écrit :

$$T = \frac{V}{U} = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}},$$

• $\varphi = \arg \underline{T}$ est l'angle d'avance de la tension v sur la tension u :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega}{\omega_0}$$

Les représentations graphiques de T et φ en fonction de la pulsation ω seront étudiées au paragraphe 9.

Remarquons, dès à présent, que

$$V = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}U}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

est d'autant plus grande que la pulsation ω est plus élevée. Sa valeur maximale est pour ω infinie, $V_{max} = U$.

La pulsation pour laquelle

$$V = \frac{U}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{U}{\sqrt{2}}$$

est $\omega = \omega_0$.

Le circuit de la figure 17 dont la fonction de transfert est $\underline{T} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ est circuit passe-haut.

La pulsation de coupure est $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Remarquons, d'autre part, que pour des pulsations ω, très inférieures à ω_0, $\underline{T}$ est peu différent de $\underline{T} = \frac{\underline{V}}{\underline{U}} = j\frac{\omega}{\omega_0}$, soit $\underline{V} = \underline{U}\, j\frac{\omega}{\omega_0}$.

Cette équation est la traduction, dans l'ensemble des nombres complexes, de l'équation différentielle $v = \frac{1}{\omega_0}\frac{du}{dt}$. La tension de sortie est donc proportionnelle à la dérivée de la tension d'entrée.

Pour des signaux sinusoïdaux dont la pulsation ω est très petite par rapport à $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, le circuit de la figure 17 se comporte comme un dérivateur.

7. CIRCUIT ASSOCIANT RÉSISTANCE ET INDUCTANCE

Soit le circuit de la figure 18, avec

$$u = U_M \cos(\omega t + \theta).$$

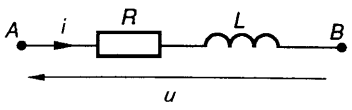


Fig. 18.

On peut écrire, entre les nombres complexes $\underline{U}$ et $\underline{I}$, la relation $\underline{U} = (R + jL\omega)\underline{I}$, qui se traduit dans le plan de Fresnel par le diagramme de la figure 19.

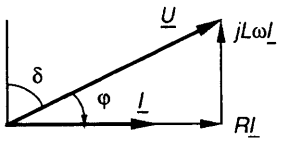


Fig. 19.

On en déduit que i a pour valeur maximale :

$$I_M = \frac{U_M}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}},$$

et qu'il est en retard sur u de $\varphi = \arctan \frac{L\omega}{R}$.

Son expression est donc :

$$i = \frac{U_M}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos\left(\omega t + \theta - \arctan \frac{L\omega}{R}\right).$$

7.1. CIRCUIT *R-L* PARALLÈLE ÉQUIVALENT

On peut donner, du schéma de la figure 18, le schéma équivalent de la figure 20. Les éléments R' et L' sont calculés, en fonction de R et L, de telle sorte que les circuits des figures 18 et 20 présentent la même impédance entre les points A et B :

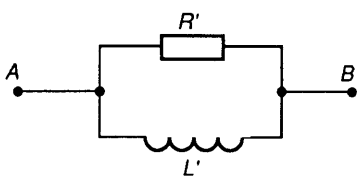


Fig. 20.

$$R + jL\omega = \frac{1}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{jL'\omega}}$$

ou

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{jL'\omega} = \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{R - jL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}.$$

En égalant parties réelles et parties imaginaires, il vient :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R'} = \dfrac{R}{R^2 + L^2\omega^2} \\ \dfrac{1}{L'\omega} = \dfrac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} R' = \dfrac{R^2 + L^2\omega^2}{R} = R\,\dfrac{R^2 + L^2\omega^2}{R^2} \\ L' = \dfrac{R^2 + L^2\omega^2}{L\omega^2} = L\,\dfrac{R^2 + L^2\omega^2}{L^2\omega^2}. \end{cases}$$

On pose $Q = \dfrac{L\omega}{R}$: facteur de qualité du circuit R-L série; il vient alors :

$$\boldsymbol{R' = R[1 + Q^2],} \quad \boldsymbol{L' = L\left[1 + \frac{1}{Q^2}\right].}$$

Par combinaison des formules précédentes, on peut exprimer Q en fonction de R' et L', soit :

$$Q = \frac{L\omega}{R} = \frac{L'Q^2}{1 + Q^2} \quad \omega\,\frac{1 + Q^2}{R'} = Q^2\,\frac{L'\omega}{R'},$$

$$\boldsymbol{Q = \frac{R'}{L'\omega} = \frac{L\omega}{R}.}$$

Bobine réelle

On peut donner pour la bobine le schéma équivalent de la figure 18, dans lequel la résistance R traduit les phénomènes parasites suivants :

- résistance du bobinage,
- pertes par hystérésis magnétique.

Dans le cas d'une bobine de bonne qualité, Q est très grand par rapport à 1 et on peut écrire les formules approchées :

$$\begin{cases} L' \approx L \\ R' \approx Q^2 R. \end{cases}$$

On définit, pour une bobine, l'angle de pertes δ par

$$\tan \delta = \frac{1}{Q} = \frac{R}{L\omega} = \frac{L'\omega}{R'};$$

δ est relié à φ par $\tan \delta = \dfrac{R}{L\omega} = \cot \varphi$, soit $\delta = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$.

Pour une bobine parfaite, le courant est en retard de $\dfrac{\pi}{2}$ sur la tension à ses bornes. Pour une bobine réelle, cet angle est égal à $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \delta$, ce qui justifie la dénomination d'angle de pertes.

7.2. FERMETURE DU CIRCUIT *R-L*

Soit le schéma de la figure 21 dans lequel $e = E_M \cos(\omega t - \theta)$.

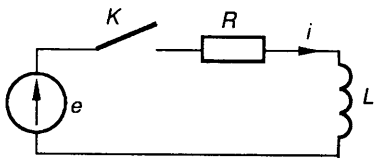


Fig. 21.

A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.
De l'équation différentielle

$$e = E_M \cos(\omega t - \theta) = Ri + L\frac{di}{dt},$$

on tire :

- la solution de l'équation sans second membre : $i = k\, e^{-\frac{R}{L}t}$;
- la solution particulière :

$$i = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos(\omega t - \theta - \varphi),$$

avec $\tan \varphi = \dfrac{L\omega}{R}$;

- la solution générale

$$i = k\, e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos(\omega t - \theta - \varphi).$$

Le calcul de la constante k conduit à

$$i(0-) = 0 = i(0+) = k + \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos(\theta + \varphi),$$

soit $k = -\dfrac{E_M}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos(\theta + \varphi)$.

Remarquons que si $\theta + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, k est nul, et le régime transitoire disparaît. Ce cas correspond au diagramme de la figure 22. L'interrupteur est fermé à l'instant où le courant correspondant au régime permanent passe par zéro par valeurs croissantes. On conçoit bien que, dans ces conditions, le régime transitoire disparaisse.

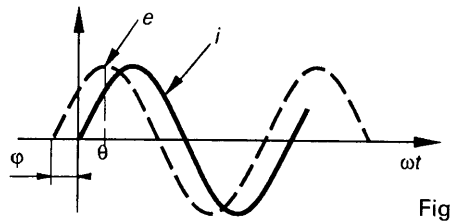


Fig. 22.

Cette remarque est utilisée par les relais statiques dans lesquels :

- un circuit repère le passage de la tension d'alimentation par zéro;
- un circuit temporisateur réglable retarde la fermeture de l'interrupteur.

8. CIRCUITS ASSOCIANT RÉSISTANCE, INDUCTANCE ET CAPACITÉ

8.1. CIRCUIT *R-L-C* SÉRIE

Soit le circuit de la figure 23, dans lequel $u = U_M \cos \omega t$, on peut écrire entre les nombres complexes la relation :

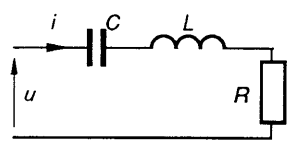


Fig. 23.

$$\underline{U} = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right)\underline{I},$$

qui peut être mise sous la forme :

$$\underline{U}/\underline{I} = R + jL\omega\left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right] = R + \frac{1}{jC\omega}\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]$$

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

On en déduit que :

- pour la pulsation $\omega = \omega_0$ le circuit se comporte comme une résistance R; ses éléments L et C se neutralisent;
- pour les pulsations ω supérieures à ω_0, le circuit se comporte comme un circuit inductif résultant de la mise en série de la résistance R et de l'inductance $L' = L\left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right]$;
- pour les pulsations ω inférieures à ω_0, le circuit se comporte comme un circuit capacitif, résultant de la mise en série de la résistance R et de la capacité $C' = \frac{C}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$.

8.1.1. Sortie aux bornes de la capacité : circuit passe-bas du deuxième ordre

Redessinons le schéma de la figure 23 sous la forme donnée à la figure 24.

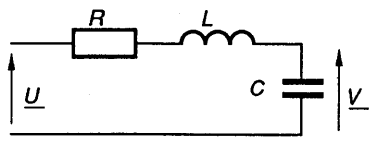


Fig. 24.

La transmittance $\underline{T} = \frac{\underline{V}}{\underline{U}}$ s'écrit :

$$\underline{T} = \frac{\underline{V}}{\underline{U}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$= \frac{1}{1 + jRC\omega + (j\omega)^2 LC}$$

$$= \frac{1}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $m = \frac{RC\omega_0}{2} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$.

Les représentations graphiques du module et de l'argument de $\underline{T}$, en fonction de la pulsation ω, seront étudiées au paragraphe 9.

Remarquons, dès à présent que le module de $\underline{T}$ tend vers zéro lorsque la pulsation ω tend vers l'infini. Il s'agit d'un **circuit passe-bas du deuxième ordre** car la transmittance possède un terme en $(j\omega)^2$ au dénominateur.

8.1.2. Sortie aux bornes de l'inductance : circuit passe-haut du deuxième ordre

Redessinons le schéma de la figure 23 sous la forme donnée à la figure 25. La transmittance $\underline{T} = \frac{\underline{V}}{\underline{U}}$ s'écrit :

$$\underline{T} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$= \frac{(j\omega)^2 LC}{1 + jRC\omega + (j\omega)^2 LC}$$

$$= \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

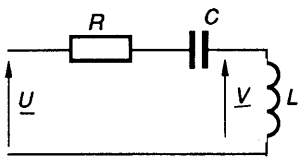


Fig. 25.

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$.

Les représentations graphiques du module et de l'argument de $\underline{T}$, en fonction de ω, seront étudiées au paragraphe 9. Remarquons, cependant que le module de $\underline{T}$ tend vers zéro, lorsque ω tend vers zéro. **Il s'agit d'un circuit passe-haut du deuxième ordre.**

8.1.3. Sortie aux bornes de la résistance : circuit passe-bande

Redessinons le schéma de la figure 23 sous la forme donnée à la figure 26. La transmittance $\underline{T} = \frac{\underline{V}}{\underline{U}}$ s'écrit :

$$\underline{T} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$= \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega + (j\omega)^2 LC}$$

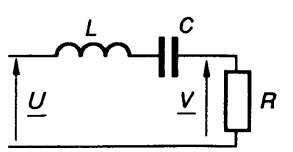


Fig. 26.

$$\underline{T} = \frac{2jm\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$.

Les représentations graphiques du module et de l'argument de $\underline{T}$, qui seront effectuées au paragraphe 9, nous permettront de conclure qu'il s'agit d'un **circuit passe-bande.**

8.2. CIRCUIT *R-L-C* PARALLÈLE

Soit le circuit de la figure 27 alimenté par un générateur de courant i_0. La tension $\underline{V}$ s'écrit :

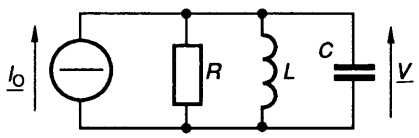


Fig. 27.

$$\underline{V} = \frac{\underline{I_0}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega}$$

$$= \frac{R\underline{I_0}\, j\frac{L\omega}{R}}{1 + j\frac{L\omega}{R} + (j\omega)^2 LC}$$

$$= R\underline{I_0}\,\frac{2jm\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $m = \frac{L\omega_0}{2R} = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

La tension $\underline{V}$ s'écrit aussi :

$$\underline{V} = \frac{R\underline{I_0}}{1 + jQ_0\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]},$$

avec $\begin{cases} Q_0 = \frac{1}{2m} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \end{cases}$

Ces formules seront exploitées au paragraphe 9.

Remarquons que pour $\omega = \omega_0$, $\underline{V} = R\underline{I_0}$, le circuit se comporte comme une résistance R. Cette propriété est utilisée pour réaliser un circuit possédant une faible résistance en continu et une forte résistance en régime sinusoïdal de pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Considérons, en effet, le circuit de la figure 28.

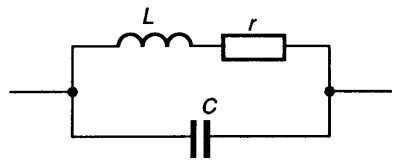


Fig. 28.

Résultant de la mise en parallèle d'une capacité C et d'une bobine de résistance r et d'inductance L.

- En continu le courant dans le condensateur et la tension aux bornes de l'inductance sont nuls. Le circuit est équivalent à la résistance r.
- En régime sinusoïdal la bobine peut être remplacée par son schéma équivalent résultant de la mise en parallèle de l'inductance

$$L' = L\left[1 + \frac{1}{Q^2}\right]$$

et de la résistance

$$R = r[1 + Q^2].$$

Dans le cas ou $Q = \frac{L\omega_0}{r}$ est grand par rapport à 1, $L' = L$ et $R = Q^2 r$. A la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ le circuit se comporte alors comme une résistance $R = Q^2 r$ très grande par rapport à r.

9. REPRÉSENTATION DES FONCTIONS DE TRANSFERT

Rappelons que, si le rapport des nombres complexes $\underline{X_1}$ et $\underline{X_2}$, associés à deux grandeurs sinusoïdales x_1 et x_2, s'écrit $\underline{T} = \frac{\underline{X_2}}{\underline{X_1}}$:

- le module de $\underline{T}$, soit T, donne le rapport des valeurs efficaces de x_1 et x_2,
- l'argument de $\underline{T}$, soit φ, donne l'angle d'avance de x_2 sur x_1.

La connaissance de l'évolution de T et φ, en fonction de la pulsation ω, permet de conclure sur les propriétés du dispositif admettant $\underline{T}$ comme fonction de transfert.

Nous avons vu apparaître, lors des paragraphes précédents, un certain nombre de fonctions de transfert particulières : $j\frac{\omega}{\omega_0}$, $1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$, $\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$,

$$\frac{1}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \cdots$$

Ces fonctions de transfert se retrouvent dans l'étude de nombreux systèmes électriques, électromécanique ou autres.

Nous étudierons dans ce paragraphe deux représentations des fonctions de transfert élémentaires en fonction de la pulsation ω.

9.1. DIAGRAMMES DE BODE

Soit la fonction de transfert $\underline{T}$, on obtient sa représentation dans les diagrammes de Bode en traçant 20 lg T et $\varphi = \arg \underline{T}$ en fonction de la pulsation ω, repérée en échelle logarithmique, c'est-à-dire en fonction de lg ω.

20 lg T est la mesure de T *en décibels* (abréviation : db).

9.1.1. Échelle logarithmique

Soit un axe orienté et son vecteur unitaire $\vec{u}$ (*fig.* 29). On réalise une échelle logarithmique en associant à tout nombre m un point M tel que $\overrightarrow{OM} = (\lg m)\vec{u}$. Nous obtenons ainsi la graduation représentée à la figure 30.

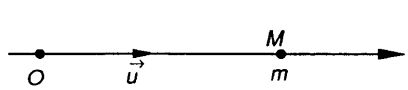


Fig. 29.

Décade

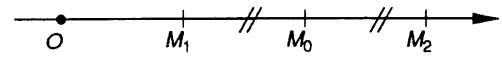
Soient deux nombres m_1 et m_2 auxquels sont associés les deux points M_1 et M_2. Nous dirons qu'entre M_1 et M_2 il y a une décade si $m_2 = 10m_1$, soit $\lg m_2 = \lg m_1 + 1$.

Octave

De la même façon, nous dirons que deux points M_1 et M_2 sont séparés par un octave si $m_2 = 2m_1$ soit $\lg m_2 = \lg m_1 + \lg 2 \approx \lg m_1 + 0{,}3$.

REMARQUE

Considérons trois nombres m_0, m_1, m_2 auxquels sont associés les trois points M_0, M_1, M_2 et cherchons la condition pour que le point M_0 soit situé au milieu du segment M_1M_2.



Cette condition s'écrit $\overrightarrow{OM_0} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2})$

soit

$$2 \lg m_0\vec{u} = \lg m_1\vec{u} + \lg m_2\vec{u};$$

$\vec{u}$ étant différent de zéro, la condition s'écrit

$$\lg m_0^2 = \lg m_1 m_2,$$

soit : $$\boldsymbol{m_0^2 = m_1 m_2}.$$

En échelle logarithmique m_0 est donc la moyenne géométrique de m_1 et m_2, alors qu'en échelle linéaire, la même condition conduit à la moyenne arithmétique :

$$m_0 = \frac{m_1 + m_2}{2}.$$

9.1.2. Intérêt des diagrammes de Bode

Supposons qu'une fonction de transfert $\underline{T}$ se mette sous la forme d'un produit de fonctions de transfert élémentaires $\underline{T}_1$, $\underline{T}_2$, ..., $\underline{T}_n$ soit $\underline{T} = \underline{T}_1 \cdot \underline{T}_2 \cdot \ldots \cdot \underline{T}_n$, et supposons, de plus, que nous connaissions les représentations du module et de l'argument de $\underline{T}_1$, $\underline{T}_2$, ..., $\underline{T}_n$.

Le module d'un produit étant le produit des modules, nous pouvons écrire

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_n,$$

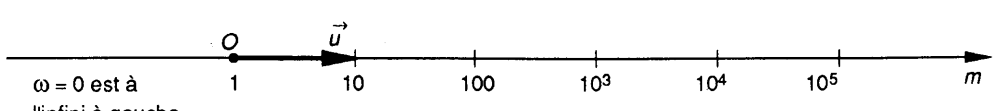


Fig. 30.

donc

$$\mathbf{20 \lg \underline{T} = 20 \lg \underline{T}_1 + 20 \lg \underline{T}_2 + \ldots + 20 \lg \underline{T}_n}$$

et

$$\mathbf{\arg \underline{T} = \arg \underline{T}_1 + \arg \underline{T}_2 + \ldots + \arg \underline{T}_n.}$$

Les représentations du module et de l'argument de $\underline{T}$ s'obtiennent en faisant la somme des représentations correspondantes du module et de l'argument des fonctions de transfert $\underline{T}_1, \underline{T}_2, \ldots, \underline{T}_n$.

9.1.3. Fonction de transfert $\underline{T}_0 = j\frac{\omega}{\omega_0}$

Représentation du module

$$T = |\underline{T}| = \frac{\omega}{\omega_0},$$

soit

$$20 \lg T = 20 \lg \omega - 20 \lg \omega_0.$$

La représentation de 20 lg T en prenant pour ω une échelle logarithmique (c'est-à-dire en fonction de lg ω) est donc une droite passant par $(\omega_0, 0)$ et dont la pente est définie de la manière suivante :

- Pour $\omega = \omega_0$: 20 lg $T_0 = 0$ décibel,
- Pour $\omega = 10\omega_0$: 20 lg $T_0 = 20$ décibels,
- Pour $\omega = 2\omega_0$: 20 lg $T_0 = 20$ (lg2) ≈ 6 décibels.

La pente de la droite est donc de *20 décibels par décade* ou encore de *6 décibels par octave.*

Nous obtenons ainsi la représentation de la figure 31.

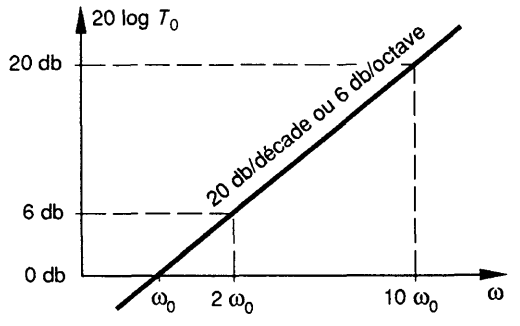


Fig. 31.

Représentation de l'argument

$\arg \underline{T}_0 = \frac{\pi}{2}$ quel que soit ω. Nous obtenons donc la représentation de la figure 32.

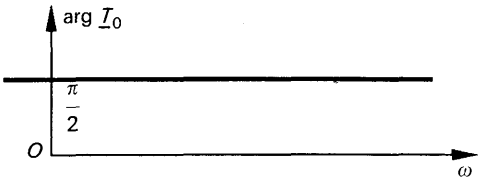


Fig. 32.

9.1.4. Fonction de transfert $\underline{T}_0^n = \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^n$

$$20 \lg |T_0|^n = 20n \lg \omega - 20n \lg \omega_0,$$

$$\arg \underline{T}_0^n = n \arg \underline{T}_0 = n\frac{\pi}{2}.$$

Nous obtenons donc :

- pour le module une droite de pente $20n$ décibels par décade et passant par ω_0 ;
- pour l'argument une horizontale d'ordonnée $n\frac{\pi}{2}$.

9.1.5. Fonction de transfert

$$\underline{T}_1 = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$$

Représentation du module

- Pour $\omega = \omega_0$,

$$20 \lg T_1 = 20 \lg \sqrt{2} = 3 \text{ décibels.}$$

- Pour les pulsations ω très grandes par rapport à ω_0, $\underline{T}_1$ devient peu différente de $\underline{T}_0 = j\frac{\omega}{\omega_0}$. La courbe admet donc, pour asymptote, la droite de pente 20 décibels par décade et passant par ω_0.
- Pour les pulsations ω très petites par rapport à ω_0, 20 lg $T_1 \approx 20 \lg 1 = 0$, la courbe admet pour asymptote l'axe des ω.

Écart par rapport aux asymptotes : $\mathcal{E}$

- Pour $\omega < \omega_0$,

$$\mathcal{E} = 20 \lg \left[1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^{1/2} = 10 \lg \left[1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right].$$

- Pour $\omega > \omega_0$,

$$\mathcal{E} = 20 \lg \left[1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^{1/2} - 20 \lg \frac{\omega}{\omega_0} = 10 \lg \left[1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right].$$

On en déduit que :

- l'écart $\mathcal{E}$ par rapport aux asymptotes est maximum pour $\omega = \omega_0$ et vaut 3 décibels;
- pour deux points symétriques par rapport à ω_0 les écarts aux asymptotes sont égaux.

On obtient ainsi la représentation donnée à la figure 33. Les écarts aux asymptotes étant faibles, la courbe pourra, pour certaines applications être assimilée à ses asymptotes; on obtient ainsi *le diagramme asymptotique.*

Représentation de l'argument

- Pour $\omega = \omega_0$:

$$\arg \underline{T}_1 = \arg (1 + j) = \frac{\pi}{4}.$$

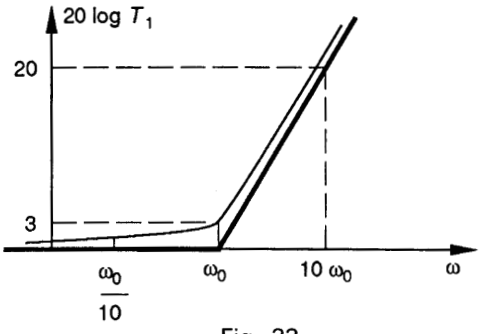


Fig. 33.

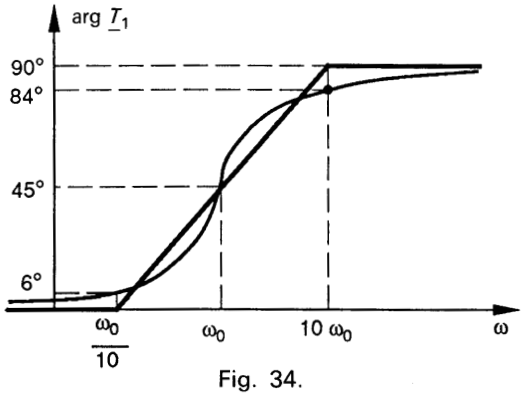


Fig. 34.

- Pour des pulsations très grandes par rapport à ω_0, $\underline{T}_1$ devenant peu différente de $j\frac{\omega}{\omega_0}$, arg $\underline{T}_1$ tend vers $\frac{\pi}{2}$: la courbe admet l'horizontale $\frac{\pi}{2}$ pour asymptote.
- Pour des pulsations très petites par rapport à ω_0, $\underline{T}_1$ devient peu différente de 1 et arg $\underline{T}_1$ admet l'axe des ω pour asymptote.
- Pour $\omega = \frac{\omega_0}{10}$:

$$\arg \underline{T}_1 = \arctan \frac{1}{10} = 6°.$$

- Pour $\omega = 10\omega_0$:

$$\arg \underline{T}_1 = \arctan 10 = 84°.$$

On obtient une bonne approximation de la courbe entre $10\omega_0$ et $\frac{\omega_0}{10}$ en l'assimilant à l'oblique passant par les points de coordonnées $\left(\frac{\omega_0}{10}, 0\right)$ et $\left(10\omega_0, \frac{\pi}{2}\right)$ (*fig.* 34).

9.1.6. Fonction de transfert

$$\underline{T}_2 = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

De la relation $\underline{T}_2 = \frac{1}{\underline{T}_1}$, on déduit :

$$\begin{cases} 20 \lg T_2 = -20 \lg T_1 \\ \arg \underline{T}_2 = -\arg \underline{T}_1 \end{cases}$$

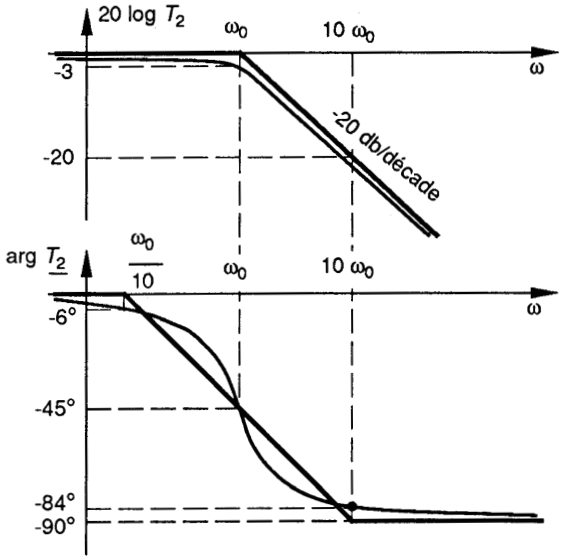


Fig. 35.

Les courbes de module et d'argument se déduisent donc de celle de $\underline{T}_1$ par symétrie par rapport à l'axe des pulsations d'où les courbes de la figure 35.

Les circuits admettant $\underline{T}_2$ pour fonction de transfert laissent passer prioritairement les basses fréquences : ce sont des circuits passe-bas.

La pulsation de coupure, telle que $T_2 = \frac{T_{2\max}}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire $T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $20 \lg T_2 = -3$ db, est égale à ω_0.

9.1.7. Fonction de transfert

$$\underline{T}_3 = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

La fonction de transfert $\underline{T}_3$ étant égale à $\underline{T}_0 \cdot \underline{T}_2$, on en déduit que :

$$\begin{cases} 20 \lg T_3 = 20 \lg T_0 + 20 \lg T_2 \\ \arg \underline{T}_3 = \arg \underline{T}_0 + \arg \underline{T}_2 \end{cases}$$

Les courbes de module et d'argument représentées à la figure 36 s'obtiennent par addition des courbes correspondantes de $\underline{T}_0$ et $\underline{T}_2$. Les circuits admettant $\underline{T}_3$ pour fonction de transfert sont des circuits *passe-haut* dont la pulsation de coupure est ω_0.

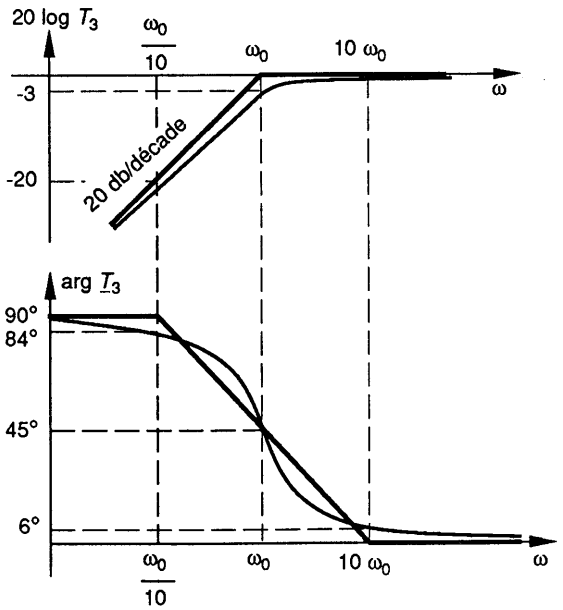


Fig. 36.

9.1.8. Fonction de transfert

$$\underline{T}_4 = \frac{1}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Représentation du module

Remarquons dès à présent :

- pour des pulsations ω très petites par rapport à ω_0, $\underline{T}_4$ devient peu différente de 1 et la courbe $20 \lg T_4$ est asymptote à l'axe des ω;
- pour les pulsations ω très grandes par rapport à ω_0, $\underline{T}_4$ devient peu différente de $\frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ et la courbe $20 \lg T_4$ est asymptote à la droite, de pente -40 décibels par décade, passant par ω_0.

Quelle que soit la valeur de m, toutes les courbes s'inscrivent donc dans le diagramme asymptotique de la figure 37.

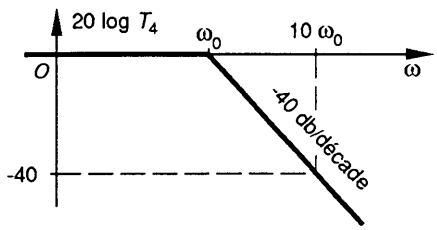


Fig. 37.

Le facteur d'amortissement m, n'influe que sur le comportement de la courbe au voisinage de ω_0.

Dans le but de ramener l'étude de $\underline{T}_4$ à l'étude des fonctions de transfert étudiées précédemment, tentons de mettre $\underline{T}_4$ sous la forme

$$\underline{T}_4 = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}.$$

Afin de factoriser le dénominateur

$$\underline{D} = 1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2,$$

on pose $\underline{x} = \frac{j\omega}{\omega_0}$ soit $\underline{D} = 1 + 2m\underline{x} + \underline{x}^2$.

Les racines en $\underline{x}$ de $\underline{D}$ ne sont réelles que si $\Delta' = m^2 - 1$ est positif. Nous sommes donc amenés à séparer les cas suivants.

a) $m \geqslant 1$: les racines de $\underline{D}$ sont réelles et s'écrivent

$$\begin{cases} x_1 = -m + \sqrt{m^2 - 1} \\ x_2 = -m - \sqrt{m^2 - 1} \end{cases}$$

soit

$$\underline{D} = (\underline{x} - x_1)(\underline{x} - x_2)$$

$$= \left(j\frac{\omega}{\omega_0} + m - \sqrt{m^2 - 1}\right) \left(j\frac{\omega}{\omega_0} + m + \sqrt{m^2 - 1}\right)$$

$$= (m - \sqrt{m^2 - 1})(m + \sqrt{m^2 - 1}) \left[1 + j\frac{\omega}{\omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1})}\right] \left[1 + j\frac{\omega}{\omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1})}\right]$$

$$= \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right),$$

avec $\begin{cases} \omega_1 = \omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1}) \\ \omega_2 = \omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1}) \end{cases}$

Remarquons que $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$; nous en déduisons que les points représentatifs de ω_1 et ω_2 sont symétriques par rapport à ω_0, d'où le diagramme de la figure 38.

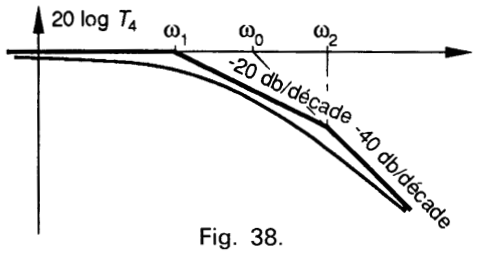


Fig. 38.

b) $m < 1$: il n'est plus possible de factoriser le dénominateur et une étude directe est nécessaire. Étudions, pour ce faire, les variations du module D du dénominateur de $\underline{T_4}$ en fonction de ω :

$$D^2 = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4m^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

Posons $y = D^2$ et cherchons les variations de y en fonction de $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$:

$$\frac{dy}{dx} = -2(1 - x^2)2x + 8m^2x$$

$$= 4x[-1 + 2m^2 + x^2].$$

La dérivée s'annule pour $x = 0$ (soit $\omega = 0$) et pour $x = \sqrt{1 - 2m^2}$.

La racine $x = 0$ ne présente pas d'intérêt et la racine $x = \sqrt{1 - 2m^2}$ n'est réelle que si m est inférieur à $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7$. Nous sommes donc conduits à distinguer les cas suivants :

- $m < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: la dérivée s'annule et la courbe présente un extrêmum conformément au tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{1 - 2m^2}$		$+\infty$
ω	0		$\omega_0\sqrt{1 - 2m^2}$		$+\infty$
$\dfrac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$4m^2[1 - m^2]$	$\nearrow$	$+\infty$
D	1	$\searrow$	$2m\sqrt{1 - m^2}$	$\nearrow$	$+\infty$
$20 \lg \dfrac{1}{D}$	0	$\nearrow$	$-20 \lg 2m\sqrt{1 - m^2}$	$\searrow$	$-\infty$

Ce qui conduit au diagramme de la figure 39.

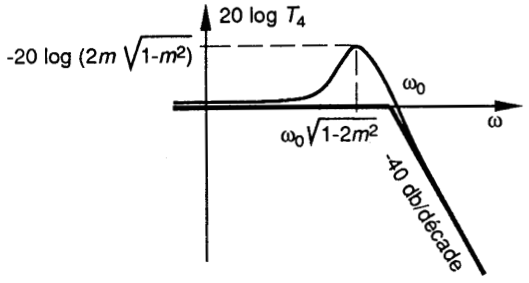


Fig. 39.

Remarquons que pour $m = 0{,}5$,

$$20 \lg T_4 = -10 \lg \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4\right]$$

et $20 \lg T_4 = 0$ pour $\omega = \omega_0$.

La courbe coupe l'axe des pulsations pour $\omega = \omega_0$.

- $1 > m > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: la courbe ne présente pas de maximum et reste toujours au-dessous de l'axe des pulsations.

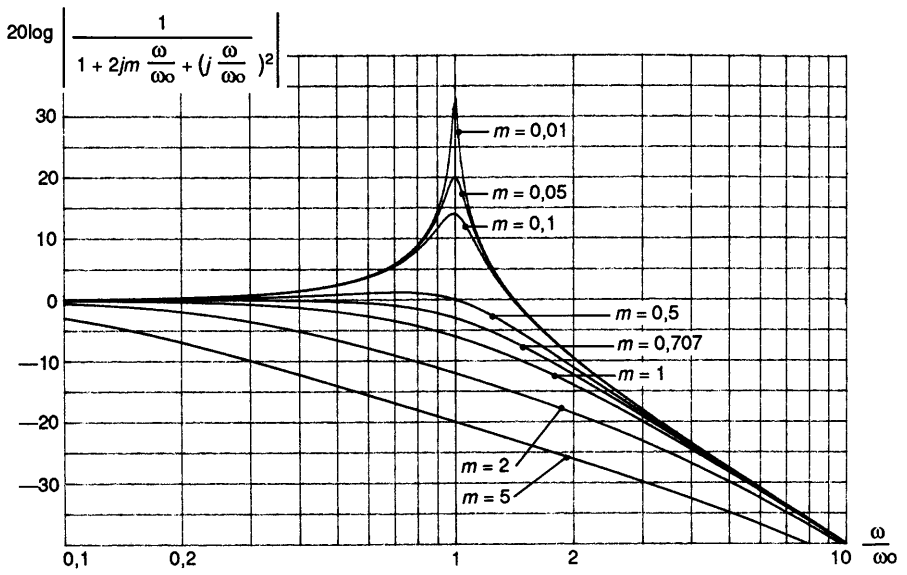


Fig. 40.

L'ensemble des courbes 20 lg T_4, tracées pour différentes valeurs de m sont données sur la figure 40. Notons les valeurs remarquables suivantes :

– pour $\omega = \omega_0$, 20 lg $T_4 = -20$ lg $2m$,

soit – 3 décibels pour $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

– 6 décibels pour $m = 1$.

Représentation de l'argument

• Pour $\omega = \omega_0$, $\underline{T}_4 = \frac{1}{2jm\frac{\omega}{\omega_0}}$ et arg $\underline{T}_4 = -\frac{\pi}{2}$, quel que soit m.

• Pour des pulsations très inférieures à ω_0, $\underline{T}_4$ devient peu différent de 1 et arg $\underline{T}_4$ tend vers 0; la courbe admet donc l'axe des ω pour asymptote.

• Pour des pulsations très supérieures à ω_0, $\underline{T}_4$ devient peu différente de $\frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$, arg $\underline{T}_4$ tend donc vers $-\pi$ et la courbe admet pour asymptote l'horizontale d'ordonnée $-\pi$.

L'ensemble des courbes arg $\underline{T}_4$, tracées pour différentes valeurs de m, est donné à la figure 41.

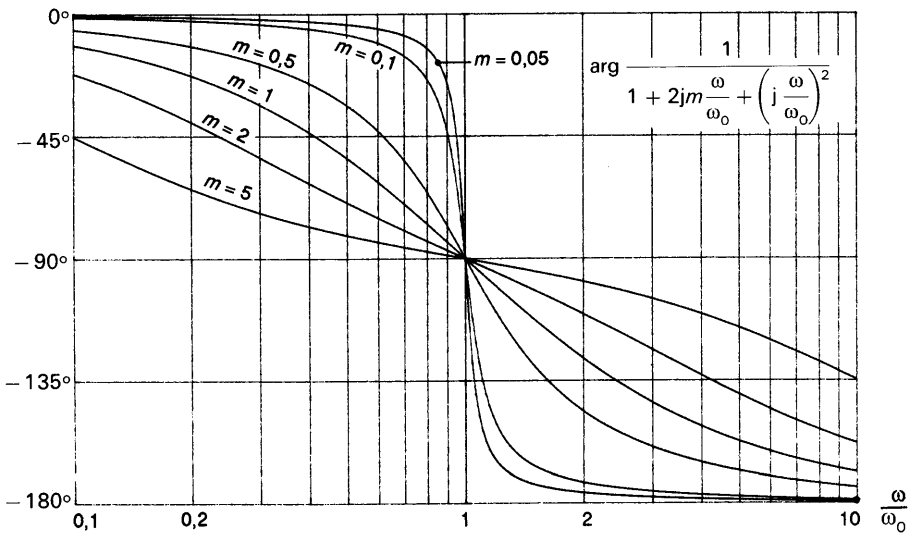


Fig. 41.

9.1.9. Fonction de transfert

$$\underline{T}_5 = \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Représentation du module

Effectuons sur $\underline{T}_5$ le changement de variable suivant $\omega \to \omega'$ telle que $\frac{\omega'}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega}$ soit $\omega \,.\, \omega' = \omega_0^2$; cela se traduit :

- sur l'axe des pulsations par une symétrie par rapport à la droite $\omega = \omega_0$,
- sur le module par

$$T_5(\omega') = \frac{\left(\frac{\omega_0}{\omega'}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega'}\right)^2\right]^2 + 4m^2\left(\frac{\omega_0}{\omega'}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega'}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4m^2\left(\frac{\omega'}{\omega_0}\right)^2}}$$

soit $T_5(\omega') = T_4(\omega)$.

La courbe représentative du module de $\underline{T}_5$ se déduit donc de celle de $\underline{T}_4$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $\omega = \omega_0$, ce qui conduit au graphe de la figure 42.

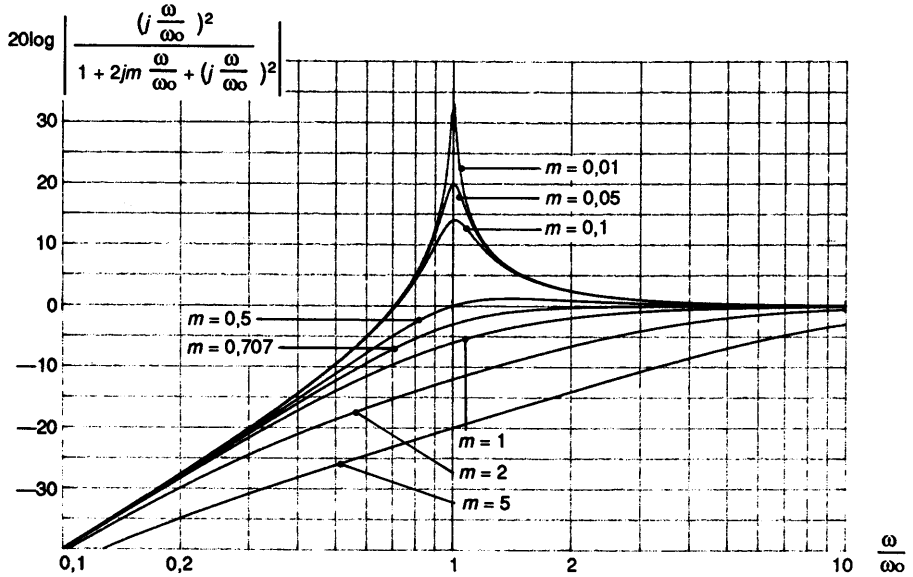


Fig. 42.

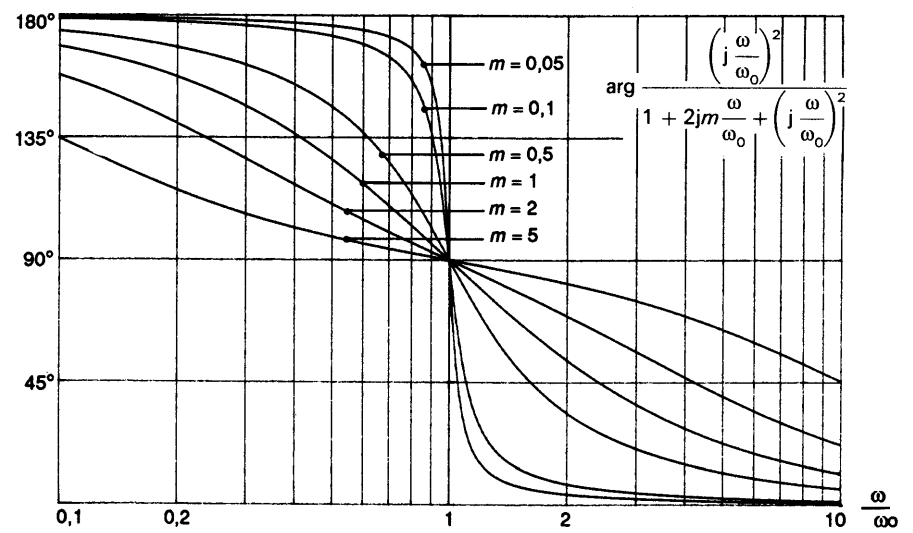


Fig. 43.

Représentation de l'argument

De la relation $\underline{T}_5 = \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \underline{T}_4$, on déduit que $\arg \underline{T}_5 = \pi + \arg \underline{T}_4$. La courbe représentative de l'argument de $\underline{T}_5$ se déduit de celle de $\underline{T}_4$ par translation verticale de π, ce qui conduit au graphe de la figure 43.

9.1.10. Fonction de transfert

$$\underline{T}_6 = \frac{2jm\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Représentation du module

- Pour $\omega = \omega_0$, $\underline{T}_6 = 1$ et $20 \lg T_6 = 0$; quel que soit m toutes les courbes passent donc par le point de coordonnées $(\omega_0, 0)$.
- $\underline{T}_6$ peut être écrit sous la forme :

$$\underline{T}_6 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2jm\frac{\omega}{\omega_0}} + \frac{1}{2m} j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2m} j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)},$$

soit $$T_6 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4m^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

$20 \lg T_6$ est donc maximale pour $\omega = \omega_0$ et vaut alors $20 \lg T_6 = 0$.

- Le changement de variable $\omega \to \omega'$ telle que $\omega \cdot \omega' = \omega_0^2$, conduit à

$$T_6(\omega') = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4m^2}\left(\frac{\omega_0}{\omega'} - \frac{\omega'}{\omega_0}\right)^2}} = T_6(\omega).$$

La courbe est donc symétrique par rapport à la droite $\omega = \omega_0$.

- Pour des pulsations très inférieures à ω_0, $\underline{T}_6$ devient peu différente de

$$2jm\frac{\omega}{\omega_0} = j\frac{\omega}{\frac{\omega_0}{2m}}.$$

La courbe est donc asymptote de la droite de pente + 20 décibels par décade et coupant l'axe des pulsations au point d'abscisse $\frac{\omega_0}{2m}$.

- Pour des pulsations très supérieures à ω_0, $\underline{T}_6$ devient peu différente de

$$\frac{2jm\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{j\frac{\omega}{2m\omega_0}}.$$

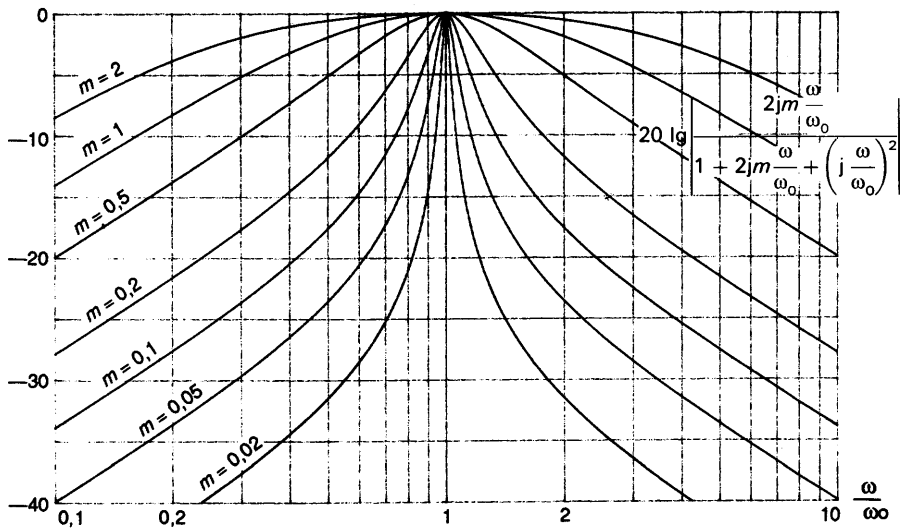


Fig. 44.

La courbe est donc asymptote à la droite de pente − 20 décibels par décade et coupant l'axe des pulsations au point d'abscisse $2m\omega_0$.

- Pour $m = 0{,}5$ les deux asymptotes se coupent sur l'axe des pulsations au point d'abscisse ω_0.
- Pour $m < 0{,}5$ les deux asymptotes se coupent au-dessous de l'axe des pulsations.
- Pour $m > 0{,}5$ les deux asymptotes se coupent au-dessus de l'axe des pulsations.

On obtient ainsi le diagramme de la figure 44.

Les circuits admettant $\underline{T}_6$ pour fonction de transfert sont donc des circuits passe-bande. Nous allons préciser leurs caractéristiques. Nous pouvons écrire :

$$\underline{T}_6 = \frac{2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2m}\mathrm{j}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

On pose parfois $Q_0 = \dfrac{1}{2m}$ que l'on appelle le coefficient de qualité du circuit sélectif. Il vient

$$T_6 = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

- T_6 est maximale et vaut 1 pour $\omega = \omega_0$.
- La bande passante, définie comme l'ensemble des pulsations telles que $T_6 > \dfrac{T_{6\max}}{\sqrt{2}}$, est limitée par des pulsations telles que :

$$1 + Q_0^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 2,$$

$$\text{soit} \qquad Q_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1.$$

Elles satisfont donc l'équation du second degré $\omega^2 \pm \omega\dfrac{\omega_0}{Q_0} - \omega_0^2 = 0$.

Les solutions en sont :

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q_0} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q_0^2} + 4},$$

$$\omega_1' = \frac{\omega_0}{2Q_0} - \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q_0^2} + 4},$$

$$\omega_2 = -\frac{\omega_0}{2Q_0} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q_0^2} + 4},$$

$$\omega_2' = -\frac{\omega_0}{2Q_0} - \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q_0^2} + 4}.$$

Les pulsations étant obligatoirement positives, les seules solutions possibles sont ω_1 et ω_2; la bande passante s'écrit :

$$\boldsymbol{B = \omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q_0} = 2m\omega_0.}$$

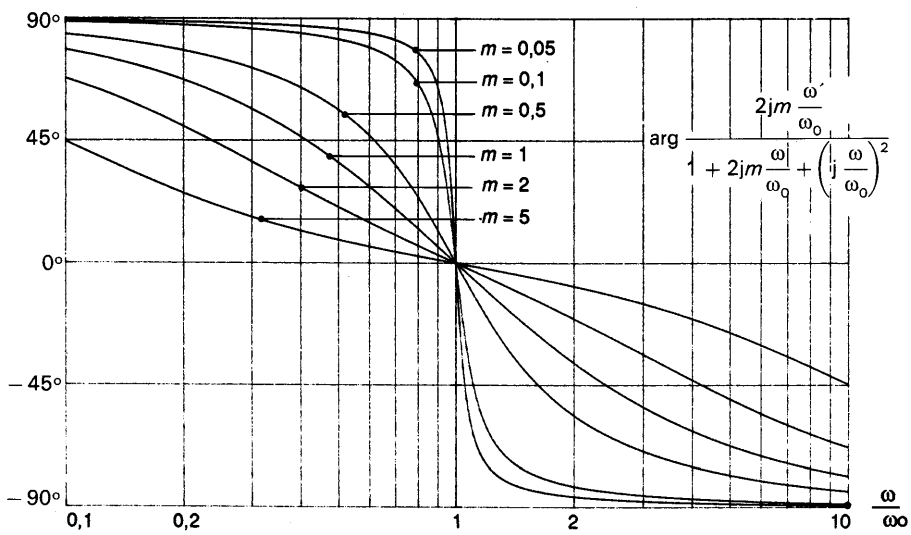


Fig. 45.

Courbe d'argument

De l'égalité

$$\arg \underline{T}_6 = \frac{\pi}{2} + \arg \underline{T}_4,$$

nous concluons que les courbes d'argument de $\underline{T}_6$ se déduisent de celles de $\underline{T}_4$ par translation verticale de $\frac{\pi}{2}$; d'où les courbes de la figure 45.

9.1.11. Fonction de transfert

$$\underline{T}_7 = \frac{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Courbe de module

- Pour des pulsations ω très inférieures à ω_0, T_7 devient peu différente de 1, 20 lg $T_7 = 0$ et la courbe admet l'axe des pulsations pour asymptote.
- Pour des pulsations ω très supérieures à ω_0, T_7 devient peu différente de 1; la courbe admet l'axe des pulsations pour asymptote.
- Pour $\omega = \omega_0$, $T_7 = 0$ et 20 lg T_7 tend vers $-\infty$. La courbe admet donc le diagramme asymptotique de la figure 46 et cela quelle que soit la valeur de m.

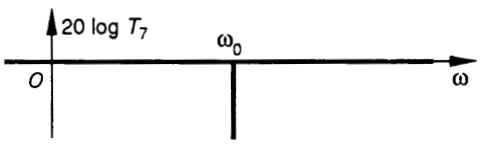


Fig. 46.

Pour des valeurs de m supérieures ou égales à 1, la fonction de transfert peut être mise sous la forme : 20 lg T_7

$$\underline{T}_7 = \frac{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

avec $\omega_1 = \omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1})$

$\omega_2 = \omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1})$.

On obtient ainsi le diagramme asymptotique de la figure 47.

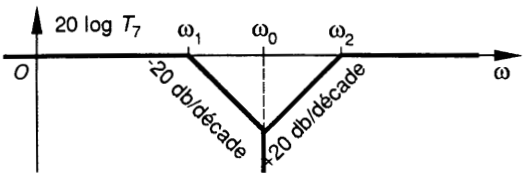


Fig. 47.

L'ensemble des courbes correspondant à différentes valeurs de m, est donné figure 48. Les circuits admettant $\underline{T}_7$ pour fonction de transfert sont donc des ***circuits réjecteurs.***

Les limites de la bande rejetée sont définies par les pulsations telles que $T_7 = \frac{T_{7\max}}{\sqrt{2}}$ soit 20 lg $T_7 = -3$ db.

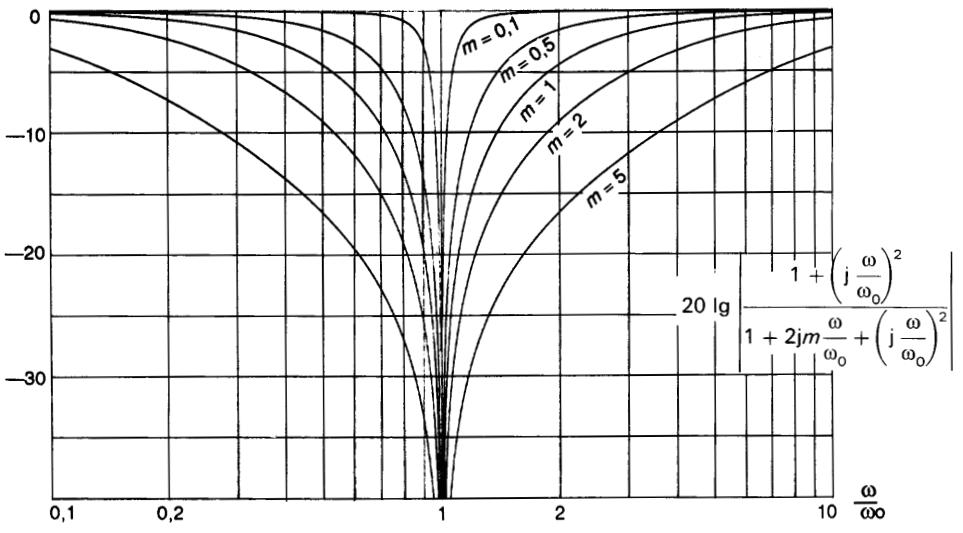


Fig. 48.

Ces pulsations satisfont l'équation :

$$\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 \times 2 = \left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4m^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2,$$

d'où :

$$\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 = 4m^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

ou encore

$$1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \pm 2m\frac{\omega}{\omega_0}.$$

$\omega^2 \pm 2m\omega\omega_0 - \omega_0^2 = 0$. Nous avons vu que les deux seules solutions possibles de cette équation sont

$$\begin{cases} \omega_1 = m\omega_0 + \omega_0\sqrt{1+m^2}, \\ \omega_2 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{1+m^2}. \end{cases}$$

La bande rejetée est donc :

$$B = \omega_1 - \omega_2 = 2m\omega_0.$$

Courbe d'argument

Des égalités :

- $\arg \underline{T}_7 = \arg\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] + \arg \underline{T}_4$
- $\arg\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] = \begin{cases} 0 \text{ pour } \omega < \omega_0, \\ \pi \text{ pour } \omega > \omega_0. \end{cases}$

Nous déduisons que les courbes d'argument de $\underline{T}_7$ se déduisent de celles de $\underline{T}_4$ en translatant de $+\pi$ la portion de courbe correspondant aux pulsations supérieures à ω_0. Nous obtenons ainsi le diagramme de la figure 49 qui présente bien sûr une discontinuité de π pour $\omega = \omega_0$.

9.1.12. A retenir

De l'étude des fonctions de transfert, nous isolerons les résultats suivants :

- $\underline{T} = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$, *circuit passe-bas du premier ordre* (décroissance à 20 db/décade), pulsation de coupure ω_0.

- $\underline{T} = \dfrac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$, *circuit passe-haut du premier ordre* (décroissance à 20 db/décade), pulsation de coupure ω_0.

- $\underline{T} = \dfrac{1}{1+2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_0}+\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$,

avec $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$,

circuit passe-bas du deuxième ordre (décroissance à 40 db/décade), pulsation de coupure ω_0.

- $\underline{T} = \dfrac{\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_0}+\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$,

avec $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$,

circuit passe-haut du deuxième ordre (décroissance à 40 db/décade), pulsation de coupure ω_0.

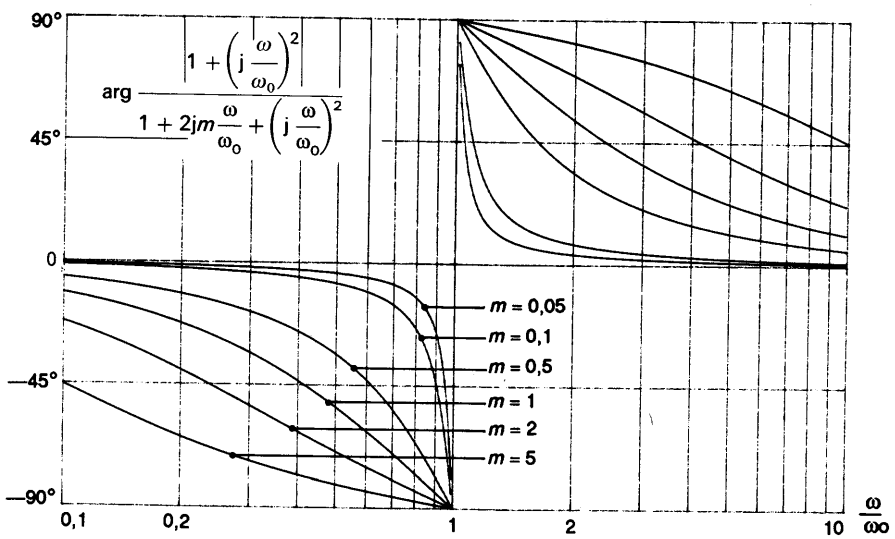


Fig. 49.

- $\underline{T} = \dfrac{2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$, *circuit passe-bande*, pulsation centrale ω_0, bande passante $\dfrac{\omega_0}{Q_0} = 2m\omega_0$.

- $\underline{T} = \dfrac{1 + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$, *circuit réjecteur*, pulsation centrale ω_0, bande rejetée $2m\omega_0$.

9.2. DIAGRAMME DE NYQUIST

On obtient le diagramme de Nyquist d'une fonction de transfert $\underline{T}$ en traçant, dans le plan complexe la courbe représentative de $\underline{T}$.

A toute pulsation ω, on associe un point dont l'ordonnée est la partie imaginaire de $\underline{T}$ et dont l'abscisse est la partie réelle de $\underline{T}$. Le diagramme obtenu peut ainsi être gradué en pulsations ω.

9.2.1. Fonction de transfert

$$\underline{T}_1 = 1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}$$

La partie réelle de $\underline{T}_1$ étant égale à 1 quelle que soit la pulsation ω, on obtient le graphe de la figure 50.

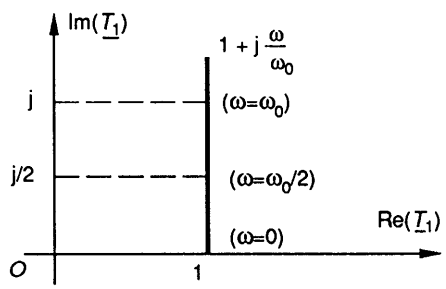


Fig. 50.

La demi-droite représentative est graduée linéairement en ω.

9.2.2. Fonction de transfert

$$\underline{T}_2 = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

De la relation $\underline{T}_2 = \dfrac{1}{\underline{T}_1}$, on tire

$$\begin{cases} T_2 = \dfrac{1}{T_1}, \\ \arg \underline{T}_2 = -\arg \underline{T}_1. \end{cases}$$

On passe donc de la courbe représentative de $\underline{T}_1$ à celle de $\underline{T}_2$ par les transformations géométriques suivantes :

- inversion de centre O et de rapport 1 pour tenir compte de $T_2 = \dfrac{1}{T_1}$;
- symétrie par rapport à l'axe réel pour tenir compte de $\arg \underline{T}_2 = -\arg \underline{T}_1$.

L'inverse d'une demi-droite étant un demi-cercle, on obtient le graphe de la figure 51. Sachant que deux points liés par inversion sont alignés sur le centre d'inversion, on peut graduer le graphe en pulsations.

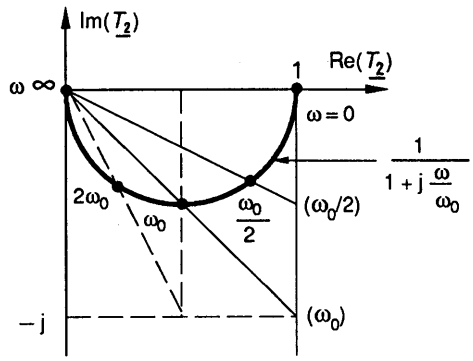


Fig. 51.

9.2.3. Fonction de transfert

$$\underline{T}_3 = \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

Si on effectue sur $\underline{T}_3$, le changement de variables $\omega \to \omega'$, telle que $\dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{\omega_0}{\omega'}$ il vient :

$$\underline{T}_3(\omega') = \frac{j\frac{\omega_0}{\omega'}}{1 + j\frac{\omega_0}{\omega'}} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega'}{\omega_0}}$$

soit

$$\begin{cases} T_3(\omega') = T_2(\omega) \\ \arg \underline{T}_3(\omega') = -\arg \underline{T}_2(\omega). \end{cases}$$

Nous en déduisons que le diagramme de Nyquist de $\underline{T}_3$ est symétrique de celui de $\underline{T}_2$ par rapport à l'axe des réels (*fig.* 52). La graduation du diagramme se fait à partir du changement de variables : si un point M correspond, sur $\underline{T}_2$, à la pulsation de $k\omega_0$, il correspond, pour $\underline{T}_3$, à la pulsation $\frac{\omega_0}{k}$.

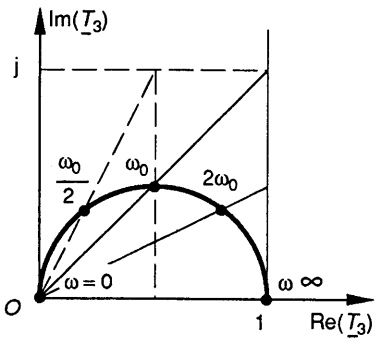


Fig. 52.

9.2.4. Fonction de transfert

$$\underline{T}_4 = \frac{1}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

La représentation de

$$\underline{T}'_4 = 1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 - k^2 + 2jmk$$

est une parabole admettant l'axe des réels pour axe.

La représentation de $\underline{T}_4$ est obtenue à partir de $\underline{T}'_4$ par symétrie par rapport à l'axe réel et inversion de centre O et de rapport 1. Les graphes sont donnés à la figure 53.

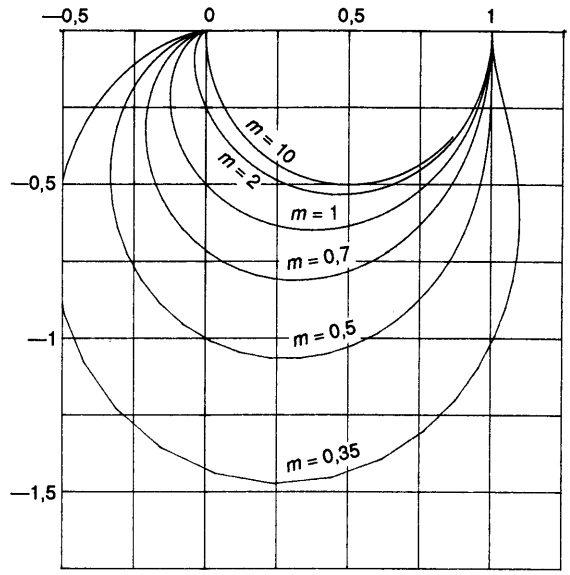


Fig. 53.

9.2.5. Fonction de transfert

$$\underline{T}_5 = \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Le changement de variable $\omega \to \omega'$, telle que $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega'}$ conduit à :

$$\underline{T}_5(\omega') = \frac{-\left(\frac{\omega_0}{\omega'}\right)^2}{1 + 2jm\frac{\omega_0}{\omega'} - \left(\frac{\omega_0}{\omega'}\right)^2} = \frac{1}{1 - 2jm\frac{\omega'}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega'}{\omega_0}\right)^2}$$

soit

$$\begin{cases} \text{pour le module : } T_5(\omega') = T_4(\omega), \\ \text{pour l'argument : } \arg \underline{T}_5(\omega') = -\arg \underline{T}_4(\omega). \end{cases}$$

Le diagramme de Nyquist de $\underline{T}_5$ est donc symétrique de celui de $\underline{T}_4$ par rapport à l'axe réel. De plus, si un point correspond à la pulsation $k\omega_0$ sur $\underline{T}_4$, son symétrique correspond à la pulsation $\frac{\omega_0}{k}$ sur $\underline{T}_5$.

9.2.6. Fonction de transfert

$$\underline{T}_6 = \frac{2jm\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

A partir de l'écriture de $\underline{T}_6$ sous la forme $\dfrac{1}{1 + \dfrac{j}{2m}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$, on trace la courbe représentative de $\underline{T}'_6 = 1 + \dfrac{j}{2m}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$. C'est une droite verticale qui coupe l'axe des réels au point d'abscisse 1 pour $\omega = \omega_0$.

De la relation $\underline{T}_6 = \dfrac{1}{\underline{T}'_6}$ on déduit

$$\begin{cases} T_6 = \dfrac{1}{T'_6} \\ \arg \underline{T}_6 = -\arg \underline{T}'_6 \end{cases}$$

Le diagramme de Nyquist de $\underline{T}_6$ est obtenu à partir de celui de $\underline{T}'_6$ par symétrie par rapport à l'axe des réels et inversion de centre O et de rapport 1. D'où le graphe de la figure 54.

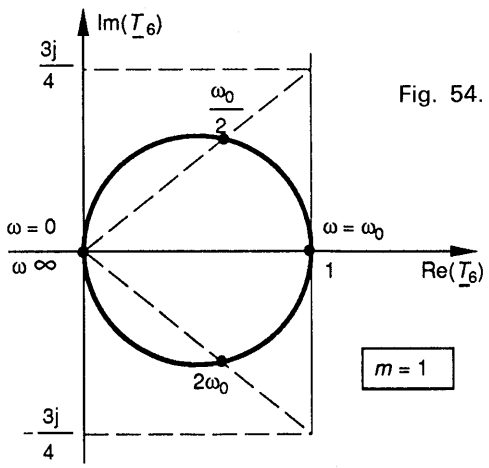


Fig. 54.

La graduation en ω dépend de la valeur du facteur d'amortissement m. Le graphe de la figure 54 est gradué pour $m = 1$.

Deux points correspondants aux pulsations $k\omega_0$ et $\dfrac{\omega_0}{k}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.

9.2.7. Fonction de transfert

$$\underline{T}_7 = \frac{1 + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$\underline{T}_7$ peut être écrite sous la forme :

$$\underline{T}_7 = \frac{1}{\dfrac{1 + \dfrac{2jm\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{j2m}{\left(\dfrac{\omega_0}{\omega} - \dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}}.$$

Le changement de variable $\omega \to \omega'$, telle que

$$\frac{2m}{\dfrac{\omega_0}{\omega} - \dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\omega'}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega'}\right),$$

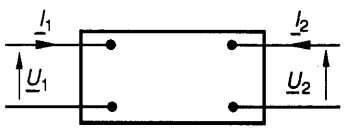
conduit à $\underline{T}_7(\omega) = \underline{T}_6(\omega')$

Nous en concluons que les diagrammes de Nyquist de $\underline{T}_6$ et $\underline{T}_7$ ont la même forme (*fig.* 54). Les graduations se déduisent l'une de l'autre par le changement de variable. Remarquons que pour $\omega = \omega_0$, le point représentatif se trouve à l'origine et que pour $\omega = 0$ et $\omega \to \infty$ le point représentatif se trouve sur l'axe des réels au point d'abscisse 1.

10. QUADRIPÔLES PASSIFS LINÉAIRES

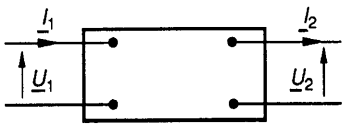
Définitions

- Un quadripôle est un circuit possédant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie.
- Un quadripôle est dit passif s'il est possible d'en déterminer un schéma équivalent ne comportant ni générateur de tension, ni générateur de courant.
- Un quadripôle est dit linéaire, si son schéma équivalent ne comporte que des éléments linéaires (inductance, capacité, résistance).



Convention récepteur en sortie

Fig. 55.



Convention générateur en sortie

Convention de signe

On adopte pour les orientations, l'une où l'autre des conventions représentées à la figure 55.
Dans chaque cas il faut préciser la convention choisie car certaines relations caractéristiques en dépendent.

10.1. PARAMÈTRES IMPÉDANCE

Adoptons pour le quadripôle la convention récepteur en sortie (*fig.* 55). Supposons que le quadripôle possède n branches (y compris les branches d'entrée et de sortie) et soient $\underline{I}_1, \underline{I}_2, ..., \underline{I}_n$ les courants correspondants. Si on admet que le quadripôle ne possède qu'un état stable, $\underline{I}_1, \underline{I}_2, ..., \underline{I}_n$ sont solutions des n équations indépendantes à n inconnues :

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= \underline{z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{z}_{12}\underline{I}_2 + ... + \underline{z}_{1n}\underline{I}_n \\
\underline{U}_2 &= \underline{z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{z}_{22}\underline{I}_2 + ... + \underline{z}_{2n}\underline{I}_n \\
0 &= \underline{z}_{31}\underline{I}_1 + \underline{z}_{32}\underline{I}_2 + ... + \underline{z}_{3n}\underline{I}_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= \underline{z}_{n1}\underline{I}_1 + \underline{z}_{n2}\underline{I}_2 + ... + \underline{z}_{nn}\underline{I}_n
\end{aligned}$$

Le quadripôle étant supposé passif, seules les mailles d'entrée et de sortie possèdent des générateurs de tension, respectivement $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$.
Considérons les $(n-2)$ dernières équations comme $(n-2)$ équations à $(n-2)$ inconnues $\underline{I}_3, ..., \underline{I}_n$, à partir desquelles on peut exprimer les courants $\underline{I}_3, \underline{I}_4, ..., \underline{I}_n$ en fonction de $\underline{I}_1$ et $\underline{I}_2$:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = f(\underline{I}_3, ..., \underline{I}_n).$$

En reportant ces expressions dans les deux premières équations, on exprime $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$ en fonction de $\underline{I}_1$ et $\underline{I}_2$ soit :

$$\boxed{\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}}$$

Le quadripôle est complètement *décrit par deux équations* entre les quatre grandeurs d'entrée et de sortie.
Les coefficients $\underline{Z}_{ij}$ sont les **paramètres impédance du quadripôle.**

10.1.1. Relation entre $\underline{Z}_{12}$ et $\underline{Z}_{21}$

Les équations aux paramètres impédance peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= (\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12})\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \\
\underline{U}_2 &= (\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12})\underline{I}_2 + \underline{Z}_{12}(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \\
&\quad + \underline{I}_1(\underline{Z}_{21} - \underline{Z}_{12}).
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit le schéma équivalent de la figure 56.

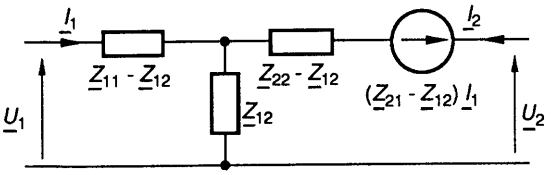


Fig. 56.

Le quadripôle étant passif, son schéma équivalent ne doit pas posséder de générateur. La seule façon de faire disparaître le générateur de tension $(\underline{Z}_{21} - \underline{Z}_{12})\underline{I}_1$ est de l'annuler, donc

$$\boxed{\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}}$$

10.1.2. Quadripôle symétrique

Un quadripôle est symétrique s'il présente le même aspect vu de l'entrée ou de la sortie. Nous pouvons en conclure que si l'ensemble $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_1, \underline{I}_2$ constitue un état d'équilibre, la permutation $\begin{cases} \underline{U}_1 \leftrightarrow \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 \leftrightarrow \underline{I}_2 \end{cases}$ conduit à un état d'équilibre.
Ce qui amène aux équations suivantes :

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \qquad (1)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \qquad (2)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_2 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_1 \qquad (3)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_2 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_1 \qquad (4)$$

La comparaison de deux de ces équations ((1) et (4) ou bien (2) et (3)) conduit à :

$$\boxed{\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}}$$

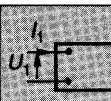
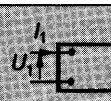
10.1.3. Remarque sur les conventions de signe

Les relations des paragraphes 10.1.1 et 10.1.2 ont été établies en prenant la convention récepteur en sortie. L'adoption de la convention générateur en sortie revient à changer $\underline{I}_2$ en $-\underline{I}_2$ c'est-à-dire à changer le signe de tous les paramètres intervenant en facteur de $\underline{I}_2$.

Les relations entre paramètres impédance s'établissent donc ainsi :

- quadripôle passif $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}$
- quadripôle symétrique $\underline{Z}_{11} = -\underline{Z}_{22}$

En résumé

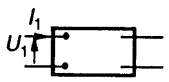
		
Convention	Récepteur en sortie	Générateur en sortie
Quadripôle passif	$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$	$\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}$
Quadripôle symétrique	$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}$	$\underline{Z}_{11} = -\underline{Z}_{22}$

10.1.4. Signification physique des paramètres impédance

A partir de conditions particulières de fonctionnement, on peut établir les relations suivantes :

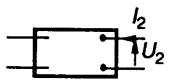
- $\underline{Z}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0}$, impédance d'entrée à sortie ouverte :

Fig. 57.



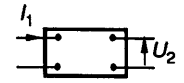
- $\underline{Z}_{22} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{I}_1=0}$, impédance du générateur de Thévenin équivalent au quadripôle attaqué par un générateur de courant :

Fig. 58.



- $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0}$, impédance de transfert à sortie ouverte :

Fig. 59.



Ces égalités sont utilisées pour déterminer de manière pratique ou théorique les paramètres impédance d'un quadripôle particulier.

10.1.5. Schéma équivalent à partir des paramètres impédance

Il s'agit du schéma de la figure 56 dans lequel le générateur de tension est nul; on obtient ainsi le schéma en T de la figure 60.

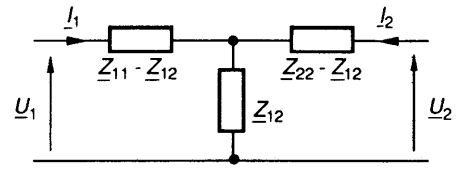


Fig. 60.

10.2. PARAMÈTRES ADMITTANCE

Les équations $\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}$ peuvent être résolues en $\underline{I}_1$ et $\underline{I}_2$, fonctions de $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$.

Soit $\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{cases}$

avec $\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{\Delta}}$ $\underline{Y}_{12} = -\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{\Delta}}$

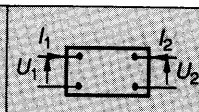
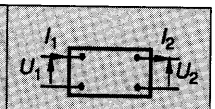
$\underline{Y}_{21} = -\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{\Delta}}$ $\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{\Delta}}$,

$\underline{\Delta} = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}$.

Les coefficients $\underline{Y}_{ij}$ sont les **paramètres admittance du quadripôle.**

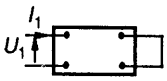
10.2.1. Relations entre $\underline{Y}_{21}$ et $\underline{Y}_{12}$ d'une part et $\underline{Y}_{11}$ et $\underline{Y}_{22}$ d'autre part

Le tableau du paragraphe 10.1.3, combiné aux relations précédentes entre les paramètres impédance et admittance, nous permet de conclure par le tableau suivant.

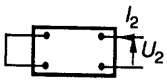
Convention		
Quadripôle passif	$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$	$\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}$
Quadripôle symétrique	$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$	$\underline{Y}_{11} = -\underline{Y}_{22}$

10.2.2. Signification physique des paramètres admittance

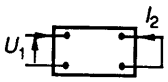
• $\underline{Y}_{11} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right)_{U_2=0}$, admittance d'entrée à sortie court-circuitée :

Fig. 61. 

• $\underline{Y}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right)_{U_1=0}$, admittance du générateur de Thévenin, équivalent au quadripôle attaqué par un générateur de tension :

Fig. 62. 

• $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right)_{U_2=0}$, admittance de transfert à sortie court-circuitée :

Fig. 63. 

10.2.3. Schéma équivalent à partir des paramètres admittance

Les relations aux paramètres admittance peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = (\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12})\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}(\underline{U}_2 - \underline{U}_1), \\ \underline{I}_2 = (\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12})\underline{U}_2 + (\underline{U}_1 - \underline{U}_2)\underline{Y}_{12}. \end{cases}$$

Ce qui conduit au schéma équivalent en π de la figure 64.

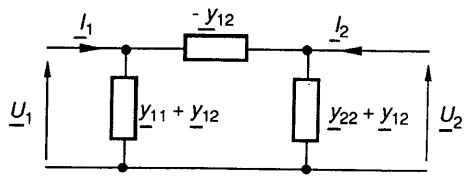


Fig. 64.

L'équivalence entre les schémas des figures 60 et 64 est connue sous le nom de *Théorème de Kennely.*

10.3. PARAMÈTRES DE TRANSFERT

Les équations $\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}$ peuvent être résolues en $\underline{U}_1$ et $\underline{I}_1$, fonctions de $\underline{U}_2$ et $\underline{I}_2$.

Soit $\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2 \end{cases}$

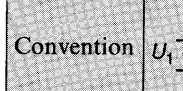
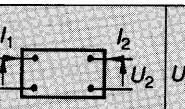
avec $\underline{A} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}}$ $\underline{B} = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21} - \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}$

$\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_{21}}$ $\underline{D} = -\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}$

Les coefficients $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ sont les **paramètres de transfert du quadripôle.**

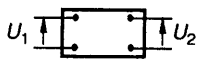
10.3.1. Relations entre les paramètres de transfert

Le tableau du paragraphe 10.1.3, combiné aux relations précédentes entre paramètres impédance et paramètres de transfert, conduit au tableau suivant :

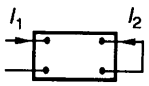
Convention		
Quadripôle passif	$\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = -1$	$\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = +1$
Quadripôle symétrique	$\underline{A} = -\underline{D}$	$\underline{A} = \underline{D}$

10.3.2. Signification physique des paramètres de transfert

• $\underline{A} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{I_2=0}$, inverse de la fonction de transfert en tension à sortie ouverte :

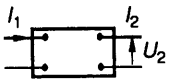
Fig. 65. 

• $\underline{D} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right)_{U_2=0}$, inverse de la fonction de transfert en courant à sortie court-circuitée :

Fig. 66. 

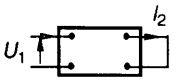
• $\underline{C} = \dfrac{1}{\underline{Z}_{21}} = \left(\dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2 = 0}$, admittance de transfert à sortie ouverte :

Fig. 67.



• $\underline{B} = \dfrac{1}{\underline{Y}_{21}} = \left(\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2 = 0}$, impédance de transfert à sortie court-circuitée.

Fig. 68.



10.4. ASSOCIATIONS DE QUADRIPÔLES

10.4.1. Quadripôle équivalent

Nous appellerons quadripôle équivalent à un ensemble de quadripôles, le quadripôle, qui, soumis aux mêmes tensions d'entrée et de sortie $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$ que l'ensemble, appelle les mêmes courants $\underline{I}_1$ et $\underline{I}_2$.

10.4.2. Association en série

Deux quadripôles, associés en série, sont parcourus par les mêmes courants d'entrée et de sortie, ce qui conduit au schéma de la figure 69.

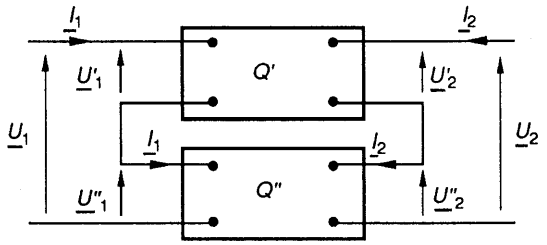


Fig. 69.

A partir des relations :

$$\begin{cases} \underline{U}'_1 = \underline{Z}'_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}'_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}'_2 = \underline{Z}'_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}'_{22}\underline{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{U}''_1 = \underline{Z}''_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}''_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}''_2 = \underline{Z}''_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}''_{22}\underline{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}'_1 + \underline{U}''_1 \\ \underline{U}_2 = \underline{U}'_2 + \underline{U}''_2 \end{cases}$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (\underline{Z}'_{11} + \underline{Z}''_{11})\underline{I}_1 + (\underline{Z}'_{12} + \underline{Z}''_{12})\underline{I}_2 \\ &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= (\underline{Z}'_{21} + \underline{Z}''_{21})\underline{I}_1 + (\underline{Z}'_{22} + \underline{Z}''_{22})\underline{I}_2 \\ &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned}$$

et conclure :

– les paramètres impédance d'un quadripôle Q, équivalent à la mise en série de deux quadripôles Q' et Q'' s'obtiennent par addition des paramètres impédance des quadripôles Q' et Q''.

10.4.3. Association en parallèle

Deux quadripôles associés en parallèle sont soumis aux mêmes tensions d'entrée et de sortie, ce qui conduit au schéma de la figure 70.

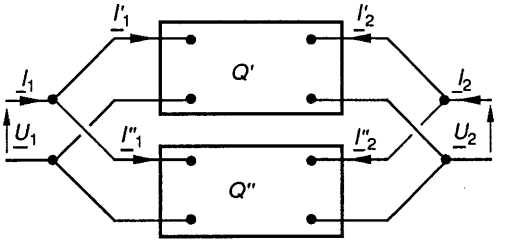


Fig. 70.

A partir des relations :

$$\begin{cases} \underline{I}'_1 = \underline{Y}'_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}'_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}'_2 = \underline{Y}'_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}'_{22}\underline{U}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{I}''_1 = \underline{Y}''_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}''_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}''_2 = \underline{Y}''_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}''_{22}\underline{U}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}'_1 + \underline{I}''_1 \\ \underline{I}_2 = \underline{I}'_2 + \underline{I}''_2 \end{cases}$$

On peut écrire :

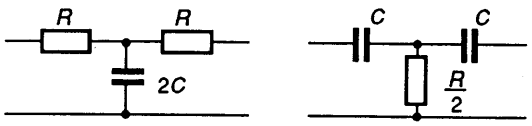
$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= (\underline{Y}'_{11} + \underline{Y}''_{11})\underline{U}_1 + (\underline{Y}'_{12} + \underline{Y}''_{12})\underline{U}_2 \\ &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= (\underline{Y}'_{21} + \underline{Y}''_{21})\underline{U}_1 + (\underline{Y}'_{22} + \underline{Y}''_{22})\underline{U}_2 \\ &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{aligned}$$

et conclure :

– les paramètres admittance d'un quadripôle Q équivalent à la mise en parallèle de deux quadripôles Q' et Q'' s'obtiennent par addition des paramètres admittance des quadripôles Q' et Q''.

Exemple d'application : quadripôle en double T

Soient les deux quadripôles symétriques de la figure 71.



Quadripôle Q' Quadripôle Q''

Fig. 71.

A partir des expressions

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{U}_2=0}$$

$$\text{et} \quad \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{U}_2=0},$$

et d'après les schémas correspondants des figures 72 et 73, on peut déterminer les paramètres admittance des quadripôles Q' et Q''.

$$\underline{Y}'_{11} = \underline{Y}'_{22} = \frac{1}{R + \dfrac{R}{1 + 2\mathrm{j}RC\omega}} = \frac{1 + 2\mathrm{j}RC\omega}{2R(1 + \mathrm{j}RC\omega)}$$

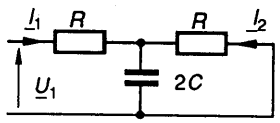


Fig. 72.

$$\underline{Y}'_{12} = \underline{Y}'_{21} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\dfrac{R}{1 + 2\mathrm{j}RC\omega}}{R + \dfrac{R}{1 + 2\mathrm{j}RC\omega}} = -\frac{1}{2R(1 + \mathrm{j}RC\omega)}$$

$$\underline{Y}''_{11} = \underline{Y}''_{22} = \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \dfrac{\dfrac{R}{2}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{RC\omega}{2}}} = \frac{\mathrm{j}RC\omega(2 + \mathrm{j}RC\omega)}{2R(1 + \mathrm{j}RC\omega)}$$

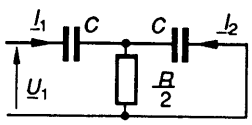


Fig. 73.

$$\underline{Y}''_{12} = \underline{Y}''_{21} = -\mathrm{j}C\omega \frac{\dfrac{\dfrac{R}{2}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{RC\omega}{2}}}{\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \dfrac{\dfrac{R}{2}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{RC\omega}{2}}} = -\frac{(\mathrm{j}RC\omega)^2}{2R(1 + \mathrm{j}RC\omega)}$$

Le quadripôle de la figure 74, résultant de la mise en parallèle des quadripôles Q' et Q'', admet donc comme paramètres admittance

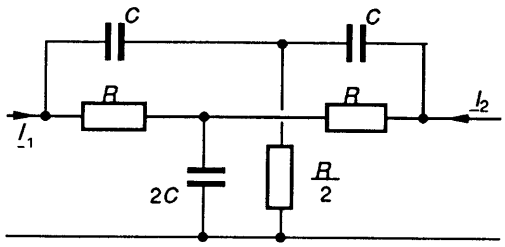


Fig. 74.

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22} = \frac{1 + 4\mathrm{j}RC\omega + (\mathrm{j}RC\omega)^2}{2R(1 + \mathrm{j}RC\omega)}$$

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\frac{1 + (\mathrm{j}RC\omega)^2}{2R(1 + \mathrm{j}RC\omega)}$$

De l'égalité $\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2$, on déduit la fonction de transfert en tension à vide (c'est-à-dire pour $\underline{I}_2 = 0$) :

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22}} = \frac{1 + (\mathrm{j}RC\omega)^2}{1 + 4\mathrm{j}RC\omega + (\mathrm{j}RC\omega)^2} = \frac{1 + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et $m = 2$.

D'après les études faites aux paragraphes 9.1.11 et 9.2.7, nous concluons qu'il s'agit **d'un quadripôle réjecteur centré sur** $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$, dont les limites de la bande rejetée sont $\dfrac{1}{RC}(\sqrt{5} - 2)$ et $\dfrac{1}{RC}(\sqrt{5} + 2)$, ce qui donne une largeur de bande rejetée égale à $\dfrac{4}{RC}$.

Les diagrammes de Bode et de Nyquist sont donnés aux figures 75 et 76.

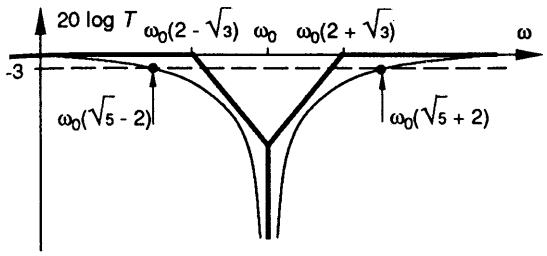


Fig. 75.

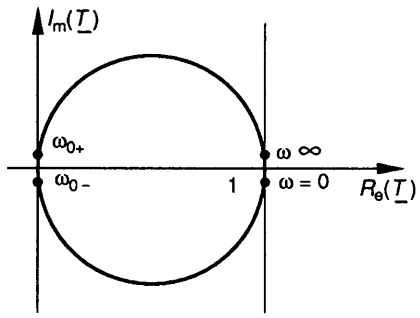


Fig. 76.

10.4.4. Association en cascade

Deux quadripôles associés en cascade sont tels que les grandeurs de sortie du premier constituent les grandeurs d'entrée du second ce qui conduit au schéma de la figure 77.

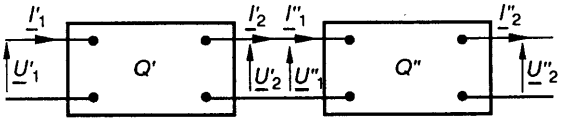


Fig. 77.

Remarquons que les équations aux paramètres de transfert peuvent être écrites sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{AB} \\ \underline{CD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = (T) \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Des équations :

$$\begin{pmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{I}'_1 \end{pmatrix} = (T') \begin{pmatrix} \underline{U}'_2 \\ \underline{I}'_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \underline{U}'_2 \\ \underline{I}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{I}''_1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{I}''_1 \end{pmatrix} = (T'') \begin{pmatrix} \underline{U}''_2 \\ \underline{I}''_2 \end{pmatrix}$$

on déduit

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = (\underline{T'})(\underline{T''}) \begin{pmatrix} \underline{U}''_2 \\ \underline{I}''_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de transfert du quadripôle équivalent à la mise en cascade de deux quadripôles Q' et Q'' est obtenue en faisant le produit des matrices de transfert des quadripôles Q' et Q''.

10.5. IMPÉDANCES PARTICULIÈRES DU QUADRIPÔLE

10.5.1. Impédance d'entrée $\underline{Z}_e$

C'est l'impédance vue à l'entrée du quadripôle lorsqu'il est fermé sur une impédance $\underline{Z}_u$ (*fig.* 78).

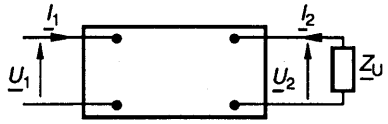


Fig. 78.

A partir des paramètres de transfert, nous écrivons compte tenu de $\underline{U}_2 = -\underline{Z}_u \underline{I}_2$:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{AU}_2 + \underline{BI}_2}{\underline{CU}_2 + \underline{DI}_2} = \frac{\underline{B} - \underline{AZ}_u}{\underline{D} - \underline{CZ}_u}$$

10.5.2. Impédance de sortie $\underline{Z}_S$

C'est l'impédance du générateur de Thévenin équivalent au quadripôle attaqué par un générateur d'impédance $\underline{Z}_g$. La détermination de $\underline{Z}_S$ conduit au schéma de la figure 79.

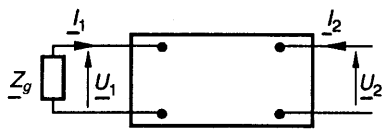


Fig. 79.

Les équations $\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{AU}_2 + \underline{BI}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{CU}_2 + \underline{DI}_2 \end{cases}$ peuvent être résolues en $(\underline{U}_2, \underline{I}_2)$, fonctions de $(\underline{U}_1, \underline{I}_1)$.

Compte tenu de l'égalité $\underline{AD} - \underline{BC} = -1$, il vient :

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = -\underline{DU}_1 + \underline{BI}_1 \\ \underline{I}_2 = \underline{CU}_1 - \underline{AI}_1 \end{cases}$$

$$\underline{Z}_S = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{-\underline{DU}_1 + \underline{BI}_1}{\underline{CU}_1 - \underline{AI}_1} = -\frac{\underline{B} + \underline{DZ}_g}{\underline{A} + \underline{CZ}_g}.$$

10.5.3. Relations remarquables

Remarquons que :

- l'impédance d'entrée à sortie court-circuitée ($\underline{Z}_u = 0$) s'écrit $\underline{Z}_{ecc} = \dfrac{\underline{\underline{B}}}{\underline{D}}$;
- l'impédance d'entrée à sortie ouverte ($\underline{Z}_u \infty$) s'écrit $\underline{Z}_{eo} = \dfrac{\underline{\underline{A}}}{\underline{C}}$;
- l'impédance de sortie à entrée court-circuitée ($\underline{Z}_g = 0$) s'écrit $\underline{Z}_{Scc} = -\dfrac{\underline{\underline{B}}}{\underline{A}}$;
- l'impédance de sortie à entrée ouverte ($\underline{Z}_g \infty$) s'écrit $\underline{Z}_{So} = -\dfrac{\underline{\underline{D}}}{\underline{C}}$.

Nous en déduisons les relations suivantes :

$$\frac{\underline{\underline{Z}}_{ecc}}{\underline{\underline{Z}}_{eo}} = \frac{\underline{\underline{Z}}_{Scc}}{\underline{\underline{Z}}_{So}};$$

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_{eo}\frac{\underline{\underline{Z}}_{Scc} + \underline{Z}_u}{\underline{\underline{Z}}_{So} + \underline{Z}_u};$$

$$\underline{Z}_S = \underline{Z}_{So}\frac{\underline{\underline{Z}}_{ecc} + \underline{Z}_g}{\underline{\underline{Z}}_{eo} + \underline{Z}_g}.$$

10.5.4. Impédance itérative ou caractéristique $\underline{Z}_C$

C'est l'impédance telle que le quadripôle, fermé sur cette impédance $\underline{Z}_C$, présente une impédance d'entrée égale à $\underline{Z}_C$. Elle est donc définie par l'équation :

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{\underline{B}} - \underline{A}\underline{Z}_C}{\underline{\underline{D}} - \underline{C}\underline{Z}_C},$$

soit $$\underline{Z}_C^2 - \underline{Z}_C\left(\frac{\underline{\underline{A}}}{\underline{C}} + \frac{\underline{\underline{D}}}{\underline{C}}\right) + \frac{\underline{\underline{B}}}{\underline{C}} = 0.$$

$\underline{Z}_C$ est donc solution de l'équation :

$$\underline{Z}_C^2 + \underline{Z}_C(\underline{Z}_{So} - \underline{Z}_{eo}) - \underline{Z}_{Scc}\underline{Z}_{eo} = 0.$$

Si le quadripôle est symétrique, $\underline{Z}_{So} = \underline{Z}_{eo}$, $\underline{Z}_{Scc} = \underline{Z}_{ecc}$, l'équation s'écrit :

$$\underline{Z}_C^2 = \underline{Z}_{ecc} \cdot \underline{Z}_{eo}.$$

10.6. LIGNE À RETARD

La ligne à retard (*fig.* 80) est un quadripôle dont les valeurs instantanées des grandeurs d'entrée et de sortie, obéissent aux équations :

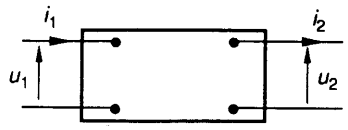


Fig. 80.

$$\begin{cases} u_2(t) = u_1(t-\tau) \\ i_2(t) = i_1(t-\tau) \end{cases} \quad \textit{où } \tau \textit{ est le temps de retard.}$$

En régime sinusoïdal ces équations se traduisent par :

$u_1(t) = U_M \cos \omega t$,
$u_2(t) = U_M \cos \omega(t-\tau) = U_M \cos(\omega t - \omega\tau)$;
$i_1(t) = I_M \cos(\omega t - \theta)$,
$i_2(t) = I_M \cos[\omega(t-\tau) - \theta]$
$= I_M \cos(\omega t - \theta - \omega\tau)$.

Ce qui conduit aux relations suivantes entre les grandeurs complexes associées :

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{U}_1 \, e^{-j\omega\tau} \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \, e^{-j\omega\tau} \end{cases}$$

10.6.1. Conséquences

- A partir des relations précédentes, on peut écrire : $\dfrac{\underline{\underline{U}}_2}{\underline{I}_2} = \dfrac{\underline{\underline{U}}_1}{\underline{I}_1}$, et conclure que le quadripôle doit être fermé sur son impédance caractéristique.
- Les relations de départ, devant être vérifiées quelle que soit la forme du signal d'entrée, doivent donc être indépendantes de la pulsation en régime sinusoïdal; nous en concluons que :
  - l'**impédance caractéristique** doit être indépendante de la pulsation : elle doit donc être **résistive**;
  - le **déphasage** φ introduit entre les grandeurs d'entrée et de sortie doit être **proportionnel à la pulsation** :

$$\varphi = \omega\tau.$$

10.6.2. Étude d'une structure particulière

La ligne étudiée est réalisée par la mise en cascade de n quadripôles identiques en T conformément au schéma de la figure 81.

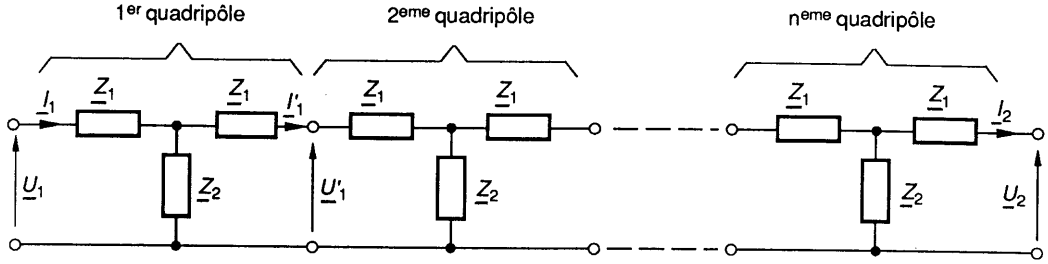


Fig. 81.

• La relation $\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$ est vérifiée si la ligne est fermée sur l'impédance caractéristique du quadripôle en T élémentaire. Elle est définie par :

$$\underline{Z}_C^2 = \underline{Z}_{ecc} \cdot \underline{Z}_{eo}$$

avec $\underline{Z}_{eo} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$

et $\underline{Z}_{ecc} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_1^2 + 2\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$,

soit $\underline{Z}_C^2 = \underline{Z}_1^2 + 2\underline{Z}_1\underline{Z}_2$.

Cette impédance devant être résistive, les impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ doivent être telles que : **$\underline{Z}_1^2 + 2\underline{Z}_1\underline{Z}_2$ soit un réel positif.**

• Afin de déterminer les conditions dans lesquelles on peut écrire $\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = e^{-j\omega\tau}$ calculons pour un quadripôle élémentaire le rapport $\frac{\underline{I}'_1}{\underline{I}_1}$ et cherchons les conditions conduisant à $\frac{\underline{I}'_1}{\underline{I}_1} = e^{-j\beta}$, avec β réel.

Nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}'_1} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}'_1} \\ \underline{U}_1 - \underline{U}'_1 = \underline{Z}_1(\underline{I}_1 + \underline{I}'_1) \\ \underline{U}_1 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{I}_1 - \underline{Z}_2\underline{I}'_1 \end{cases}$$

car le quadripôle élémentaire est, de proche en proche, fermé sur son impédance caractéristique, soit

$$\frac{\underline{U}_1 - \underline{U}'_1}{\underline{U}_1} = 1 - \frac{\underline{U}'_1}{\underline{U}_1} = 1 - \frac{\underline{I}'_1}{\underline{I}_1}$$

$$= \frac{\underline{Z}_1(\underline{I}_1 + \underline{I}'_1)}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{I}_1 - \underline{Z}_2\underline{I}'_1}$$

$$= \frac{\underline{Z}_1\left(1 + \frac{\underline{I}'_1}{\underline{I}_1}\right)}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) - \underline{Z}_2\frac{\underline{I}'_1}{\underline{I}_1}}$$

ou encore

$$\left(\frac{\underline{I}'_1}{\underline{I}_1}\right)^2 - 2\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}\left(\frac{\underline{I}'_1}{\underline{I}_1}\right) + 1 = 0.$$

Calculons la valeur du nombre réel β tel que $e^{-j\beta}$ soit solution de cette équation (transmission sans affaiblissement), il vient :

$$e^{-2j\beta} - 2\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2} e^{-j\beta} + 1 = 0$$

ou $e^{j\beta} + e^{-j\beta} = 2\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}$

soit

$$\cos\beta = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}.$$

Les impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ doivent donc être telles que $\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}$ **soit un nombre réel compris entre -1 et $+1$.**

Soit encore

$$-1 \leqslant 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \leqslant +1$$

ou $$-1 \leqslant \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \leqslant 0.$$

Si les conditions précédentes sont réalisées, la ligne retarde le signal d'un angle $n\beta$ tel que $\cos\beta = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}$.

Sachant qu'on souhaite avoir $\varphi = n\beta = \omega\tau$, il faut que les impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ soient telles que :

$$n \arccos\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2} = \omega\tau,$$

condition qui semble, à priori, très difficile à satisfaire en toute rigueur.

Exemple de réalisation

Le quadripôle élémentaire est réalisé conformément au schéma de la figure 82.

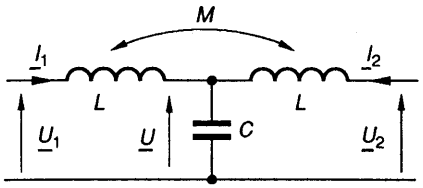


Fig. 82.

M est le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux bobines.

A partir des équations reliant les valeurs instantanées :

$$u_1 = L\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} + u,$$

$$u_2 = L\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} + u;$$

on déduit les équations entre nombres complexes associés :

$$\underline{U}_1 = jL\omega\underline{I}_1 - jM\omega\underline{I}_2 + \frac{1}{jC\omega}(\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

$$= j(L + M)\omega\underline{I}_1 + (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)\left(\frac{1}{jC\omega} - jM\omega\right),$$

$$\underline{U}_2 = jL\omega\underline{I}_2 - jM\omega\underline{I}_1 + \frac{1}{jC\omega}(\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

$$= j(L + M)\omega\underline{I}_2 + (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)\left(\frac{1}{jC\omega} - jM\omega\right).$$

On peut donc donner, du schéma de la figure 82, le schéma équivalent de la figure 83. On l'identifie au quadripôle élémentaire de la figure 81 avec :

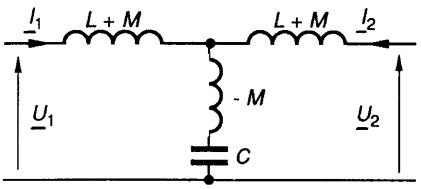


Fig. 83.

$$\underline{Z}_1 = j(L + M)\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega} - jM\omega.$$

• La condition de transmission sans affaiblissement (c'est-à-dire β réel) se traduit par :

$$-1 \leqslant \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \leqslant 0,$$

soit

$$-1 \leqslant -\frac{(L + M)\omega}{2\left(\frac{1}{C\omega} + M\omega\right)} \leqslant 0.$$

Condition qui se résume à

$$(L + M)\omega \leqslant 2\left(\frac{1}{C\omega} + M\omega\right)$$

soit

$$\omega < \omega_C = \sqrt{\frac{2}{(L - M)C}}$$

ω_C est la pulsation de coupure de la ligne à retard.

• L'impédance caractéristique $\underline{Z}_C$, solution de l'équation :

$$\underline{Z}_C^2 = \underline{Z}_1^2 + 2\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = \underline{Z}_1(\underline{Z}_1 + 2\underline{Z}_2)$$

s'écrit :

$$\underline{Z}_C^2 = j(L + M)\omega\left[j(L - M)\omega + \frac{2}{jC\omega}\right]$$

$$= 2\frac{L + M}{C}\left[1 - \frac{(L - M)C\omega^2}{2}\right]$$

$$\underline{Z}_C^2 = 2\frac{L + M}{C}\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2\right]$$

Pour $\omega < \omega_C$, $\underline{Z}_C^2$ est bien un réel positif et $\underline{Z}_C$ est une résistance. Mais, on ne peut considérer que cette résistance est indépendante de la pulsation que si cette dernière est très petite par rapport à ω_C soit :

$$\omega \ll \omega_C = \sqrt{\frac{2}{(L - M)C}}.$$

L'impédance caractéristique s'écrivant alors

$$Z_C = \sqrt{\frac{2(L + M)}{C}}.$$

• Déterminons les conditions dans lesquelles le déphasage β, défini par $\cos\beta = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}$ est proportionnel à la pulsation ω :

$$\cos\beta = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2},$$

soit

$$1 - \cos\beta = 2\sin^2\frac{\beta}{2} = -\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = -\frac{j(L + M)\omega}{\frac{1}{jC\omega} - jM\omega}$$

soit

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(L + M)C\omega^2}{2[1 + MC\omega^2]}},$$

équation qu'on voudrait pouvoir identifier à $\beta = \omega t_0$, où t_0 est le temps de retard apporté par un quadripôle élémentaire.

Il est bien évident que cette identification ne pourra être réalisée qu'approximativement.

Effectuons un développement limite de l'équation précédente :

$$\sin\frac{\beta}{2} \approx \frac{\beta}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\beta}{2}\right)^3$$

$$\approx \omega\sqrt{\frac{(L+M)C}{2}}\sqrt{1-MC\omega^2}$$

$$\approx \omega\sqrt{\frac{(L+M)C}{2}}\left(1-\frac{MC\omega^2}{2}\right),$$

soit

$$\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{48} = \omega\sqrt{\frac{(L+M)C}{2}} - \omega^3\sqrt{\frac{(L+M)C}{2}}\frac{MC}{2}.$$

Pour que la relation $\beta = \omega t_0$ soit vérifiée quel que soit ω, nous devons écrire

$$t_0 = 2\sqrt{\frac{(L+M)C}{2}},\quad t_0^3 = 48\sqrt{\frac{(L+M)C}{2}}\frac{MC}{2}.$$

La compatibilité de ces deux équations exige :

$$8\frac{(L+M)C}{2}\sqrt{\frac{(L+M)C}{2}} = 48\frac{MC}{2}\sqrt{\frac{(L+M)C}{2}},$$

soit : $\boldsymbol{M = 0{,}2L.}$

Le temps de retard t_0 correspondant à un quadripôle élémentaire s'écrit alors :

$$t_0 = 2\sqrt{3}\sqrt{MC} = \sqrt{2{,}4LC}$$

En résumé

Pour les pulsations ω très inférieures à

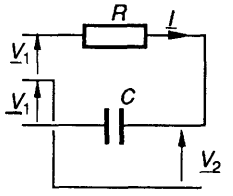
$$\omega_C = \sqrt{\frac{2}{0{,}8CL}} = \sqrt{\frac{5}{2LC}}$$

et pour $M = 0{,}2L$:

- l'impédance caractéristique du quadripôle s'écrit $\underline{Z_C} = \sqrt{\dfrac{2{,}4L}{C}}$;
- la ligne à retard, retarde le signal de $\tau = n\sqrt{2{,}4LC}$, où n est le nombre de cellules élémentaires montées en cascade.

EXERCICES

1. Soit le circuit de la figure ci-dessous, attaqué par deux générateurs identiques, sinusoïdaux, de valeur efficace V_1, et de pulsation ω.

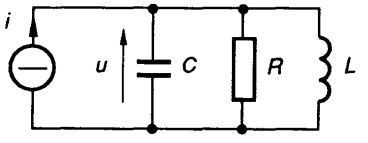


1° Calculer, en fonction de $\underline{V_1}$, R, C et ω, le courant $\underline{I}$ dans l'ensemble R, C.

2° Calculer le rapport $\underline{T} = \dfrac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}}$, en fonction de $jRC\omega$.

3° En déduire que la tension de sortie $\underline{V_2}$ garde une valeur efficace constante, que l'on déterminera, et qu'elle est déphasée par rapport à $\underline{V_1}$, d'un angle que l'on précisera.

2. Le schéma équivalent d'un émetteur est donné ci-dessous :



1° Calculer, en régime sinusoïdal permanent de pulsation Ω, l'impédance du circuit R, L, C parallèle, et la mettre sous la forme

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + jQ_0\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_0} - \dfrac{\Omega_0}{\Omega}\right)}$$

Calculer Q_0 et Ω_0 en fonction de R, L et C.
Montrer que, lorsque $\omega = \Omega - \Omega_0 \ll \Omega_0$, $\underline{Z}$ se met sous la forme

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + 2jQ_0\dfrac{\omega}{\Omega_0}}.$$

2° Le courant i est un courant sinusoïdal modulé en amplitude :

$$i(t) = I_0(1 + m\cos\omega_m t)\cos\Omega_0 t$$

a) Montrer que le générateur de courant $i(t)$ est équivalent à la mise en parallèle de trois générateurs de courant $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, dont on précisera les amplitudes et les fréquences.

b) Calculer les trois tensions $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$, créées respectivement par chaque générateur de courant, supposé seule source d'alimentation.

c) Par application du théorème de superposition, calculer la tension $u(t)$ correspondant à l'alimentation du circuit R, L, C par le courant $i(t)$, et la mettre sous la forme

$$u(t) = U_0[1 + m'\cos(\omega_m t + \varphi)]\cos\Omega_0 t.$$

Calculer les éléments U_0, m', φ en fonction de m, ω_m, Ω_0 et Q_0.
Conclure en analysant l'influence, sur la transmission du signal.

3.
Dans tout le problème, les circuits sont soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω.
On utilisera la notation complexe. Toutes les grandeurs complexes seront représentées par des lettres majuscules et seront comptées positivement conformément aux conventions matérialisées par fléchés sur les schémas.

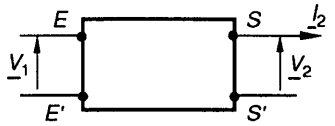


Fig. 1.

A) Pour tout quadripôle passif et linéaire, de bornes d'entrée EE' et de bornes de sortie SS', il est permis d'écrire :

$$\underline{I}_2 = \underline{S}\,\underline{V}_1 - \underline{Y}\,\underline{V}_2$$

1° Donner une signification physique des paramètres $\underline{S}$ et $\underline{Y}$.
Proposer, par un schéma explicite, un générateur équivalent au quadripôle vu de ses bornes de sortie.

2° On envisage deux quadripôles du type précédent, l'un de paramètres $\underline{S}_1$, $\underline{Y}_1$ et l'autre de paramètres $\underline{S}_2$, $\underline{Y}_2$.
Établir et justifier la loi simple de formation des paramètres $\underline{S}$, $\underline{Y}$ du quadripôle obtenu par la mise en parallèle des deux quadripôles envisagés (entrées en parallèle, sorties en parallèle).

3° Formuler les paramètres $\underline{S}$ et $\underline{Y}$ pour les deux quadripôles représentés ci-dessous :

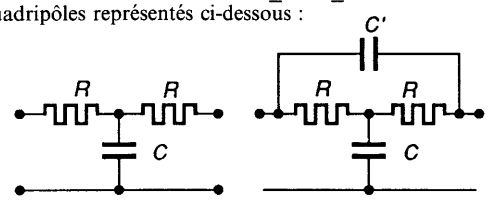


Fig. 2a.

Fig. 2b.

On posera : $RC\omega = x$
$C' = nC$ (n = nombre réel positif différent de 0).
Montrer que

- pour le quadripôle Q_1 (*fig.* 2.*a*)

$$\underline{S}_1 = \frac{1}{R(2 + jx)} \quad \text{et} \quad \underline{Y}_1 = \frac{1}{R}\,\frac{1 + jx}{2 + jx};$$

- pour le quadripôle Q_2 (*fig.* 2.*b*)

$$\underline{S}_2 = \frac{1 - nx^2 + 2njx}{R(2 + jx)} \quad \text{et} \quad \underline{Y}_2 = \frac{1 - nx^2 + j(2n + 1)x}{R(2 + jx)}.$$

B) Deux quadripôles Q_1, Q_2, de paramètres respectifs $\underline{S}_1$, $\underline{Y}_1$ et $\underline{S}_2$, $\underline{Y}_2$, sont associés suivant schéma (*fig.* 3) à un amplificateur A

- de résistance d'entrée infinie ($\underline{I}_+ = \underline{I}_- = 0$);
- d'amplification A ($\underline{V} = A\underline{U}'$).

1° Montrer que la transmittance $\underline{T} = \dfrac{\underline{V}}{\underline{U}}$ peut s'exprimer par :

$$\underline{T} = \frac{-\underline{S}_1 A}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{S}_2 A}$$

2° Que devient la valeur $\underline{T}_\infty$ de $\underline{T}$ quand on choisit pour A une valeur infiniment grande?

3° On désire que l'écart relatif $\dfrac{\underline{T}_\infty - \underline{T}}{\underline{T}}$ reste inférieur ou au plus égal à une valeur ε donnée.

En déduire, en fonction des paramètres de Q_1 et Q_2, l'expression de la valeur limite à attribuer à A.

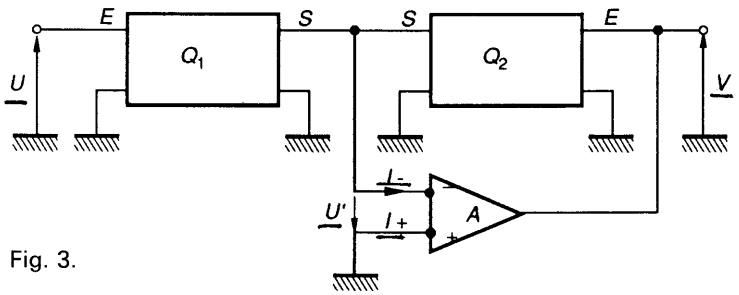


Fig. 3.

C) On adopte comme quadripôles associés à l'amplificateur opérationnel :

pour Q_1 → celui de la figure 2.*a*;

pour Q_2 → celui de la figure 2.*b*;

On donne : R = 10 kiloohms; C = 10 nanofarads.

1° Quelle valeur limite A_0 faut-il attribuer à A pour que $\dfrac{-\underline{T}_\infty - \underline{T}}{\underline{T}} \leqslant 0{,}1$ % dans le domaine des pulsations les plus basses concevables?

2° On admet, pour la suite, que A est pratiquement infini.
Montrer que la transmittance T peut se mettre sous la forme :

$$\underline{T} = \frac{k}{1 + \mu x^2 + 2j\lambda x},$$

où k, μ et λ sont des constantes réelles que l'on explicitera.

3° Application :
a) On désire que $G = 20 \log_{10} |\underline{T}|$ soit nul pour ω = 20 000 rd/s.
Quelle valeur faut-il adopter pour $C' = nC$?
b) Montrer que, pour cette valeur de C', G passe par une valeur maximale pour une pulsation ω_1 que l'on calculera.
Calculer, en outre, G_{max}.
c) Tracer le diagramme $G = F(\log_{10} \omega)$.

3 signaux périodiques

1. THÉORÈME DE FOURIER

On démontre, dans le cours de mathématiques, que, sous certaines conditions de dérivation et de continuité, toute fonction $f(t)$, périodique de période T, peut être mise sous la forme d'une série de Fourier :

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$A_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t$$
$$B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

REMARQUES

- A_0 *est la valeur moyenne de la fonction périodique* $f(t)$.
- *Le terme général*

$$A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t$$

est une fonction sinusoïdale, appelée ***harmonique d'ordre n;*** *il peut être mis sous la forme*

$$A_n\left[\cos n\omega t + \frac{B_n}{A_n}\sin n\omega t\right];$$

en posant $\tan\varphi_n = \dfrac{B_n}{A_n}$, *il s'écrit :*

$$\frac{A_n}{\cos\varphi_n}[\cos n\omega t\cos\varphi_n + \sin n\omega t\sin\varphi_n].$$

$\dfrac{A_n}{\cos\varphi_n}$ *s'exprime, en fonction de* A_n *et* B_n *par*

$$A_n\sqrt{1+\tan^2\varphi_n} = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}.$$

L'harmonique d'ordre n devient :

$C_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$ avec $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\varphi_n = \arctan\dfrac{B_n}{A_n}$

et la fonction périodique $f(t)$ *s'écrit :*

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

- *L'harmonique d'ordre* 1 *est appelé* ***fondamental.***

1.1. CAS PARTICULIERS

1.1.1. La fonction $f(t)$ est paire

La relation $f(t) = f(-t)$, quel que soit t, conduit à :

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t + B_n\sin n\omega t)$$
$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t - B_n\sin n\omega t)$$

La relation précédente devant être vérifiée quel que soit t, on en conclut que :

$$B_n = 0 \text{ quel que soit } n.$$

1.1.2. La fonction $f(t)$ est impaire

La relation $f(t) = -f(-t)$, quel que soit t, conduit à :

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t + B_n\sin n\omega t)$$
$$= -A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-A_n\cos n\omega t + B_n\sin n\omega t).$$

Cette relation devant être vérifiée quel que soit t, nous concluons :

$$A_n = 0 \text{ quel que soit } n.$$

1.2. SPECTRE DE FRÉQUENCES

Le signal périodique $f(t)$ peut être mis sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales dont les pulsations sont des multiples entiers de $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On obtient la représentation spectrale du signal $f(t)$ en portant en ordonnée l'amplitude des harmoniques et en abscisse les pulsations correspondantes, ce qui conduit au diagramme de la figure 1.

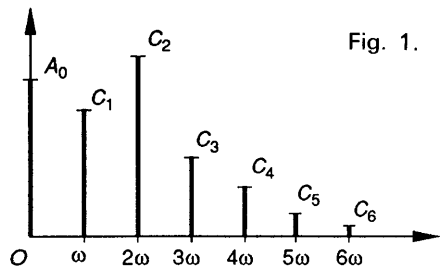


Fig. 1.

1.3. EXEMPLES DE DÉCOMPOSITION

1.3.1. Signal rectangulaire

Considérons le signal de la figure 2. La fonction $f(t)$ de période T est impaire. La décomposition ne contiendra donc que des termes en sinus.

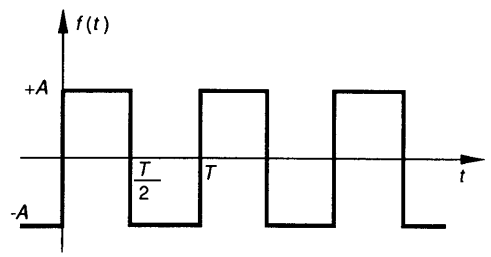


Fig. 2.

Soit :

$$A_0 = 0,$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2A}{T}\left\{\left[+\frac{\cos n\omega t}{n\omega}\right]_{-T/2}^{0} + \left[-\frac{\cos n\omega t}{n\omega}\right]_{0}^{T/2}\right\}$$

$$= \frac{2A}{\pi n}[1 - \cos n\pi],$$

avec $\cos \pi n = 1$ pour n pair, $\cos \pi n = -1$ pour n impair.

La décomposition ne comprend donc que des harmoniques d'ordre impair.
Le signal rectangulaire s'écrit :

$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\left[\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \ldots\right]$$

Son spectre est donné à la figure 3.

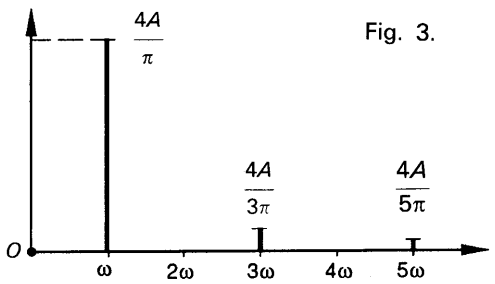


Fig. 3.

1.3.2. Signal triangulaire

Considérons le signal $g(t)$ (*fig.* 4). La valeur moyenne A_0 de $g(t)$ est nulle. $g(t)$ est obtenu par intégration du signal carré de la figure 2. L'identification de la pente entre les instants 0 et $\frac{T}{2}$ conduit à :

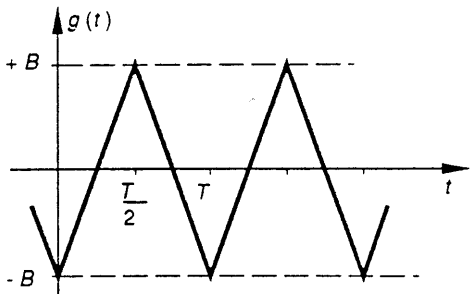


Fig. 4.

$$A = \frac{2B}{\frac{T}{2}} = \frac{4B}{T}.$$

L'intégration permet d'écrire $g(t)$ sous la forme :

$$g(t) = K - \frac{4A}{\pi}\left[\frac{\cos \omega t}{\omega} + \frac{\cos 3\omega t}{3^2\omega} + \ldots + \frac{\cos(2n+1)\omega t}{(2n+1)^2\omega} + \ldots\right].$$

La valeur moyenne de $g(t)$ étant nulle, il en est de même pour la constante d'intégration K, ce qui donne pour $g(t)$, compte tenu de $\omega T = 2\pi$ et $A = \frac{4B}{T}$:

$$g(t) = -\frac{8B}{\pi^2}\left[\cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} + \frac{\cos 5\omega t}{5^2} + \ldots\right].$$

Le spectre de fréquences est donné à la figure 5.

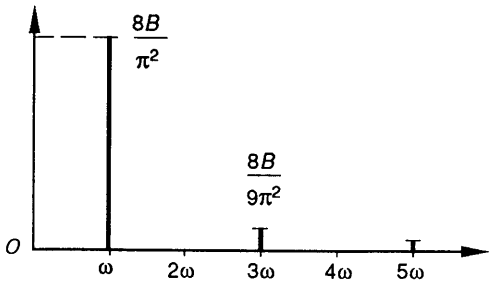


Fig. 5.

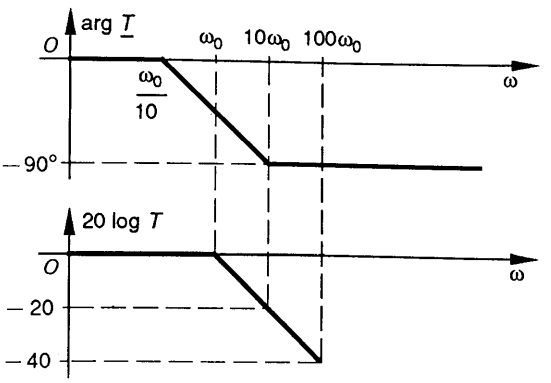


Fig. 6.

On peut remarquer que les harmoniques d'ordre supérieur à 1 sont beaucoup moins importants pour le signal triangulaire que pour le signal carré, ce qui est naturel car la forme du signal triangulaire est plus proche de celle du signal sinusoïdal.

Remarquons que, pour les signaux que nous venons d'étudier, l'amplitude des harmoniques décroît à mesure que leur ordre augmente. C'est le cas de la plupart des signaux que nous aurons à considérer. Ils nécessiteront donc pour leur transmission une bande passante limitée.

1.4. APPLICATION

Considérons le signal formé par la superposition d'un signal périodique $f(t)$ de période T_m et d'un signal sinusoïdal $A_C \cos \omega_C t$. Supposons de plus, que la fonction $f(t)$ soit telle que les harmoniques de pulsation supérieure à $10\omega_m = \dfrac{20\pi}{T_m}$ soient négligeables.

Afin de supprimer le terme sinusoïdal, on présente le signal à l'entrée d'un filtre passe bas du premier ordre dont la fonction de transfert est $\underline{T} = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$. Les diagrammes de Bode correspondants (*fig.* 6) ont été étudiés au paragraphe 9.1.6 du chapitre 2.

• La transmission, sans déformation, du signal périodique, impose qu'aucun harmonique ne soit atténué. Elle impose aussi qu'ils ne soient pas déphasés par la fonction de transfert $\underline{T}$; ce qui conduit à la relation :

$$\frac{\omega_0}{10} > 10\omega_m = \frac{20\pi}{T_m}.$$

• Supposons que le signal sinusoïdal, de pulsation ω_C, puisse être considéré comme éliminé, si son amplitude est divisée par 100, (− 40 décibels), par la traversée du filtre passe-bas. Nous en déduisons la relation :

$$\omega_C > 100\omega_0,$$

La pulsation de coupure du filtre doit donc être telle que :

$$\frac{200\pi}{T_m} < \omega_0 < \frac{\omega_C}{100}.$$

1.5. ANALYSEUR DE SPECTRE ANALOGIQUE

Proposons-nous de déterminer le schéma synoptique d'un appareil permettant de mesurer l'amplitude des harmoniques d'un signal périodique $f(t)$.

Les coefficients de la décomposition :

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t \, dt$$

et

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega t \, dt.$$

apparaissent comme deux fois la valeur moyenne du produit de la fonction $f(t)$ par un signal sinusoïdal. Nous en déduisons le schéma synoptique d'un analyseur de spectre (*fig.* 7).

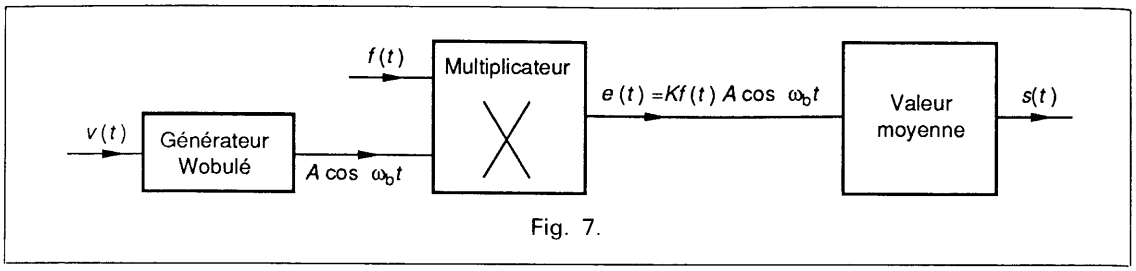


Fig. 7.

• Le générateur Wobulé fournit un signal sinusoïdal $A \cos \omega_b t$, dont la pulsation ω_b varie linéairement avec la tension de wobulation $v(t)$.

Soit $C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$, l'harmonique d'ordre n de $f(t)$. Le signal correspondant, à la sortie du multiplicateur, s'écrit :

$$e(t) = KAC_n \cos \omega_b t \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$
$$= \frac{KAC_n}{2}[\cos[(\omega_n - \omega_b)t + \varphi_n] + \cos[(\omega_n + \omega_b)t + \varphi_n]].$$

• Le dispositif permettant de prendre la valeur moyenne de $e(t)$ peut être réalisé par un filtre passe-bas du deuxième ordre dont la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + 2\mathrm{j}m\frac{\omega}{\omega_0} + \left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{avec} \quad m = 0{,}7.$$

Lorsque la pulsation ω_b est telle que

$$|\omega_n - \omega_b| < \omega_0,$$

le signal $s(t)$ est une sinusoïde d'amplitude $K\frac{AC_n}{2}$, proportionnelle à l'amplitude C_n de l'harmonique. Il suffit alors de détecter l'amplitude de cette sinusoïde pour obtenir C_n.
Si aucun harmonique ne fournit, dans $e(t)$, un signal sinusoïdal de pulsation inférieure à ω_0, le signal $s(t)$ est nul.

• La tension de wobulation $v(t)$ est une rampe (*fig.* 8).

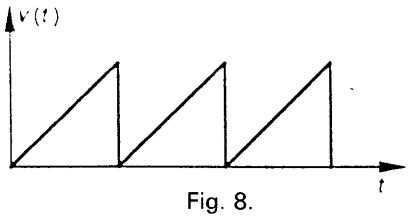


Fig. 8.

Cette rampe est présentée simultanément au générateur wobulé et à l'entrée X d'un oscilloscope. L'entrée Y étant attaquée par le signal donnant l'amplitude de $s(t)$, nous obtenons un oscillogramme conforme à celui donné à la figure 9.

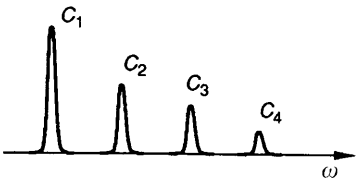


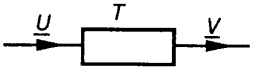
Fig. 9.

• La pulsation ω_b étant proportionnelle à $v(t)$, l'axe horizontal peut être gradué en pulsation alors que l'axe vertical, gradué en volts, permet la mesure des C_n.

REMARQUES

a) *La largeur des raies, obtenues sur l'oscillogramme de la figure 9, est égale à $2\omega_0$. Elle est donc d'autant plus faible que le filtre passe-bas est plus serré sur le continu. L'oscillogramme se rapproche ainsi du spectre théorique. L'analyseur permet de séparer des raies dont les pulsations ne diffèrent pas de plus de $2\omega_0$.*

b) *La fonction de transfert du filtre passe-bas :*



$$\underline{T} = \frac{\underline{V}}{\underline{U}} = \frac{1}{1 + 2\mathrm{j}m\frac{\omega}{\omega_0} + \left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

résulte de l'équation différentielle

$$v + \frac{2m}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} = u,$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 u.$$

Nous avons vu, au premier chapitre, que, pour une attaque par un échelon de tension et pour $m = 0{,}7$, le temps de réponse à 5 % est minimum et vaut $0{,}44\frac{2\pi}{\omega_0}$.

Afin de laisser, au filtre passe-bas, le temps de répondre, il est nécessaire que la tension de wobulation varie suffisamment lentement et ce d'autant plus que la pulsation de coupure ω_0 est plus faible.

c) Nous en déduisons que ***l'obtention de raies fines est incompatible avec une analyse rapide,*** *ce qui est parfaitement intuitif (vite et bien étant difficilement conciliables).*

d) En pratique le filtre passe-bas est remplacé par un filtre passe-bande centré sur ω_0. *Les raies apparaissent alors, non plus lorsque* $\omega_b = \omega_n$, *mais lorsque la différence* $|\omega_b - \omega_n|$ *est égale à* ω_0. *Le principe général restant le même.*

1.6. VALEUR EFFICACE D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

Soit un signal périodique $f(t)$ dont la décomposition s'écrit :

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n),$$

sa valeur efficace F_{eff} est telle que :

$$F_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

$f^2(t)$ comprend les termes suivants :

$$f^2(t) = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \cos^2(n\omega t + \varphi_n)$$

$$+ 2A_0 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ k\neq n}}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_n C_k \cos(n\omega t + \varphi_n)\cos(k\omega t + \varphi_k).$$

On peut vérifier que :

- la valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale est nulle;
- la valeur moyenne du produit de deux fonctions sinusoïdales de pulsations différentes est nulle;
- la valeur moyenne du carré d'une fonction sinusoïdale est égale à 1/2.

Nous en déduisons que :

$$\boxed{F_{\text{eff}}^2 = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2,}$$

le carré de la valeur efficace d'une fonction périodique est la somme du carré de sa valeur moyenne et des carrés des valeurs efficaces des harmoniques.

1.7. DÉFINITIONS

1.7.1. Facteur de forme

Le facteur de forme F est défini par le rapport entre la valeur efficace et la valeur moyenne :

$$F = \frac{F_{\text{eff}}}{F_{\text{moy}}} = \frac{\sqrt{A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2}}{A_0}.$$

- Pour un signal continu $F = 1$.
- Pour un signal sinusoïdal redressé double alternance (*fig.* 10) :

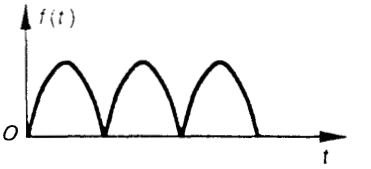


Fig. 10.

$$F = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11.$$

1.7.2. Taux d'ondulation

On définit l'ondulation par les variations de la fonction $f(t)$ autour de sa valeur moyenne A_0 (*fig.* 11).

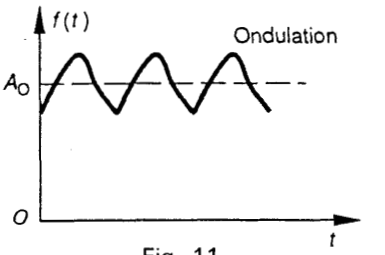


Fig. 11.

Elle est donc égale à

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

Le taux d'ondulation β est le rapport entre la valeur efficace de l'ondulation et la valeur moyenne de la fonction périodique $f(t)$, soit :

$$\beta = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2}}{A_0}.$$

Remarquons que le facteur de forme F et le taux d'ondulation β sont liés par la relation : $F^2 = 1 + \beta^2$.

1.7.3. Taux de distorsion harmonique

Le taux de distorsion harmonique τ est défini par le rapport entre la valeur efficace de l'ensemble des harmoniques d'ordre supérieur à 1, et la valeur efficace du fondamental, soit :

$$\tau = \frac{\sqrt{C_2^2 + C_3^2 + \ldots + C_n^2}}{C_1}.$$

Il permet de chiffrer la pureté d'un signal sinusoïdal.

Remarque : Pour un signal présentant un faible taux de distorsion, on peut assimiler $\frac{C_1}{\sqrt{2}}$ à la valeur efficace F_{eff} du signal $f(t)$. On obtient alors :

$$\tau \approx \frac{\sqrt{C_2^2 + C_3^2 + \ldots + C_n^2}}{F_{\text{eff}}\sqrt{2}}.$$

Cette remarque est utilisée dans certains distorsiomètres : la détermination du taux de distorsion commence par la mesure de la valeur efficace, $F_{\text{eff}} \approx C_1/\sqrt{2}$, puis le signal est passé à travers un filtre réjecteur qui élimine le fondamental. On mesure alors la valeur efficace du signal résiduel,

$$C_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + C_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) + \ldots,$$

et on en déduit le taux de distorsion.

2. FORME EXPONENTIELLE

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'on peut associer à la grandeur sinusoïdale $A \cos(\omega t + \varphi)$ le nombre complexe $\underline{A} = A\, e^{j\varphi}$.

- A la grandeur $A_n \cos n\omega t$ est associé le nombre complexe A_n.
- A la grandeur

$$B_n \sin n\omega t = B_n \cos\left(n\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

est associé le nombre complexe

$$B_n\, e^{-j\pi/2} = -jB_n.$$

- A l'harmonique n, on associe donc le nombre complexe $A_n - jB_n = \underline{C}_n$, soit

$$\underline{C}_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)[\cos n\omega t - j \sin n\omega t]\, dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt.$$

L'amplitude C_n de l'harmonique d'ordre n est donnée par le module de $\underline{C}_n$. Sa phase est obtenue par l'argument de $\underline{C}_n$.

Soit :

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

avec
$$\begin{cases} \underline{C}_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt, \\ C_n = |\underline{C}_n| \quad \text{et} \quad \varphi_n = \arg \underline{C}_n. \end{cases}$$

2.1. EXEMPLES DE CALCUL À L'AIDE DE LA FORME EXPONENTIELLE

2.1.1. Signal carré de rapport cyclique *a*

Soit le signal de la figure 12 :

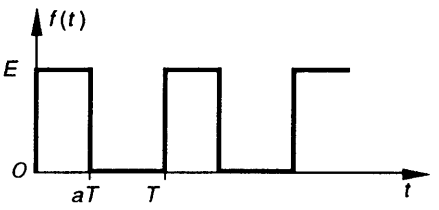


Fig. 12.

Sa valeur moyenne est $A_0 = aE$.

$$\underline{C}_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt = \frac{2}{T}\int_0^{aT} E\, e^{-jn\omega t}\, dt$$

$$= \frac{-2E}{jTn\omega}[e^{-jn\omega t}]_0^{aT} = \frac{-2E}{2\pi nj}[e^{-jna2\pi} - 1]$$

$$= \frac{2E}{\pi n}\, e^{-jna\pi}\left[\frac{e^{jna\pi} - e^{-jna\pi}}{2j}\right]$$

$$\underline{C}_n = 2aE\frac{\sin \pi na}{\pi na}\, e^{-jna\pi}.$$

L'amplitude de l'harmonique n est donc :

$$C_n = 2aE\frac{\sin \pi na}{\pi na}.$$

Le spectre correspondant est donné par la figure 13.

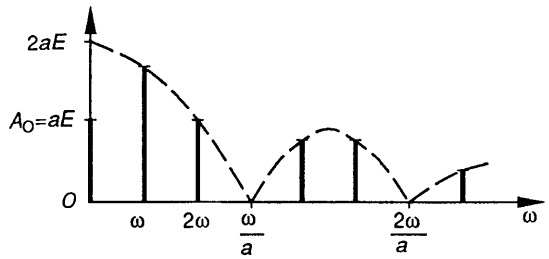


Fig. 13.

Remarquons que si le rapport cyclique est a, les harmoniques d'ordre $\frac{k}{a}$ sont nuls.

2.1.2. Peigne de Dirac

Le peigne de Dirac est obtenu, à partir du signal de la figure 12, en faisant tendre le rapport cyclique a vers zéro, tout en maintenant la surface aET constante et égale à I (intensité d'une impulsion).

Nous obtenons ainsi la courbe de la figure 14.

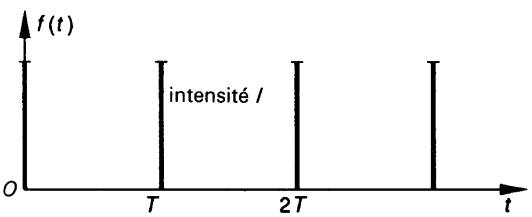


Fig. 14.

L'amplitude de l'harmonique n s'écrit alors :

$$C_n = 2aE = \frac{2I}{T}.$$

Le spectre correspondant est donné à la figure 15.

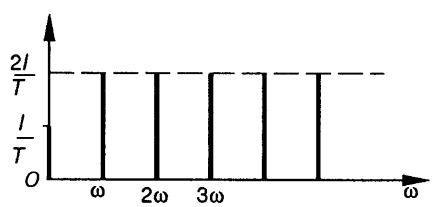


Fig. 15.

L'observation des spectres précédents nous permet de conclure que la **bande nécessaire à la transmission d'un signal est d'autant plus importante que ses variations sont plus rapides.**

3. SPECTRE BILATÉRAL

Remarquons que l'harmonique n peut être écrit sous la forme :

$$A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t$$

$$= A_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + B_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}$$

$$= \frac{A_n - jB_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{A_n + jB_n}{2} e^{-jn\omega t}.$$

Des expressions

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t \, dt$$

et

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega t \, dt,$$

on déduit $A_n = A_{-n}$ et $B_n = -B_{-n}$.

Posons :

$$\underline{V}_n = \frac{1}{2}(A_n - jB_n) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt.$$

D'après les relations $A_n = A_{-n}$ et $B_n = -B_{-n}$ il vient $\underline{V}_{-n} = \frac{1}{2}(A_n + jB_n)$.

L'harmonique n peut donc être écrit sous la forme :

$$\underline{V}_n e^{jn\omega t} + \underline{V}_{-n} e^{-jn\omega t},$$

et le signal $f(t)$ devient

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\underline{V}_n e^{jn\omega t} + \underline{V}_{-n} e^{-jn\omega t}),$$

soit :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{V}_n e^{jn\omega t}$$

avec $$\underline{V}_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt.$$

Il apparaît, dans cette expression, des harmoniques pour les fréquences s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$, d'où le nom de spectre bilatéral.

REMARQUES

a) Dans les transformations précédentes :

— $f(t)$ est resté le signal périodique réel;

— $\underline{V}_n$ et $\underline{V}_{-n}$ sont des nombres complexes et n'ont pas d'existence réelle, mais :

- *$2|\underline{V}_n| = |\underline{V}_n| + |\underline{V}_{-n}| = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ correspond à l'amplitude de l'harmonique n;*

• $\arg \underline{V}_n = \arctan -\dfrac{B_n}{A_n} = -\varphi_n$ *correspond à la phase de l'harmonique n;*

b) si le signal $f(t)$ est sinusoïdal;

$$f(t) = \cos(\omega t + \varphi),$$

on peut écrire :

$$f(t) = \frac{e^{j\omega t} e^{j\varphi} + e^{-j\omega t} e^{-j\varphi}}{2}$$

soit

$$\underline{V}_1 = \frac{e^{j\varphi}}{2} \quad \underline{V}_{-1} = \frac{e^{-j\varphi}}{2},$$

d'où le spectre bilatéral du signal sinusoïdal (fig. 16).

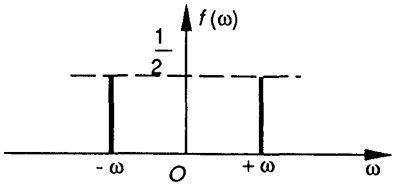


Fig. 16.

4. TRANSFORMÉE DISCRÈTE DE FOURIER

L'apparition de microprocesseurs puissants et rapides permet aujourd'hui d'agir sur le signal à partir de valeurs numériques prélevées à des instants régulièrement espacés. Ces valeurs sont appelées *échantillons.* L'ensemble des opérations effectuées numériquement constitue le *traitement numérique du signal.*

Proposons-nous, dès lors, de déterminer le spectre d'un signal périodique $f(t)$ à partir d'échantillons prélevés à la fréquence :

$$F_e = \frac{1}{T_e},$$

F_e est la fréquence d'échantillonnage,
$f(nT_e)$ est la valeur numérique de l'échantillon prélevé à l'instant nT_e.

Afin d'approcher le spectre du signal $f(t)$, prélevons N échantillons

$$f(0),\ f(T_e),\ f(2T_e),\ \ldots,\ f((N-1)T_e),$$

calculons la fonction complexe :

$$\underline{A}(\omega) = \sum_{n=0}^{n=N-1} f(nT_e)\, e^{-j\omega nT_e},$$

et cherchons si la fonction $\underline{A}(\omega)$ a un rapport avec le spectre de $f(t)$.

4.1. CAS D'UNE SINUSOÏDE

Soit le signal sinusoïdal $f(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ dont le spectre bilatéral est donné figure 17.

Calculons l'expression $\underline{A}(\omega)$ correspondante :

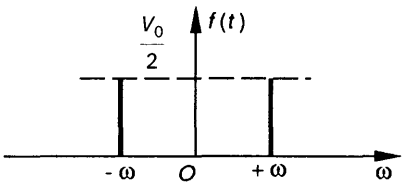


Fig. 17.

$$\underline{A}(\omega) = \sum_{n=0}^{n=N-1} V_0 \cos[n\omega_0 T_e + \varphi]\, e^{-jn\omega T_e}$$

$$= \sum_{n=0}^{n=N-1} V_0 \frac{e^{jn\omega_0 T_e} e^{j\varphi} + e^{-jn\omega_0 T_e} e^{-j\varphi}}{2} e^{-jn\omega T_e},$$

$$\underline{A}(\omega) = \frac{V_0}{2}\left[e^{j\varphi} \sum_{n=0}^{n=N-1} e^{-jnT_e(\omega-\omega_0)} + e^{-j\varphi} \sum_{n=0}^{n=N-1} e^{-jnT_e(\omega+\omega_0)} \right].$$

Compte tenu de

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} e^{-an} = 1 + e^{-a} + \ldots + e^{-a(N-1)} = \frac{1 - e^{-aN}}{1 - e^{-a}},$$

il vient :

$$\underline{A}(\omega) = \frac{V_0}{2}\left[e^{j\varphi} \frac{1 - e^{-jNT_e(\omega-\omega_0)}}{1 - e^{-jT_e(\omega-\omega_0)}} + e^{-j\varphi} \frac{1 - e^{-jNT_e(\omega+\omega_0)}}{1 - e^{-jT_e(\omega+\omega_0)}} \right].$$

Posons :

$$\underline{E}(\omega) = \frac{1 - e^{-jNT_e\omega}}{1 - e^{-jT_e\omega}}$$

$$= e^{-j\frac{N-1}{2}T_e\omega} \frac{e^{j\frac{N}{2}T_e\omega} - e^{-j\frac{N}{2}T_e\omega}}{e^{j\frac{T_e}{2}\omega} - e^{-j\frac{T_e}{2}\omega}}$$

$$= e^{-j\frac{N-1}{2}T_e\omega} \frac{\sin\frac{NT_e}{2}\omega}{\sin\frac{\omega T_e}{2}}.$$

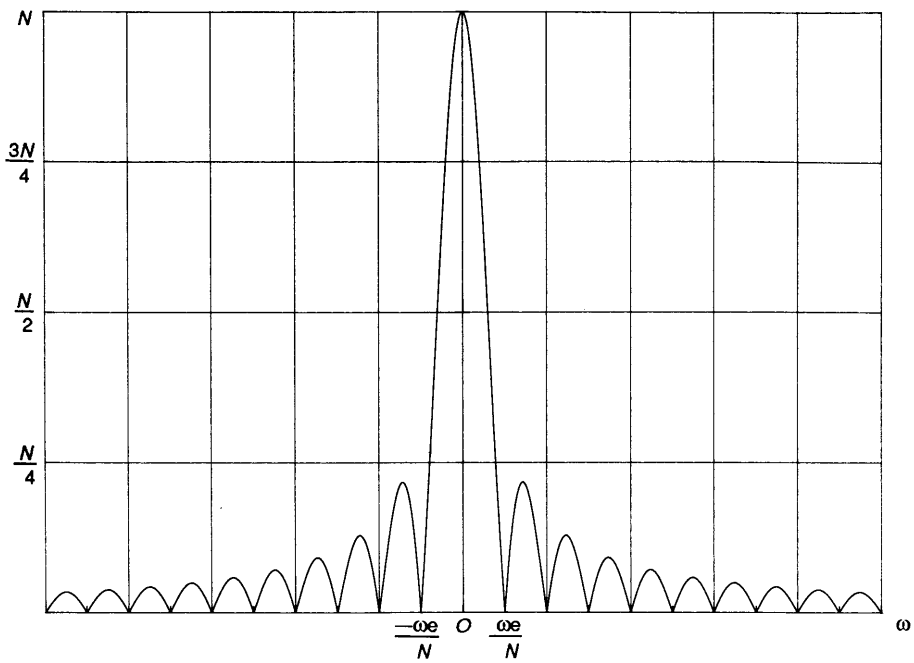


Fig. 18.

Étudions alors, les variations du module $|\underline{E}(\omega)|$ de $\underline{E}(\omega)$:

$$|\underline{E}(\omega)| = \left| \frac{\sin \frac{NT_e}{2}\omega}{\sin \frac{\omega T_e}{2}} \right|.$$

La courbe de variations est donnée à la figure 18.

Propriétés

- $|\underline{E}(\omega)|$ est maximum pour $\omega = 0$ et $|\underline{E}(\omega)|_{max} = N$.
- La courbe est symétrique par rapport à la verticale $\omega = 0$.
- Le rapport des amplitudes du pic central et du premier lobe secondaire varie très peu avec N.
- $|\underline{E}(\omega)|$ est périodique, de période

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = 2\pi F_e.$$

- $\left| \underline{E}\left(\frac{2\pi k}{NT_e}\right) \right| = \left| \frac{\sin k\pi}{\sin \frac{k\pi}{N}} \right| = 0$: la largeur du lobe central est $\frac{2\omega_e}{N}$, la largeur des lobes latéraux est $\frac{\omega_e}{N}$.

Conséquences pour la détermination du spectre de $f(t)$

$\underline{A}(\omega)$ peut être écrit sous la forme :

$$\underline{A}(\omega) = \frac{V_0}{2}[e^{j\varphi}\underline{E}(\omega - \omega_0) + e^{-j\varphi}E(\omega + \omega_0)].$$

Le module d'une somme, n'est, bien sûr, pas égal à la somme des modules, cependant si NT_e est suffisamment grand, les deux fonctions $|\underline{E}(\omega - \omega_0)|$ et $|\underline{E}(\omega + \omega_0)|$ n'empiètent pas l'une sur l'autre et on peut écrire :

$$|\underline{A}(\omega)| \approx \frac{V_0}{2}[|\underline{E}(\omega - \omega_0)| + |\underline{E}(\omega + \omega_0)|].$$

Dans le cas où F_e est supérieur à $2f_0 = 2\frac{\omega_0}{2\pi}$, nous obtenons la représentation de la figure 19.

L'observation de la courbe dans la bande $\Delta\omega$ permet, en mesurant l'amplitude des lobes centraux $\left(\frac{NV_0}{2}\right)$, de reconstituer le spectre bilatéral de la sinusoïde $V_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Remarquons qu'une telle analyse n'est possible que si F_e est supérieure à $2f_0$, soit $\omega_e > 2\omega_0$; s'il en était autrement les raies situées aux pulsations $\omega_e - \omega_0$ et $\omega_0 - \omega_e$ entreraient dans le domaine d'analyse, de largeur $\Delta\omega$, et perturberaient la mesure.

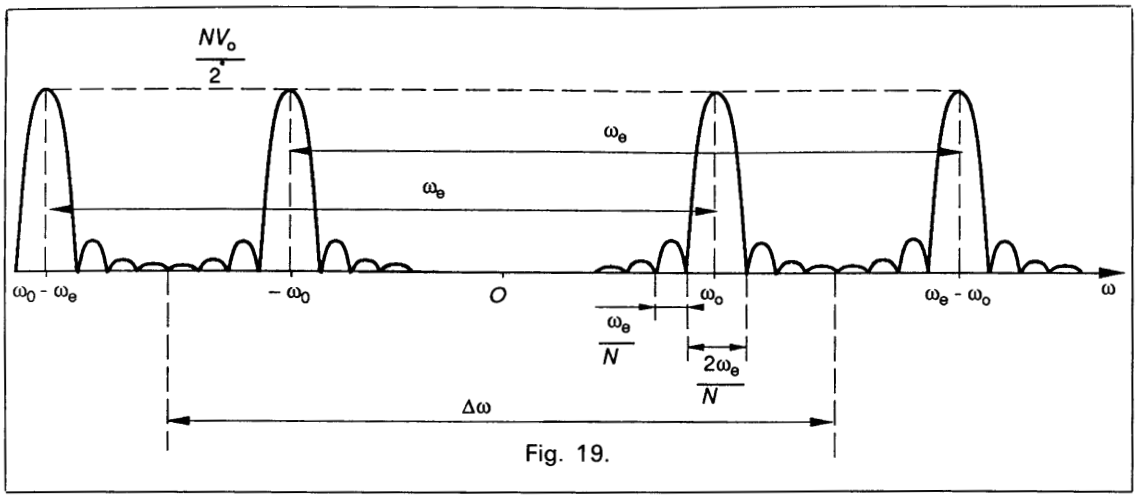


Fig. 19.

La condition $F_e > 2f_0$, connue sous le nom de **Théorème de Shannon** sera reprise dans le chapitre concernant les signaux échantillonnés.

4.2. CAS D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

Soit le signal périodique, dont le spectre unilatéral, limité à ω_M, est donné à la figure 20.

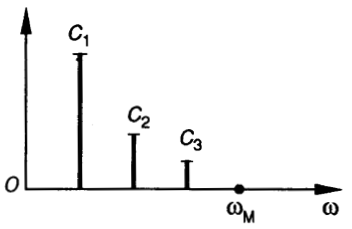


Fig. 20.

Si le nombre d'échantillons N est suffisamment grand pour que les différents $\underline{E}(\omega)$ n'empiètent pas l'un sur l'autre, on peut répéter pour chaque sinusoïde composante de $f(t)$ le même raisonnement.

On obtient pour $|\underline{A}(\omega)|$ la courbe de la figure 21.

Si la condition $F_e > 2f_M$ est respectée, l'observation de $|\underline{A}(\omega)|$ entre 0 et ω_M permet de déterminer le spectre de $f(t)$ par l'amplitude des lobes centraux.

4.3. CALCUL NUMÉRIQUE DU SPECTRE

La fonction $|\underline{A}(\omega)|$ est calculée numériquement à partir d'échantillons prélevés sur le signal $f(t)$. On ne peut donc pas la déterminer complètement de façon continue. On ne peut que la calculer pour des valeurs particulières de la pulsation.

Revenons au cas d'un signal $f(t)$ sinusoïdal et considérons la fonction $|\underline{A}(\omega)|$ de la figure 19. On peut alors distinguer deux éventualités.

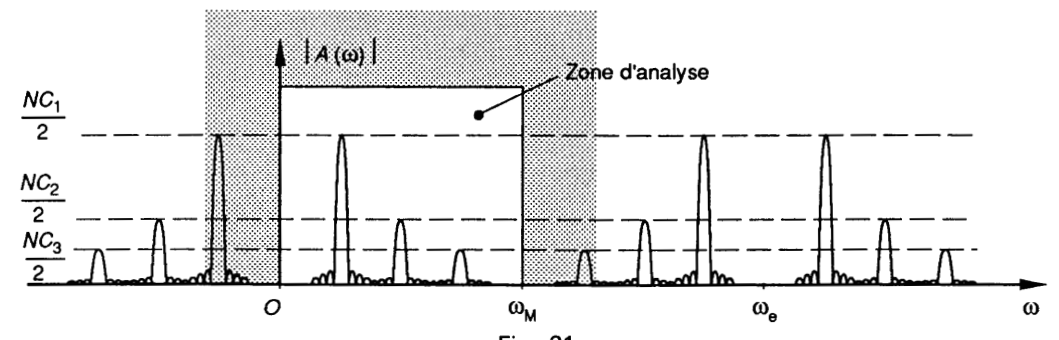


Fig. 21.

a) *La pulsation ω_0 est un multiple entier de la pulsation d'échantillonnage.* On balaie alors la courbe $|\underline{A}(\omega)|$ avec le pas d'incrémentation $\frac{\omega_e}{N}$.

Toutes les valeurs de $|\underline{A}(\omega)|$ obtenues sont nulles sauf celle correspondant à la pulsation ω_0 qui vaut $\frac{NV_0}{2}$. On reconstitue ainsi exactement le spectre de la sinusoïde en calculant le module de l'expression :

$$\underline{A}\left(k\frac{\omega_e}{N}\right) = \sum_{n=0}^{n=N-1} f(nT_e)\, e^{-2\pi j\frac{kn}{N}}.$$

Pour des valeurs de k allant de 0 à $N-1$, on décrit ainsi une plage d'analyse, s'étendant de 0 à ω_e, qui contient la raie de pulsation ω_0 et son image à la pulsation $\omega_e - \omega_0$.

Cette expression est connue sous le nom de *transformée rapide de Fourier* (T.F.R.), ou, en anglais, fast fourier transform (F.F.T.).

Rappelons qu'elle ne peut conduire au spectre de $f(t)$ que s'il y a synchronisation entre l'échantillonnage et le signal $\left(\omega_0 = k\frac{\omega_e}{N}\right)$, ce qui ne constitue pas une condition évidente à réaliser.

Si la synchronisation n'est pas réalisée, on calcule $|\underline{A}(\omega)|$ pour des points mal répartis et la courbe obtenue s'écarte du spectre théorique; la valeur maximale de la courbe obtenue n'a d'ailleurs aucun rapport avec l'amplitude de la sinusoïde (*fig.* 22).

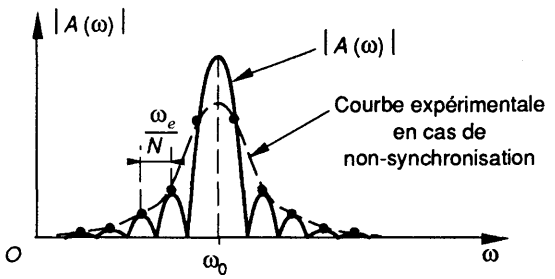


Fig. 22.

b) *Pour éviter les effets de la non synchronisation,* on peut balayer la courbe $|\underline{A}(\omega)|$ avec un pas plus faible $\left(\text{par exemple } \frac{\omega_e}{4N}\right)$. On obtient ainsi 4 points par lobe secondaire et 8 points sur le lobe central et la courbe expérimentale passe très près du maximum.

On calcule ainsi :

$$\underline{A}\left(k\frac{\omega_e}{4N}\right) = \sum_{n=0}^{n=N-1} f(nT_e)\, e^{-2\pi j\frac{kn}{4N}}.$$

Pour des valeurs de k comprises entre 0 et $N-1$, on décrit une plage d'analyse s'étendant de 0 à $\frac{\omega_e}{4}$ qui ne contient que la raie de pulsation ω_0.

Exemple de simulation sur ordinateur

Soit le signal $f(t) = \cos 2\pi f_0 t$ avec $f_0 = 500$ Hz, sur lequel on prélève 128 échantillons à la fréquence $F_e = 10$ kHz ($T_e = 10^{-4}$ s).

Pour représenter le signal, on introduit donc, dans l'ordinateur, le tableau :

$$E(n) = \cos 2\pi\ 500 nT_e = \cos 0{,}1\pi n.$$

A partir de ce tableau, on calcule :

$$\underline{A}\left(k\frac{f_e}{4N}\right) = \underline{A}\left(k\frac{f_e}{512}\right) = \sum_{n=0}^{127} E(n)\, e^{-2\pi j\frac{kn}{512}}$$

$$= \sum_{n=0}^{127} E(n)\cos 2\pi\frac{kn}{512} - j\sum_{n=0}^{127} E(n)\sin 2\pi\frac{kn}{512}.$$

On commence par entrer en mémoire les tableaux $C(m) = \cos\frac{2\pi m}{512}$ et $S(m) = \sin\frac{2\pi m}{512}$ pour m compris entre 0 et 511.

Pour chaque valeur de k, comprise entre 0 et 127, on calcule :

$$R\left(k\frac{F_e}{512}\right) = \sum_{n=0}^{127} E(n)\cos 2\pi\frac{kn}{512}$$

et $$I\left(k\frac{F_e}{512}\right) = \sum_{n=0}^{127} E(n)\sin 2\pi\frac{kn}{512}.$$

puis

$$\left|A\left(k\frac{F_e}{512}\right)\right| = \sqrt{R^2\left(k\frac{F_e}{512}\right) + I^2\left(k\frac{F_e}{512}\right)}$$

Soit le programme BASIC n° 1.

Programme 1.

```
1ØDIM E(127),C(511),S(511) réservation de la mémoire pour les tableaux
2ØFOR M=ØTO 511
3ØC(M)=COS(2*PI*M/512)   } mémorisation des tableaux C(m) et S(m)
4ØS(M) =SIN(2*PI*M/512)
5ØNEXT M
6ØFOR N=ØTO 127
7ØE(N)=COS(.1*PI*N)      } mise en mémoire des échantillons E(n)
8ØNEXT N
9ØSCALE Ø,5ØØ,Ø,72
1ØØX AXIS Ø,5            } définition des axes
11ØY AXIS 25,8
12ØFOR K=ØTO 5Ø          début du balayage en fréquence.
13ØA=Ø  B=Ø
14ØFOR N=ØTO 127
15ØM=K*N
16ØIF M<512 THEN 18Ø
17ØM=M-512 ℮ GOTO 16Ø
18ØA=A+E(N)*C(M) ... calcul de Σ(0 à 127) E(n) cos 2π kn/512
19ØB=B+E(N)*S(M) ... calcul de Σ(0 à 127) E(n) sin 2π kn/512
2ØØNEXT N
21ØF=(A∧2+B∧2)∧.5 ... calcul de A(k Fe/512)
22ØPLOT K,F
23ØNEXT K
24ØEND
```

Le tracé fourni par l'ordinateur est donné figure 23.

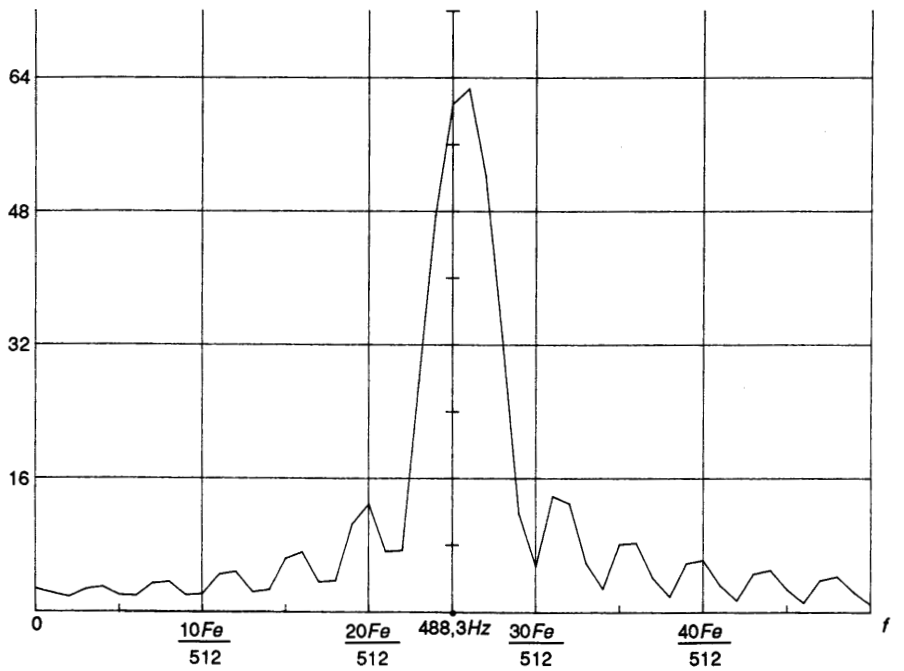


Fig. 23.

4.4. DIMINUTION DES LOBES LATÉRAUX : FENÊTRE DE HAMMING

Dans les calculs précédents, tous les échantillons ont la même importance. On dit qu'on a réalisé une *fenêtre rectangulaire.*

On conçoit que pour avoir une meilleure réponse, il faut diminuer le poids des échantillons situés aux extrémités du prélèvement, car le début de l'échantillonnage sur la fonction périodique est aléatoire.

Étudions l'effet provoqué par la multiplication de l'échantillon d'ordre n par :

$$e^{-2\pi j\frac{n}{N}}.$$

La fonction $\underline{A}(\omega)$ devient :

$$\underline{A}'(\omega) = \sum_{n=0}^{n=N-1} E(n)\, e^{-jn\omega T_e}\, e^{-2\pi j\frac{n}{N}}$$
$$= \sum_{n=0}^{n=N-1} E(n)\, e^{-jnT_e\left(\omega+\frac{2\pi}{NT_e}\right)}$$
$$= A\left(\omega+\frac{2\pi}{NT_e}\right).$$

$\underline{A}'(\omega)$ est obtenue en translatant $\underline{A}(\omega)$ de $\frac{2\pi}{NT_e}$.

La multiplication de l'échantillon d'ordre n par :

$$1-\cos\frac{2\pi n}{N} = 1-\frac{e^{+2\pi j\frac{n}{N}}}{2}-\frac{e^{-2\pi j\frac{n}{N}}}{2},$$

transforme la fonction $\underline{A}(\omega)$ en

$$\underline{A}_H(\omega) = \underline{A}(\omega) - \frac{1}{2}\left[\underline{A}\left(\omega-\frac{2\pi}{NT_e}\right)+\underline{A}\left(\omega+\frac{2\pi}{NT_e}\right)\right]$$

La fonction $\underline{E}(\omega)$, (paragraphe 4.1) devient :

$$\underline{E}_H(\omega) = e^{-j\frac{N-1}{2}T_e\omega}\,\frac{\sin\frac{NT_e\omega}{2}}{\sin\frac{\omega T_e}{2}}$$
$$-\frac{1}{2}\left[e^{-j\frac{N-1}{2}T_e\omega}\,e^{+\pi j\frac{N-1}{N}}\,\frac{\sin\frac{NT_e}{2}\left(\omega-\frac{2\pi}{NT_e}\right)}{\sin\frac{T_e}{2}\left(\omega-\frac{2\pi}{NT_e}\right)}\right.$$
$$\left.+\,e^{-j\frac{N-1}{2}T_e\omega}\,e^{-j\pi\frac{N-1}{N}}\,\frac{\sin\frac{NT_e}{2}\left(\omega+\frac{2\pi}{NT_e}\right)}{\sin\frac{T_e}{2}\left(\omega+\frac{2\pi}{NT_e}\right)}\right].$$

Si le nombre N d'échantillons est grand par rapport à 1, $e^{-j\pi\frac{N-1}{N}} \approx e^{+j\pi} \approx -1$.

$\underline{E}_H(\omega)$ s'écrit alors :

$$\underline{E}_H(\omega) = e^{-j\frac{N-1}{2}T_e\omega}$$
$$\left[\frac{\sin\frac{NT_e\omega}{2}}{\sin\frac{\omega T_e}{2}}+\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{NT_e}{2}\left(\omega-\frac{2\pi}{NT_e}\right)}{\sin\frac{T_e}{2}\left(\omega-\frac{2\pi}{NT_e}\right)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{NT_e}{2}\left(\omega+\frac{2\pi}{NT_e}\right)}{\sin\frac{T_e}{2}\left(\omega+\frac{2\pi}{NT_e}\right)}\right]$$

Le module du crochet est obtenu par addition de trois courbes :

- une courbe $|E(\omega)|$ multipliée par 1, restée centrée;
- une courbe $|E(\omega)|$ multipliée par $\frac{1}{2}$, décalée de $\frac{1}{NT_e}$;
- une courbe $|E(\omega)|$ multipliée par $\frac{1}{2}$, décalée de $-\frac{1}{NT_e}$.

La multiplication de l'échantillon d'ordre n par $1-\cos 2\pi\frac{n}{N}$ conduit à la courbe de la figure 24.

La courbe résultante $|E_H(\omega)|$ possède un lobe central de même amplitude que le lobe central obtenu avec une fenêtre rectangulaire. La largeur du lobe central est doublée et passe à $\frac{4}{NT_e}$. Les lobes latéraux sont atténués car ils sont obtenus par addition de lobes alternés.

Pour simuler l'analyse sur ordinateur, il suffit de modifier le programme BASIC du paragraphe 4.3 en modifiant la ligne 70 de la manière suivante :

```
7Ø E(N)=(COS(.1*PI*N))*
                (1-COS(2*PI*N/128))
```

La courbe fournie par l'ordinateur est donnée à la figure 25.

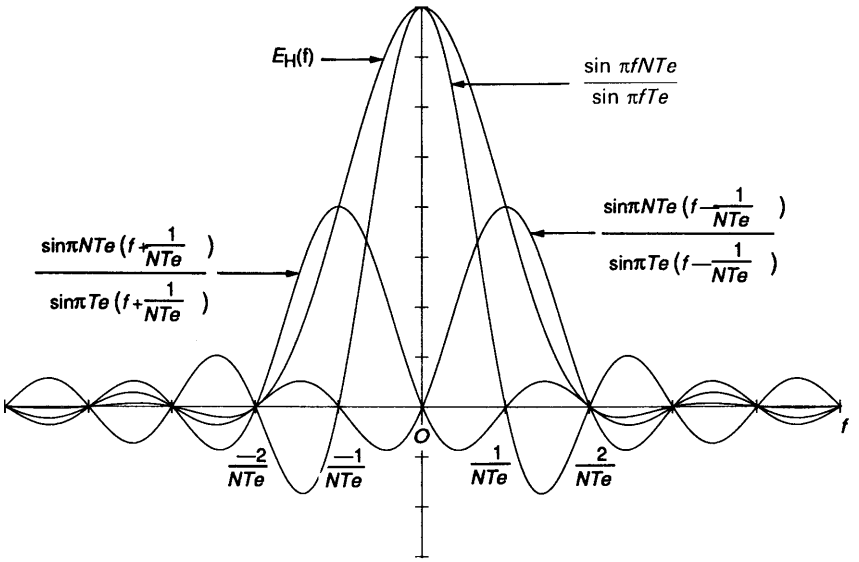


Fig. 24.

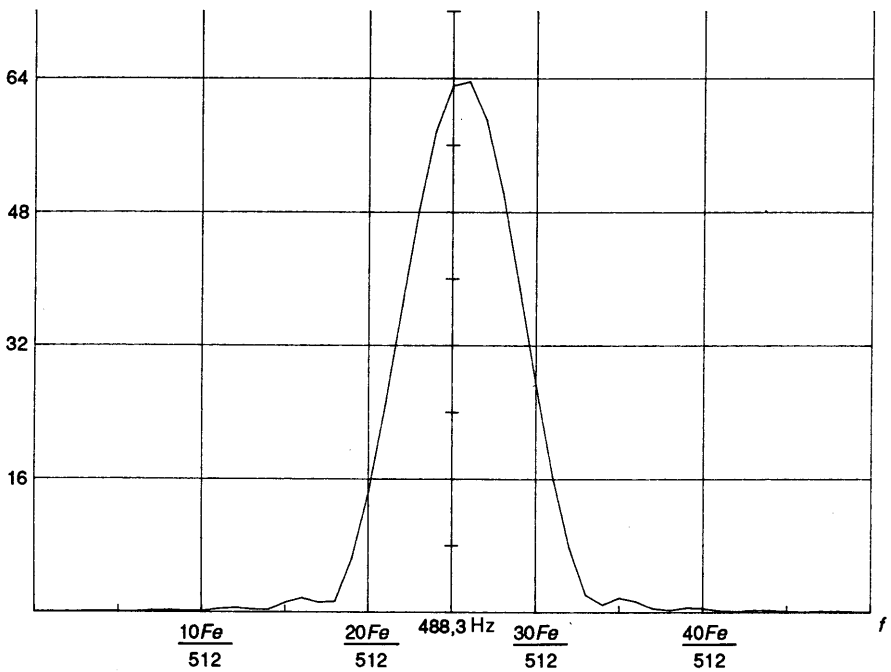


Fig. 25.

4.5. ALGORITHME DE TRANSFORMÉE RAPIDE DE FOURIER

La transformée rapide de Fourier :

$$A\left(k\frac{f_e}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_e)\, e^{-2\pi j\frac{kn}{N}}$$

avec $0 < k < N - 1$,

est très utilisée malgré ses défauts en cas de non-synchronisation.

En effet, lorsque le nombre d'échantillons N est une puissance de 2 ($N = 2^P$), elle conduit à des algorithmes de calcul très rapides et la rapidité de calcul est un des éléments essentiels du traitement numérique du signal.

Pour simplifier l'écriture, nous poserons $A\left(k\frac{f_e}{N}\right) = A(k)$, $f(nT_e) = f(n)$, $e^{-2\pi j\frac{kn}{N}} = W_N^{kn}$, soit :

$$A(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \,.\, W_N^{kn},$$ **transformée d'ordre** N.

4.5.1. Propriétés des $W_N^{k.n}$

- $W_{N/2}^{k.(n/2)} = e^{-2\pi j\frac{kn}{N}} = W_N^{kn} = W_{N/2}^{(k/2).n}$
- Pour $n < \frac{N}{2}$,

$$W_N^{k.n+\frac{N}{2}} = e^{-2\pi j\frac{kn}{N}} e^{-\pi j} = -W_N^{kn}$$

- $W_N^{k(n+p)} = e^{-2\pi j\frac{kn}{N}} . e^{-2\pi j\frac{kp}{N}} = W_N^{kn} . W_N^{kp}$.

4.5.2. Algorithme de T.F.R.

En séparant les échantillons d'ordre pair et d'ordre impair, on peut écrire :

$$A(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} f(2i) . W_N^{k.2i} + \sum_{i=0}^{N/2-1} f(2i+1) . W_N^{k(2i+1)}$$

qu'on transforme en utilisant les propriétés des $W_N^{k.n}$:

$$A(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} f(2i) W_N^{k2i} + W_N^{k.1} \sum_{i=0}^{N/2-1} f(2i+1) . W_{N/2}^{k.i}.$$

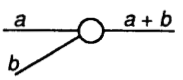
Soit $A(k) = X_1(k) + W_N^k . X_2(k)$,

avec : $X_1(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} f(2i) . W_{N/2}^{k.i}$, transformée d'ordre $N/2$ effectuée sur les échantillons d'ordre pair;

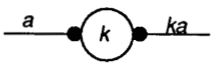
$X_2(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} f(2i+1) . W_{N/2}^{k.i}$, transformée d'ordre $N/2$ effectuée sur les échantillons d'ordre impair.

Prenons par exemple $N = 8$.

Nous représenterons une addition par :



une multiplication par :



Remarquons que

$$X_1(k + N/2) = X_1(k)$$

et $$X_2(k + N/2) = X_2(k).$$

Le calcul peut alors être représenté par la figure 26.

Comme $N = 2^P$, $\frac{N}{2}$ est un nombre pair et nous pouvons partager chacune des T.F.R. d'ordre $N/2$ en deux T.F.R. d'ordre $N/4$, suivant la représentation de la figure 27.

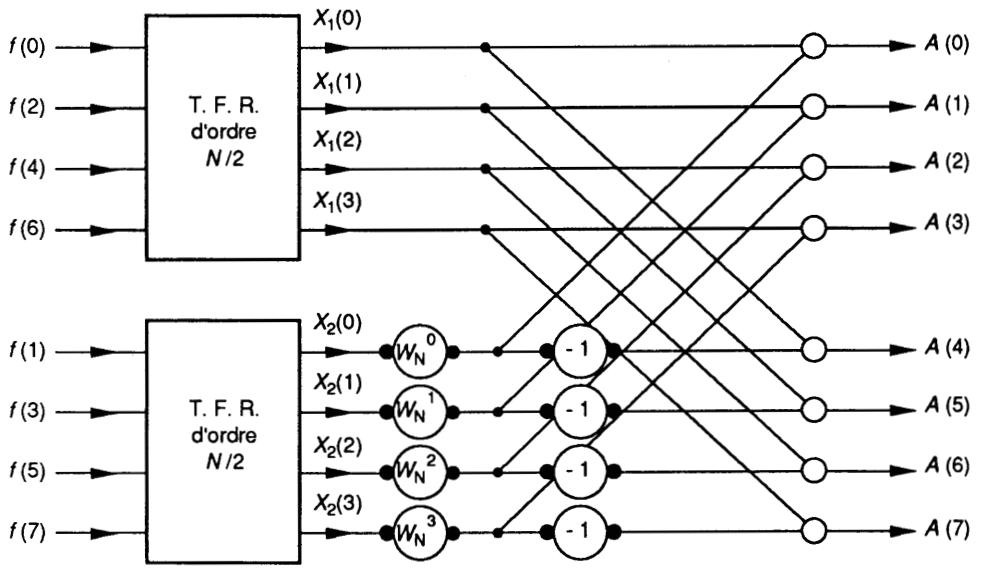


Fig. 26.

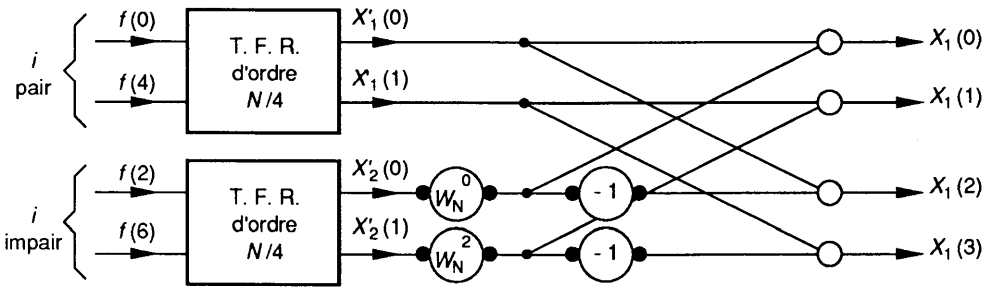


Fig. 27.

$N/4$ étant aussi un nombre pair, on partage chaque T.F.R. d'ordre $N/4$ en deux T.F.R. d'ordre $N/8$, suivant la représentation de la figure 28.

En regroupant les graphes des figures 26, 27, 28, on obtient pour $N = 8$ le graphe de la figure 29, dans lequel chaque étape du calcul est repérée par le nombre G, variant par puissance de 2, ici entre 1 et 4.

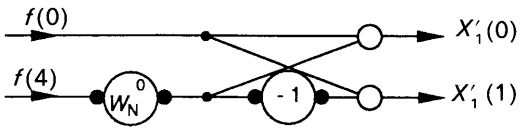


Fig. 28.

Le graphe de la figure 29, montre que les échantillons doivent, au préalable, être ordonnés de la manière suivante :

$$f(0),\quad f(4),\quad f(2),\quad f(6),$$
$$f(1),\quad f(5),\quad f(3),\quad f(7).$$

Si on représente l'ordre des échantillons par leur valeur binaire, on obtient :

000	100	010	110	001	101	011	111
0 '	4 '	2 '	6 '	1 '	5 '	3 '	7

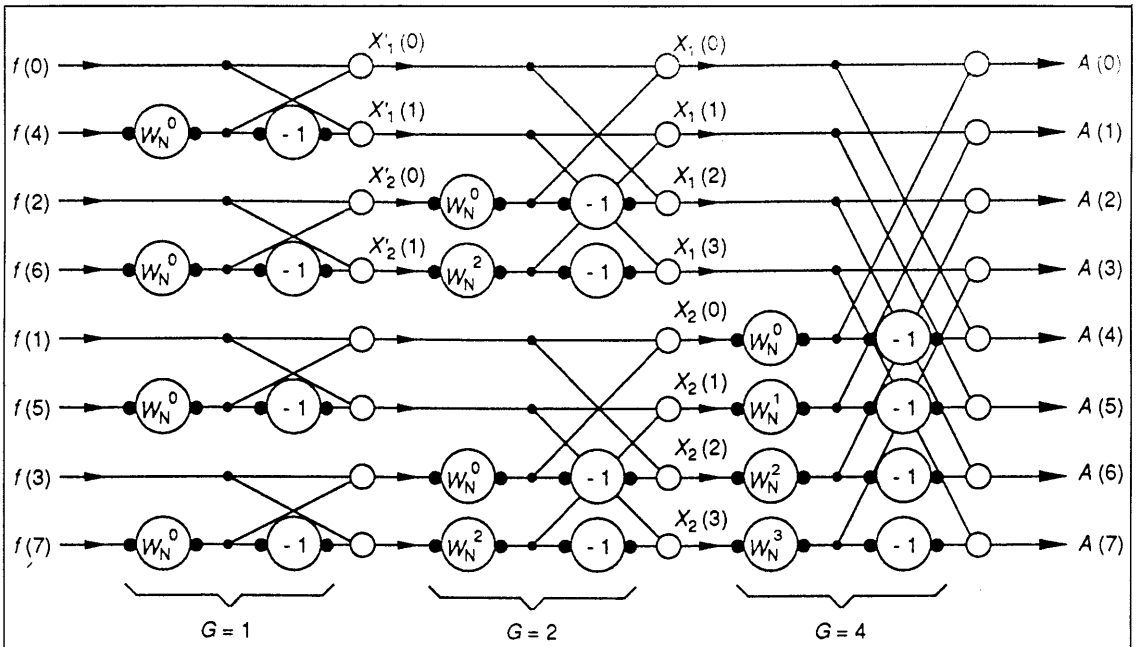


Fig. 29.

Il faut donc renverser l'ordre des bits dans la représentation binaire. On peut représenter cette transformation de la manière indiquée à la figure 30.

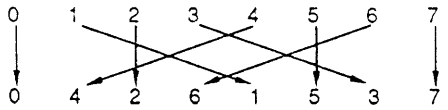


Fig. 30.

Cette remarque facilite la programmation sur microprocesseur. De plus si le microprocesseur possède l'adressage indirect indexé, on introduit la transformation de la figure 30 dans un tableau et la recherche de l'échantillon adéquat se fait automatiquement.

Pour une programmation en BASIC, la transformation peut être réalisée par le programme 2.

Programme 2

```
70 K=0
80 FOR J=0 TO 7
90 I=2
100 IF K<8/I THEN 120
110 K=K-8/I ©I=I+I © GOTO 100
120 K=K+8/I
130 IF K<=J THEN 150
140 A=R(J+1) ©R(J+1)=R(K) ©R(K)=A
150 NEXT J
```

L'indice J se déplace dans l'ordre naturel, alors que l'indice K compte dans l'ordre des bits renversés. La permutation, ne devant être effectuée qu'une fois, n'a lieu que si $K \leqslant J$.

Programme principal

Si $N = 2^P$, le programme principal comporte p étapes, correspondant chacune au passage de la transformée d'ordre $\frac{N}{2^{i+1}}$, à la transformée d'ordre $\frac{N}{2^i}$. Les étapes sont repérées par le nombre G, variant de 1 à $\frac{N}{2}$ par puissance de 2 (*fig.* 29 et 31).

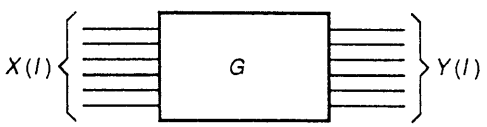


Fig. 31.

Lors d'une étape, on calcule 2^P valeurs de sortie $\underline{Y}(J)$, à partir de 2^P valeurs d'entrée $\underline{X}(J)$.

$\underline{X}(J)$ et $\underline{Y}(J)$ sont des nombres complexes. Nous utiliserons les mêmes tableaux pour mémoriser les grandeurs d'entrée et de sortie soit $R(J)$ pour la partie réelle, $I(J)$ pour la partie imaginaire.

Afin d'accélérer le calcul, on limite le nombre de multiplications complexes en calculant simultanément les valeurs de sortie reliées par un croisillon sur la figure 29, c'est-à-dire $\underline{Y}(J)$ et $\underline{Y}(J + G)$, à partir de $\underline{X}(J)$ et $\underline{X}(J + G)$.

De plus, lors de chaque étape, on regroupe les calculs faisant intervenir le même W_N^m avec m variant par pas de $\frac{2^{P-1}}{G}$ de 0 à $\frac{N}{2} - 1$.

Pour $N = 128$, on obtient le programme BASIC n° 3.

```
 10 SHORT R(127),I(127),C(63),S(
    63)
 20 FOR N=0 TO 63
 30 C(N)=COS(2*PI*N/128)
 40 S(N)=SIN(2*PI*N/128)
 50 NEXT N
 60 FOR N=0 TO 127
 70 R(N)=COS(2*PI*N/8)
 80 I(N)=0
 90 NEXT N
100 BEEP @ K=0
110 FOR J=0 TO 127
120 I=2
130 IF K<128/I THEN 150
140 K=K-128/I @ I=I+I @ GOTO 130
150 K=K+128/I
160 IF K<=J THEN 180
170 A=R(J+1) @ R(J+1)=R(K) @ R(K
    )=A
180 NEXT J
190 BEEP
200 P1=7 @ G=.5 @ L=128
210 FOR I=1 TO P1
220 G=G+G
230 L=L/2
240 M=0
250 FOR R=0 TO G-1
260 FOR J=R TO 127 STEP G+G
270 K=J+G
280 A=C(M)*R(K)+S(M)*I(K)
290 B=C(M)*I(K)-S(M)*R(K)
300 R(K)=R(J)-A
310 I(K)=I(J)-B
320 R(J)=R(J)+A
330 I(J)=I(J)+B
340 NEXT J
350 M=M+L
360 NEXT R
370 NEXT I
380 SCALE 0,127,0,64
390 XAXIS 0,5
400 YAXIS 0,8
410 FOR X=1 TO 127
420 Y=SQR(R(X)^2+I(X)^2)
430 PLOT X,Y
440 NEXT X
450 END
```

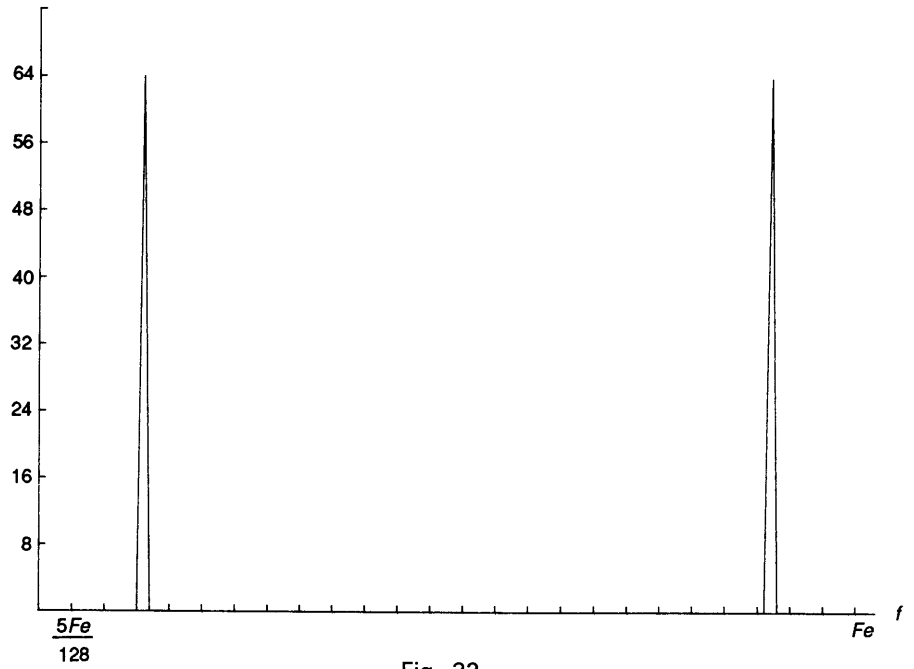


Fig. 32.

Le tracé fourni par l'ordinateur est donné figure 32.

La fréquence du signal à analyser étant $f = \frac{F_e}{8}$, la synchronisation est respectée. Nous obtenons une raie à la fréquence $\frac{F_e}{8}$ et son image à la fréquence $F_e - \frac{F_e}{8}$.

EXERCICES

1.
Un onduleur est un dispositif qui permet de convertir une tension continue en tension alternative.
Le schéma de principe d'un onduleur autonome à commande décalée est donné sur la figure 1.

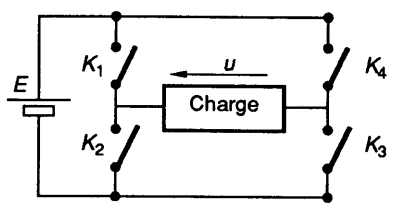


Fig. 1.

Les interrupteurs K_1, K_2, K_3, K_4, sont alternativement ouverts et fermés avec une période T suivant le chronogramme de la figure 2.

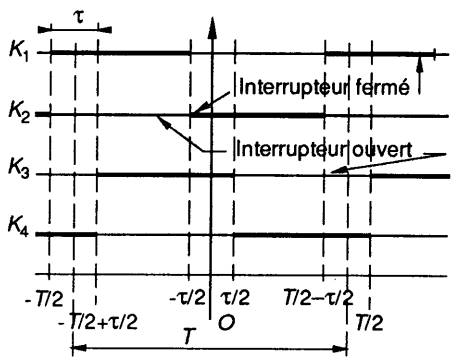


Fig. 2.

1° Tracer la courbe représentative des variations de la tension $u(t)$ et vérifier qu'il s'agit bien d'une tension périodique alternée.

2° Montrer que la décomposition en série de Fourier de la tension $u(t)$ s'écrit, en posant $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$u(t) = -\frac{4E}{\pi}\left[\cos\frac{\pi\tau}{T}\sin\omega t + \frac{\cos 3\pi\frac{\tau}{T}}{3}\sin 3\omega t + \frac{\cos 5\pi\frac{\tau}{T}}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right].$$

3° Établir la relation entre τ et T pour que l'harmonique 3 soit nul.

4° Calculer le taux de distorsion harmonique dans le cas où $\tau = 0$ (on se servira du résultat de la série entière $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$, que l'on pourra éventuellement démontrer à partir de la décomposition d'une fonction triangulaire en série de Fourier).

2.

Soit le dispositif de la figure 1 :

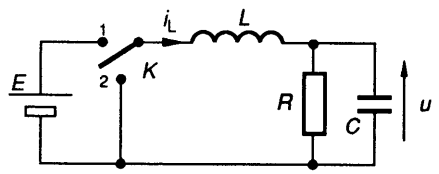


Fig. 1.

L'interrupteur K est basculé alternativement de la position 1 à la position 2 avec la période T et le rapport cyclique a.

Il a été établi que la loi de variations du courant i_L est périodique. La figure 2 donne les variations de i_L pour $a = 0{,}5$.

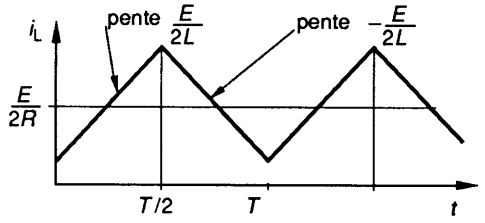


Fig. 2.

1° En posant $\omega = \frac{2\pi}{T}$, établir la décomposition de $i_L(t)$ en série de Fourier.

2° Par application du théorème de superposition et en supposant $RC\omega \gg 1$, montrer que la tension $u(t)$ s'écrit :

$$u = \frac{E}{2} - \frac{4}{\pi}\frac{E}{2LC\omega^2}\left[\sin\omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3^3} + \frac{\sin 5\omega t}{5^3} + \ldots\right].$$

3° Montrer que l'on peut, avec une bonne approximation, établir le taux d'ondulation par

$$\beta = \frac{T^2}{\pi^3\sqrt{2LC}}.$$

Conclure.

3.

Un canal de transmission numérique permet de transmettre, à l'aide d'une sinusoïde porteuse, des signaux qui ne peuvent prendre au cours du temps que deux états notés 0 et 1. Les états 0 et 1 correspondent aux motifs de la figure 1. On les appelle bits.

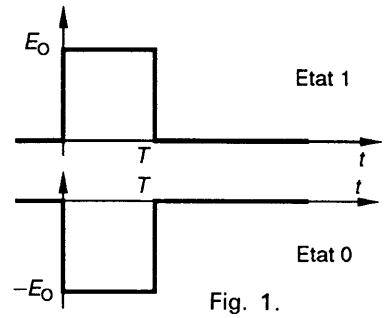


Fig. 1.

1° Émission : Le modulateur, dont le schéma synoptique est donné sur la figure 2, reçoit :

– la sinusoïde porteuse sous la forme de deux tensions déphasées de $\frac{\pi}{2}$: $A_c\cos\omega_c t$ et $A_c\sin\omega_c t$;

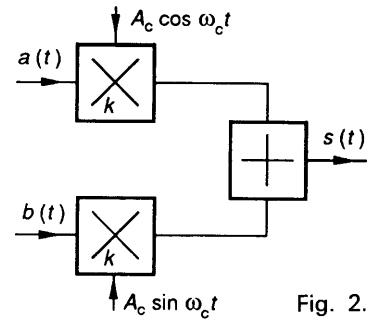


Fig. 2.

– deux signaux numériques $a(t)$ et $b(t)$ constitués par une succession de 0 et de 1.

Le modulateur contient deux multiplicateurs de constante k et un additionneur.

Montrer que le signal transmis $s(t)$ se met sous la forme

$$s(t) = kA_c[a(t)\cos\omega_c t + b(t)\sin\omega_c t] = S\cos(\omega_c t + \varphi).$$

Exprimer S en fonction de k, A_c et E_0 et montrer que la phase φ peut prendre quatre états, que l'on précisera, suivant l'état des signaux numériques $a(t)$ et $b(t)$.

2° Réception : Le démodulateur, dont le schéma synoptique est donné sur la figure 3, permet de reconstituer les signaux $a(t)$ et $b(t)$ à partir du signal reçu

$$s(t) = kA_c[a(t)\cos\omega_c t + b(t)\sin\omega_c t]$$

Le démodulateur contient deux multiplicateurs de constante k et deux filtres passe-bas.

a) On suppose, dans un premier temps, que les signaux $a(t)$ et $b(t)$ sont sinusoïdaux :

$$a(t) = b(t) = E\cos\omega t.$$

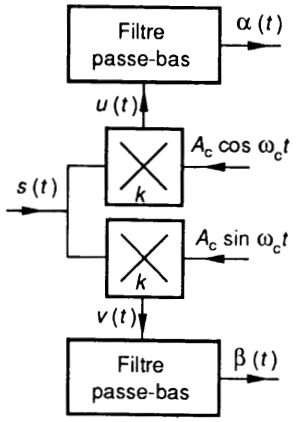


Fig. 3.

Montrer que les signaux $u(t)$ et $v(t)$ contiennent chacun trois composantes sinusoïdales dont on précisera les amplitudes et les fréquences. Tracer le spectre correspondant.

b) En réalité, les signaux $a(t)$ et $b(t)$ ne sont pas sinusoïdaux. Ils ne sont même pas périodiques, car la succession des 0 et des 1 est aléatoire. On peut cependant montrer que leur décomposition spectrale est constituée d'un bloc fréquentiel limité à la pulsation ω_M (*fig.* 4).

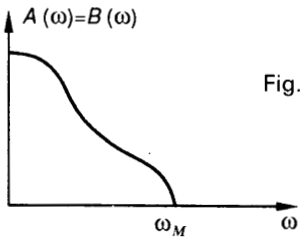


Fig. 4.

En supposant $\omega_M < \omega_c$, donner la décomposition spectrale de $u(t)$ et de $v(t)$ et montrer qu'il est possible de caler les filtres passe bas de façon à restituer par $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ les signaux $a(t)$ et $b(t)$.

c) *Application numérique :* la pulsation de la sinusoïde porteuse est

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 70 \text{ MHz}.$$

On désire effectuer une transmission à 17,2 mégabauds c'est-à-dire $17{,}2 \times 10^6$ bits par seconde, ce qui correspond à

$$T = \frac{1}{17{,}2} \times 10^{-6} = 58 \text{ ns}.$$

En supposant que la succession des 0 et des 1, sur les signaux $a(t)$ et $b(t)$ est périodique et alternée, montrer que la transmission est possible.

3° Bande de fréquence encombrée par le signal modulé

Nous supposerons dans cette question que les signaux $a(t)$ et $b(t)$ sont alternativement égaux à 0 et à 1 (*fig.* 5).

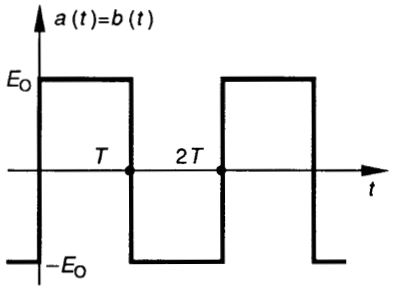


Fig. 5.

a) Décomposer le signal $a(t) = b(t)$ en série de Fourier.

b) Montrer que le signal $s(t)$ émis par le modulateur se met sous la forme

$$s(t) = S_0 \sum_{P=0}^{\infty} \frac{1}{2P+1} [\sin [[\omega_c + (2P+1)\omega]t + \varphi] - \sin [[\omega_c - (2P+1)\omega]t + \varphi]].$$

Exprimer S_0, ω et φ en fonction des données du problème : k, A_c, E_0, T.

c) En supposant qu'on obtient une transmission correcte avec $P \leqslant 2$, déterminer la largeur de la bande de fréquence encombrée par le signal émis.

d) On décale les signaux $a(t)$ et $b(t)$ d'un demi-motif, c'est-à-dire de $\frac{T}{2}$ (*fig.* 6).

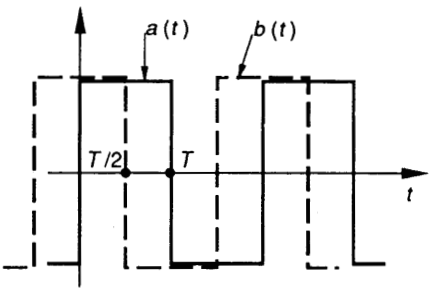


Fig. 6.

Montrer que le signal $s(t)$ émis par le modulateur se met sous la forme

$$s(t) = S_0 \sum_{P=0}^{\infty} \frac{1}{2P+1} \cos [\omega_c + (-1)^P (2P+1)\omega]t.$$

En supposant toujours $P \leqslant 2$, quelle est la bande de fréquence encombrée par le signal émis. Conclure.

4 signaux quelconques

Nous avons vu que, dans le cas général, les signaux d'entrée x, et de sortie y, d'un système, sont liés par une équation différentielle de la forme :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x.$$

Dès que l'ordre de l'équation différentielle devient supérieur à 2, la résolution mathématique directe devient compliquée. Nous allons exposer une méthode permettant d'effectuer cette résolution en transitant par un ensemble associé.

1. TRANSFORMÉE DE LAPLACE

1.1. DÉFINITION

A toute fonction du temps $f(t)$, on associe une fonction de la variable complexe $\underline{P}$, soit $\mathcal{L}[f(t)] = \underline{F}(\underline{P})$ définie par :

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = \underline{F}(\underline{P}) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-\underline{P}t}\, dt}$$

$t = 0^-$ étant un instant aussi proche de zéro que l'on veut mais avant $t = 0$.
$\underline{F}(\underline{P})$ est la transformée de Laplace de $f(t)$.

1.2. PROPRIÉTÉS

Établissons, dans le plan de Laplace, les relations correspondant aux principales opérations effectuées sur les fonctions du temps par l'équation différentielle (somme, multiplication par un nombre, dérivation, intégration).

1.2.1. Somme

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \int_{0^-}^{\infty} [f_1(t) + f_2(t)]\, e^{-\underline{P}t}\, dt = \underline{F}_1(\underline{P}) + \underline{F}_2(\underline{P}).$$

L'opération somme sur les fonctions du temps se traduit par l'opération somme sur les grandeurs de Laplace associées.

1.2.2. Multiplication par un nombre

$$\mathcal{L}[k\,.\,f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} k f(t)\, e^{-\underline{P}t}\, dt = k\underline{F}(\underline{P}).$$

L'opération multiplication par un nombre k, sur les fonctions du temps se traduit par la même opération sur les grandeurs de Laplace.

1.2.3. Dérivation

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt}\, e^{-\underline{P}t}\, dt = \left[f(t)\, e^{-\underline{P}t}\right]_{0^-}^{\infty} + \underline{P} \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-\underline{P}t}\, dt.$$

Si la fonction $f(t)$ est telle que $\lim_{t \to \infty} f(t)\, e^{-\underline{P}t} = 0$:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \underline{P}\,.\,\underline{F}(\underline{P}) - f(0^-)$$

où $f(0^-)$ est la valeur de $f(t)$ à l'instant $t = 0^-$.

1.2.4. Intégration

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{t \geq 0} f(u)\, du\right] = \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{0^-}^{t} f(u)\, du\right] e^{-\underline{P}t}\, dt = \left[-\frac{e^{-\underline{P}t}}{\underline{P}} \int_{0^-}^{t} f(u)\, du\right]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} f(t) \frac{e^{-\underline{P}t}}{\underline{P}}\, dt.$$

Soit $$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{t} f(u)\, du\right] = \frac{\underline{F}(\underline{P})}{\underline{P}}$$

1.3. THÉORÈME DU RETARD

Soit $f(t)$ une fonction du temps nulle pour $t \leqslant 0_-$ et considérons la fonction $g(t) = f(t - t_0)$ en retard de t_0 sur $f(t)$:

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_{t_0}^{\infty} f(t - t_0)\, e^{-\underline{P}t}\, dt.$$

En posant $t - t_0 = u$, il vient :

$$\underline{G}(\underline{P}) = \int_{0^-}^{\infty} f(u)\, e^{-\underline{P}(u+t_0)}\, du = e^{-\underline{P}t_0} \cdot \underline{F}(\underline{P}).$$

Un retard de t_0 sur les fonctions du temps se traduit sur les grandeurs de Laplace associées par une *multiplication par* $e^{-\underline{P}t_0}$.

1.4. TRANSLATION DANS LE PLAN COMPLEXE

Soit $\underline{F}(\underline{P})$ la transformée de Laplace de $f(t)$:

$$\underline{F}(\underline{P} - \underline{P}_0) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-(\underline{P}-\underline{P}_0)t}$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} [f(t)\, e^{\underline{P}_0 t}]\, e^{-\underline{P}t}\, dt = \mathcal{L}[f(t)\, e^{\underline{P}_0 t}].$$

La multiplication par $e^{\underline{P}_0 t}$ sur les fonctions du temps se traduit par une translation de $\underline{P}_0$ sur les transformées de Laplace.

1.5. THÉORÈMES DE LA VALEUR INITIALE ET DE LA VALEUR FINALE

Soit $\underline{F}(\underline{P})$ la transformée de Laplace de $f(t)$.

On montre que :

- $\lim_{P\to\infty} \underline{PF}(\underline{P}) = \lim_{t>0\to 0} f(t) = f(0^+)$, *théorème de la valeur initiale.*
- $\lim_{P\to 0} \underline{PF}(\underline{P}) = \lim_{t\to\infty} f(t)$, *théorème de la valeur finale.*

A condition que ces limites existent.

Remarque à propos du théorème de la valeur initiale

Soient deux fonctions du temps $x(t)$ et $y(t)$ liées par la relation :

$$y(t) = K \frac{dx(t)}{dt}.$$

L'écriture de cette relation sur les transformées de Laplace conduit à :

$$\underline{Y}(\underline{P}) = K[\underline{PX}(\underline{P}) - x(0^-)],$$

soit : $$\underline{X}(\underline{P}) = \frac{\underline{Y}(\underline{P}) + Kx(0^-)}{K\underline{P}}.$$

Appliquons à $x(t)$ le théorème de la valeur initiale :

$$x(0^+) = \lim_{\underline{P}\to\infty} \underline{PX}(\underline{P})$$

$$= \lim_{\underline{P}\to\infty} x(0^-) + \lim_{P\to\infty} \frac{\underline{PY}(\underline{P})}{K\underline{P}}$$

$$= x(0^-) + \lim_{\underline{P}\to\infty} \frac{\underline{PY}(\underline{P})}{K\underline{P}}$$

Or $\lim_{\underline{P}\to\infty} \underline{PY}(\underline{P}) = y(0^+)$, $\underline{PY}(\underline{P})$ est donc borné, lorsque $\underline{P}$ tend vers l'infini à moins qu'à l'instant $t = 0$, $y(t)$ devienne infini.

En conséquence $\lim_{\underline{P}\to\infty} \frac{\underline{PY}(\underline{P})}{K\underline{P}} = 0$, car le numérateur est borné et le dénominateur tend vers l'infini.

En définitive $x(0^+) = x(0^-)$, si $y(t)$ ne devient pas infini à l'instant $t = 0$.

Nous avions déjà vu cette propriété :

- pour une inductance $\left(u = L\frac{di}{dt}\right)$, pour laquelle il ne peut y avoir de discontinuité de courant, à moins que la tension puisse être considérée comme infinie;
- pour une capacité $\left(i = C\frac{du}{dt}\right)$, pour laquelle il ne peut y avoir de discontinuité de tension, à moins que le courant qui la traverse devienne infini.

Elle apparaît aussi pour la mise en vitesse d'une pièce tournante, pour laquelle la vitesse de rotation $\Omega(t)$ et l'angle de rotation $\theta(t)$ sont liés par $\Omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$. L'angle de rotation $\theta(t)$, ne peut pas subir de discontinuité à moins que la vitesse de rotation $\Omega(t)$ soit infinie.

1.6. TRANSFORMÉES DE LAPLACE DE FONCTIONS SIMPLES

1.6.1. Impulsion de Dirac $\delta(t)$

Il s'agit de la fonction représentée à la figure 1, pour laquelle t_0 tend vers zéro avec $At_0 = I$, I étant une constante (intensité de l'impulsion).

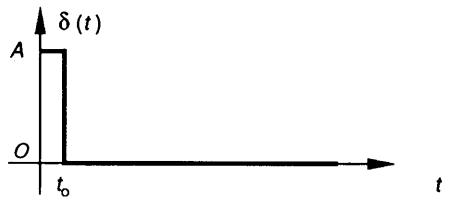


Fig. 1.

Sa transformée de Laplace s'écrit :

$$\underline{F}(\underline{P}) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-\underline{P}t}\, dt$$

$$= \lim_{t_0 \to 0} \int_{0^-}^{t_0} A\, e^{-\underline{P}t}\, dt = \lim_{t_0 \to 0} A \left[\frac{1 - e^{-\underline{P}t_0}}{\underline{P}}\right]$$

$$= \lim_{t_0 \to 0} At_0 \frac{1 - e^{-\underline{P}t_0}}{\underline{P}t_0} = At_0 = I.$$

$$\underline{F}(\underline{P}) = I.$$

1.6.2. Échelon $\mathcal{U}(t)$

Il s'agit de la fonction représentée à la figure 2, qui est, en fait, l'intégrale de la fonction de Dirac. En conséquence sa transformée de Laplace s'écrit :

$$F(P) = \frac{I}{\underline{P}}$$

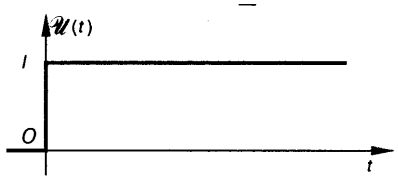


Fig. 2.

1.6.3. Rampe

Il s'agit de la fonction représentée à la figure 3. Pour $t > 0$, $f(t) = at$.

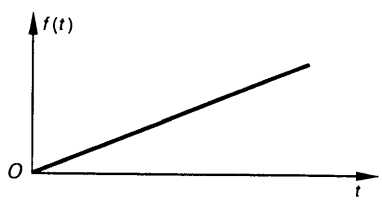


Fig. 3.

Il s'agit de l'intégrale de l'échelon d'amplitude a. En conséquence, sa transformée de Laplace s'écrit :

$$\underline{F}(\underline{P}) = \frac{a}{\underline{P}^2}.$$

1.6.4. Exponentielle

$$f(t) = e^{\underline{P}_0 t}$$

soit $$\underline{F}(\underline{P}) = \int_{0^-}^{\infty} e^{(\underline{P}_0 - \underline{P})t}\, dt = \frac{1}{\underline{P} - \underline{P}_0},$$

$$\underline{F}(\underline{P}) = \frac{1}{\underline{P} - \underline{P}_0}.$$

1.6.5. Sinusoïde

$$f(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j},$$

soit :

$$\underline{F}(\underline{P}) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-\underline{P}t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{\underline{P} - j\omega} - \frac{1}{\underline{P} + j\omega}\right] = \frac{\omega}{\underline{P}^2 + \omega^2}$$

$$\underline{F}(\underline{P}) = \frac{\omega}{\underline{P}^2 + \omega^2}.$$

1.6.6. Cosinusoïde

$$f(t) = \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

soit $$\underline{F}(\underline{P}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\underline{P} - j\omega} + \frac{1}{\underline{P} + j\omega}\right],$$

$$\underline{F}(\underline{P}) = \frac{\underline{P}}{\underline{P}^2 + \omega^2}.$$

2. APPLICATION À LA RÉSOLUTION DES SYSTÈMES

Soit un système dont les grandeurs d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ sont liées par l'équation différentielle :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y$$

$$= b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x.$$

L'application de la transformation de Laplace à cette équation conduit à :

$$a_n\left[\underline{P}^n\underline{Y}(\underline{P}) - \underline{P}^{n-1}y(0^-) - \ldots - \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0^-)\right]$$
$$+ a_{n-1}\left[\underline{P}^{n-1}\underline{Y}(\underline{P}) - \underline{P}^{n-2}y(0^-) - \ldots - \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}}(0^-)\right] + \ldots$$
$$= b_m\left[\underline{P}^m\underline{X}(P) - \underline{P}^{m-1}x(0^-) - \ldots\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}(0^-)\right]$$
$$+ b_{m-1}\left[\underline{P}^{m-1}\underline{X}(\underline{P}) - \underline{P}^{m-2}x(0^-) - \ldots - \frac{d^{m-2}x}{dt^{m-2}}(0^-)\right] + \ldots,$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\underline{Y}(\underline{P})[a_n\underline{P}^n + a_{n-1}\underline{P}^{n-1} + \ldots + a_0]$$
$$= \underline{X}(\underline{P})[b_m\underline{P}^m + b_{m-1}\underline{P}^{m-1} + \ldots + b_0] + \underline{C}_0(\underline{P}),$$

où $\underline{C}_0(\underline{P})$ est un polynôme en $\underline{P}$ qui dépend des conditions initiales, à l'instant $t = 0$, soit :

$$\underline{Y}(\underline{P}) = \frac{[b_m\underline{P}^m + \ldots + b_0]X(\underline{P}) + \underline{C}_0(\underline{P})}{a_n\underline{P}^n + a_{n-1}\underline{P}^{n-1} + \ldots + a_0} = \frac{\underline{N}(\underline{P})}{\underline{D}(\underline{P})}$$

2.1. MÉTHODE DE RÉSOLUTION

Dans le cas où l'ordre de l'équation différentielle est supérieur à 2, la résolution devient compliquée. Plutôt que de résoudre directement cette équation, on préfère alors transiter par les transformées de Laplace (*fig.* 4) :

a) Pour une entrée $x(t)$ donnée, on calcule la transformée de Laplace $\underline{X}(\underline{P})$.

b) Compte-tenu de l'équation différentielle et des conditions initiales, on calcule $\underline{Y}(\underline{P})$.

c) On cherche l'originale $y(t)$ dont la transformée de Laplace est $\underline{Y}(\underline{P}) = \dfrac{\underline{N}(\underline{P})}{\underline{D}(\underline{P})}$. Pour ce faire on procède de la manière suivante :

- soient $\underline{P}_0$, $\underline{P}_1$, ..., $\underline{P}_n$ les valeurs de $\underline{P}$ qui annulent le dénominateur $\underline{D}(\underline{P})$; on les appelle *pôles de* $\underline{Y}(\underline{P})$.
- $\underline{Y}(\underline{P})$ se met alors sous la forme

$$\underline{Y}(\underline{P}) = \frac{K\underline{N}(\underline{P})}{(\underline{P} - \underline{P}_0)(\underline{P} - \underline{P}_1)\ldots(\underline{P} - \underline{P}_n)};$$

toute fraction rationnelle en $\underline{P}$ peut être décomposée en éléments simples, soit :

$$\underline{Y}(\underline{P}) = \frac{\underline{A}_0}{\underline{P} - \underline{P}_0} + \frac{\underline{A}_1}{\underline{P} - \underline{P}_1} + \ldots + \frac{\underline{A}_n}{\underline{P} - \underline{P}_n};$$

- Pour calculer le coefficient $\underline{A}j$, on multiplie les deux membres de l'équation par $\underline{P} - \underline{P}_j$ et on fait $\underline{P} = \underline{P}_j$ dans chacun des membres, soit :

$$\underline{A}\mathbf{j} = [(\underline{P} - \underline{P}\mathbf{j})\underline{Y}(\underline{P})]_{\underline{P}=\underline{P}\mathbf{j}}$$
$$= \frac{K\underline{N}(\underline{P}_j)}{(\underline{P}_j - \underline{P}_0)\ldots(\underline{P}_j - \underline{P}_{j-1})(\underline{P}_j - \underline{P}_{j+1})\ldots(\underline{P}_j - \underline{P}_n)}.$$

d) Sachant que $\dfrac{1}{\underline{P} - \underline{P}_j}$ est la transformée de Laplace de $e^{\underline{P}jt}$, on revient sur les fonctions du temps en prenant l'originale de chacun des termes, soit :

$$y(t) = \underline{A}_0\, e^{\underline{P}_0 t} + \underline{A}_1\, e^{\underline{P}_1 t} + \ldots + \underline{A}_n\, e^{\underline{P}_n t}.$$

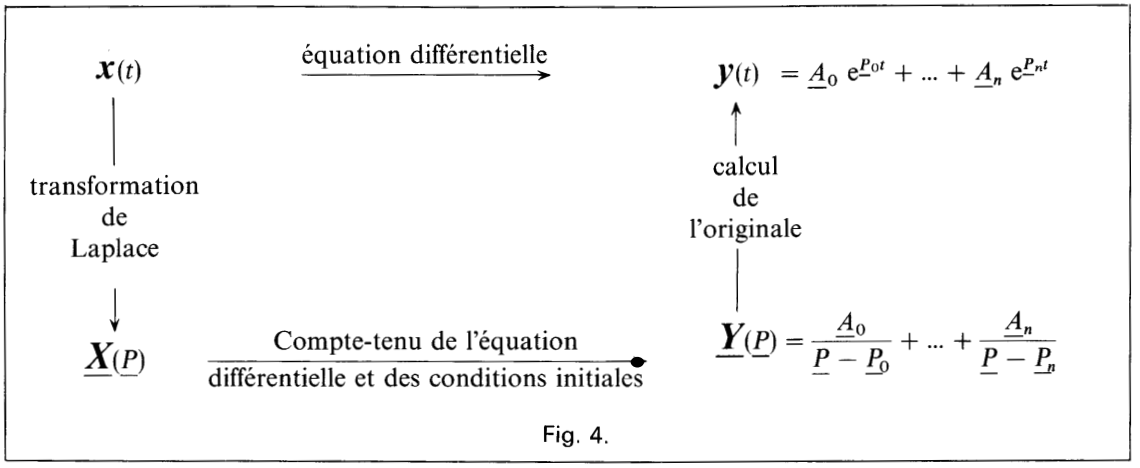


Fig. 4.

REMARQUES

a) Dans le cas où il existe un pôle multiple, $\underline{F}(\underline{P}) = \dfrac{N(P)}{(P-P_0)^q D_1(P)}$, *on montre que :*

$$\underline{F}(\underline{P}) = \frac{\underline{B}_0}{(\underline{P}-\underline{P}_0)^q} + \frac{\underline{B}_1}{(\underline{P}-\underline{P}_0)^{q-1}} + \ldots + \frac{\underline{B}_{q-1}}{\underline{P}-\underline{P}_0} + \frac{\underline{N}_1(\underline{P})}{\underline{D}_1(\underline{P})}$$

avec

$$\underline{F}_1(\underline{P}) = (\underline{P}-\underline{P}_0)^q \underline{F}(\underline{P}),$$

$$\underline{B}_0 = [\underline{F}_1(\underline{P})]_{\underline{P}=\underline{P}_0}, \ldots,$$

$$\underline{B}_j = \left[\frac{\mathrm{d}^j \underline{F}_1(\underline{P})}{\mathrm{d}\underline{P}^j}\right]_{\underline{P}=\underline{P}_0} * \frac{1}{j!}, \ldots$$

L'existence de pôles multiples correspond, en général, à des cas particuliers limites entre deux modes de réponse.

b) Les coefficients du polynôme $\underline{D}(\underline{P})$ *étant réels, ses zéros, qui sont les pôles de* $\underline{Y}(\underline{P})$, *sont réels ou imaginaires conjugués* ($\underline{P}_k$ *et* $\underline{P}_k^*$).

Dans le cas où les pôles sont imaginaires conjugués, posons :

$$\underline{P}_k = a + j\omega,$$
$$\underline{P}_k^* = a - j\omega,$$

$\underline{Y}(\underline{P})$ *peut s'écrire :* $\underline{Y}(\underline{P}) = \dfrac{\underline{R}(\underline{P})}{(\underline{P}-\underline{P}_k)(\underline{P}-\underline{P}_k^*)}$ *ou* $\underline{R}(\underline{P})$ *est une fraction rationnelle en* $\underline{P}$.

Les coefficients $\underline{A}_k$ *et* $\underline{A}'_k$ *correspondant aux pôles* $\underline{P}_k$ *et* $\underline{P}_k^*$ *s'écrivent :*

$$\underline{A}_k = \frac{\underline{R}(\underline{P}_k)}{(\underline{P}_k - \underline{P}_k^*)}$$

$$\underline{A}'_k = \frac{\underline{R}(\underline{P}_k^*)}{(\underline{P}_k^* - \underline{P}_k)},$$

$\underline{A}'_k$ *se déduit donc de* $\underline{A}_k$ *par remplacement de* j *en* $-$ j ($\underline{A}_k$ *et* $\underline{A}'_k$ *sont aussi imaginaires conjugués).*

Posons : $\underline{A}_k = A\,e^{j\varphi}$

et $\underline{A}'_k = A\,e^{-j\varphi}$.

A l'ensemble des pôles conjugués correspond donc la réponse :

$$A\,e^{j\varphi}\,e^{(a+j\omega)t} + A\,e^{-j\varphi}\,e^{(a-j\omega t)} = A\,e^{at}[e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}] = 2A\,e^{at}\cos[\omega t+\varphi].$$

Nous retiendrons :

Dans le cas où il existe deux pôles complexes conjugués, la réponse s'écrit :

$$\mathbf{2A\,e^{at}\cos[\omega t+\varphi]},$$

avec

a : partie réelle
ω : partie imaginaire } *d'un pôle* $\underline{P}_k$.
A : module
φ : argument } *du coefficient* $\underline{A}_k$ *correspondant.*

Remarquons d'ores et déjà que :

- *Si la partie réelle d'un pôle est positive, l'amplitude de* $y(t)$ *augmente indéfiniment : le système est instable; cette remarque sera exploitée lors de l'étude des systèmes boucles;*
- *si un des pôles possède une partie réelle nettement plus faible que les autres en valeur absolue, la réponse correspondante disparaît moins rapidement, on a affaire à un pôle dominant.*

2.2. EXEMPLE DE RÉSOLUTION : RÉPONSE D'UN CIRCUIT DU 2ème ORDRE À UNE IMPULSION DE DIRAC

Soit le système dont l'entrée x et la sortie y sont liées par l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 x.$$

Prenons pour signal d'entrée x, une impulsion de Dirac $\underline{X}(\underline{P}) = I$, et étudions la réponse dans le cas où les conditions initiales sont nulles :

$$y(0^-) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0^-) = 0 :$$

$$\underline{Y}(\underline{P})[\underline{P}^2 + 2m\omega_0 \underline{P} + \omega_0^2] = \omega_0^2 I,$$

$$\underline{Y}(\underline{P}) = \frac{\omega_0^2 I}{\underline{P}^2 + 2m\omega_0 \underline{P} + \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2 I}{(\underline{P}-\underline{P}_1)(\underline{P}-\underline{P}_2)} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{P}-\underline{P}_1} + \frac{\underline{A}_2}{\underline{P}-\underline{P}_2}.$$

a) $m > 1$: Les deux pôles $\underline{P}_1$ et $\underline{P}_2$ sont réels :

$$\begin{cases} \underline{P}_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2-1}, \\ \underline{P}_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2-1}. \end{cases}$$

$$\underline{A}_1 = \frac{\omega_0^2 I}{\underline{P}_1 - \underline{P}_2} = \frac{\omega_0 I}{2\sqrt{m^2-1}}$$

et

$$\underline{A}_2 = \frac{\omega_0^2 I}{\underline{P}_2 - \underline{P}_1} = \frac{-\omega_0 I}{2\sqrt{m^2-1}}.$$

La réponse correspondante est :

$$y(t) = \frac{\omega_0 I}{2\sqrt{m^2-1}}[e^{\underline{P}_1 t} - e^{\underline{P}_2 t}].$$

b) $m < 1$: Les deux pôles $\underline{P}_1$ et $\underline{P}_2$ sont imaginaires conjugués :

$$\begin{cases} \underline{P}_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2}, \\ \underline{P}_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2}. \end{cases}$$

$$\underline{A}_1 = \frac{\omega_0 I}{2j\sqrt{1-m^2}} = \frac{\omega_0 I}{2\sqrt{1-m^2}}\, e^{-j\pi/2} = A\, e^{j\varphi}.$$

La réponse correspondante est :

$$y(t) = \frac{\omega_0 I}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \cos\left[\omega_0\sqrt{1-m^2}\, t - \frac{\pi}{2}\right].$$

2.3. DIAGRAMME DES PÔLES ET DES ZÉROS

$\underline{Y}(\underline{P}) = \dfrac{\underline{N}(\underline{P})}{\underline{D}(\underline{P})}$ peut être mis sous la forme :

$$\underline{Y}(\underline{P}) = K\,\frac{(\underline{P}-\underline{Z}_1)(\underline{P}-\underline{Z}_2)\ldots(\underline{P}-\underline{Z}_m)}{(\underline{P}-\underline{P}_1)(\underline{P}-\underline{P}_2)\ldots(\underline{P}-\underline{P}_n)},$$

dans laquelle $\underline{Z}_1, \ldots, \underline{Z}_m$ sont les zéros de $\underline{Y}(\underline{P})$, $\underline{P}_1, \ldots, \underline{P}_n$ sont les pôles de $\underline{Y}(\underline{P})$.

Le calcul d'un coefficient $\underline{A}_k$ conduit à :

$$\underline{A}_k = K\,\frac{(\underline{P}_k-\underline{Z}_1)\ldots(\underline{P}_k-\underline{Z}_m)}{(\underline{P}_k-\underline{P}_1)\ldots(\underline{P}_k-\underline{P}_{k-1})(\underline{P}_k-\underline{P}_{k+1})\ldots(\underline{P}_k-\underline{P}_n)}.$$

Soient :

- Z_i, le point associé à $\underline{Z}_i$ dans le plan complexe et représenté par ○,
- P_j, le point associé à $\underline{P}_j$ dans le plan complexe et représenté par ×.

Le vecteur associé au nombre $\underline{P}_j - \underline{Z}_i$ étant $\overrightarrow{Z_i P_j}$, il vient, en appelant $\overrightarrow{Ox}$ l'axe réel :

$$|\underline{A}_k| = K\,\frac{(Z_1P_k)(\ldots)(Z_mP_k)}{(P_1P_k)(\ldots)(P_{k-1}P_k)(P_{k+1}P_k)(\ldots)(P_nP_k)}$$

$$\arg \underline{A}_k = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Z_1P_k}) + \ldots + (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Z_mP_k}) - [(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{P_1P_k}) + \ldots + (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{P_{k-1}P_k}) + (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{P_{k+1}P_k}) + \ldots + (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{P_nP_k})]$$

d'où on tire graphiquement $|\underline{A}_k|$ et $\arg \underline{A}_k$.

Exemple : **trouver l'originale de**

$$\underline{Y}(\underline{P}) = \frac{\underline{P}+1}{(\underline{P}+2)(\underline{P}^2+2\underline{P}+2)}$$

$Y(P)$ présente :

- le zéro $\underline{Z}_1 = -1$,
- les pôles $\underline{P}_1 = -2$, $\underline{P}_2 = -1+j$, $\underline{P}'_2 = -1-j$.

La représentation dans le plan complexe est donnée à la figure 5.

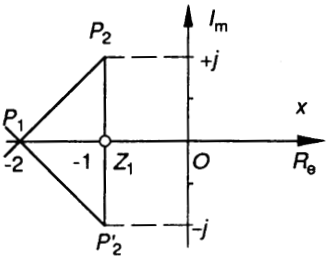


Fig. 5.

$$\underline{Y}(\underline{P}) = \frac{\underline{A}_1}{\underline{P}-\underline{P}_1} + \frac{\underline{A}_2}{\underline{P}-\underline{P}_2} + \frac{\underline{A}'_2}{\underline{P}-\underline{P}'_2}.$$

Calcul de $\underline{A}_1$

- $A_1 = \dfrac{Z_1P_1}{P_2P_1 \,.\, P'_2P_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$
- $\arg A_1 = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Z_1P_1}) - (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{P_2P_1}) - (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{P'_2P_1}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Z_1P_1}) = \pi.$

Soit : $\underline{A}_1 = -\dfrac{1}{2}$

Calcul de $\underline{A}_2$

- $\underline{A}_2 = \dfrac{Z_1P_2}{P_1P_2 \,.\, P'_2P_2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,.\,2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$
- $\arg \underline{A}_2 = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Z_1P_2}) - (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{P_1P_2}) - (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{P'_2P_2}) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{4}$

La réponse s'écrit donc :

$$y = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t}\cos\left[t - \frac{\pi}{4}\right].$$

REMARQUE

La stabilité d'un système impose qu'il n'y ait pas de pôles à droite de l'axe imaginaire. Si un pôle se rapproche de cet axe, le mode correspondant disparaîtra d'autant plus lentement.

Dans le cas général, les pôles sont fonction des paramètres du système (résistance, amplification, amortissement,...). Le tracé, à l'ordinateur, de l'évolution des pôles, en fonction d'un paramètre permet de déterminer les conditions de stabilité du système et son réglage optimum.

3. TRANSMITTANCE DE LAPLACE

Nous avons vu que, dans le cas général, l'entrée $x(t)$ et la sortie $y(t)$ d'un système, sont liées par une équation différentielle de la forme :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + ... + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + ... + b_0 x.$$

D'autre part les dérivations intervenant dans cette équation se traduisent sur la transformée de Laplace par :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \underline{P}\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0^-).$$

On peut y distinguer :

- la multiplication par $\underline{P}$ qui est caractéristique de la dérivation;
- le terme $f(0^-)$ qui tient compte des conditions initiales, c'est-à-dire d'un fonctionnement particulier.

Dans le cas où toutes les conditions initiales sont nulles :

$$y(0^-) = \frac{dy}{dt}(0^-) = ... = \frac{d^n y}{dt^n}(0^-) = 0,$$

l'équation différentielle conduit à :

$$[a_n \underline{P}^n + a_{n-1}\underline{P}^{n-1} + ... + a_0]\,\underline{Y}(\underline{P}) = [b_m \underline{P}^m + b_{m-1}\underline{P}^{m-1} + ... + b_0]\,\underline{X}(\underline{P}),$$

soit

$$\frac{\underline{Y}(\underline{P})}{\underline{X}(\underline{P})} = \underline{T}(\underline{P})$$

avec

$$\underline{T}(\underline{P}) = \frac{b_m \underline{P}^m + b_{m-1}\underline{P}^{m-1} + ... + b_0}{a_n \underline{P}^n + a_{n-1}\underline{P}^{n-1} + ... + a_0}.$$

$\underline{T}(\underline{P})$ est la *transmittance de Laplace* du système.

REMARQUES

- *$\underline{T}(\underline{P})$ est caractéristique de la nature de la relation liant l'entrée et la sortie. On peut, en effet, reconstituer l'équation différentielle, à partir de $\underline{T}(\underline{P})$, en remplaçant toute multiplication par $\underline{P}$, par une dérivation.*
- *Un fonctionnement particulier du système dépend, non seulement de l'équation différentielle, mais aussi des conditions initiales. Ainsi, tout comme l'équation différentielle seule, la transmittance de Laplace seule ne peut pas conduire à la solution d'un problème particulier.*
  Pour tenir compte des conditions initiales il faut, à partir de l'équation
  $$\underline{Y}(\underline{P}) = \underline{T}(\underline{P}) \cdot \underline{X}(\underline{P}),$$
  retrouver l'équation différentielle et repasser en transformées de Laplace, compte-tenu des conditions initiales.
- *Notons cependant que $\underline{Y}(\underline{P})$ et $\underline{T}(\underline{P})$ ont le même dénominateur*
  $$a_n \underline{P}^n + a_{n-1}\underline{P}^{n-1} + ... + a_0 = \underline{D}(\underline{P}).$$
  La stabilité, ainsi que la forme de la réponse dépendent des valeurs de $\underline{P}$ qui annulent $\underline{D}(\underline{P})$. $\underline{T}(\underline{P})$ suffit donc pour traduire la nature de la relation entre l'entrée et la sortie.

L'opération dérivation se traduit :

- sur la transmittance complexe, en régime sinusoïdal permanent, par une multiplication par $j\omega$.
- sur la transmittance de Laplace, par une multiplication par $\underline{P}$.

On passe donc de la transmittance de Laplace à la transmittance complexe en remplaçant $\underline{P}$ par $j\omega$.

4. IMPÉDANCE OPÉRATIONNELLE

Écrivons la transmittance de Laplace pour les trois éléments passifs; $x(t)$ et $y(t)$ sont alors des tensions ou des courants.

Les relations fondamentales $u = Ri$, $i = C\frac{du}{dt}$, $u = L\frac{di}{dt}$, conduisent respectivement à

$\underline{U}(\underline{P}) = R\underline{I}(\underline{P})$, $\underline{I}(\underline{P}) = C\underline{P}\underline{U}(\underline{P})$;

$\underline{U}(\underline{P}) = L\underline{P}\underline{I}(\underline{P})$.

Ces relations peuvent être mises sous la forme générale $\underline{U}(\underline{P}) = \underline{Z}(\underline{P})\underline{I}(\underline{P})$

où $\underline{Z}(\underline{P})$, *est l'impédance opérationnelle* de l'élément, soit :

- $\underline{Z}(\underline{P}) = L\underline{P}$ pour une inductance,
- $\underline{Z}(\underline{P}) = \frac{1}{C\underline{P}}$ pour une capacité,
- $\underline{Z}(\underline{P}) = R$ pour une résistance.

La forme de la relation $\underline{U}(\underline{P}) = \underline{Z}(\underline{P})\underline{I}(\underline{P})$ est analogue à la relation $u = Ri$ pour les réseaux résistifs. En conséquence tous les théorèmes que nous avons établi au paragraphe 3 du premier chapitre sont valables en régime quelconque, à condition de raisonner sur les impédances opérationnelles.

4.1. EXEMPLE DE RÉSOLUTION : ATTÉNUATEUR COMPENSÉ

4.1.1. Atténuateur parfait

Soit le schéma de la figure 6. Quelle que soit la forme de la tension u, nous pouvons écrire :

$$u_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u.$$

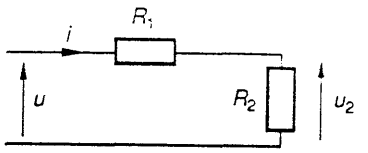


Fig. 6.

4.1.2. Atténuateur réel

Compte tenu des capacités d'entrée des étages suivants, on peut donner pour l'atténuateur réel le schéma équivalent de la figure 7.

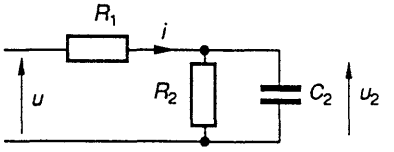


Fig. 7.

La capacité C_2, s'opposant à la variation de la tension à ses bornes, perturbe la réponse de l'atténuateur dans le cas où les variations de u sont rapides. Étudions, en particulier, cette réponse lorsque la tension u est un échelon de tension d'amplitude E, la tension u_2 étant nulle à l'instant $t = 0^-$.

Toutes les conditions initiales étant nulles ($u_2(0^-) = 0$ et $u(0^-) = 0$), nous écrivons :

$$\underline{U}(\underline{P}) = R_1 \underline{I}(\underline{P}) + \underline{U}_2(\underline{P})$$

$$= R_1 \left[\frac{\underline{U}_2(\underline{P})}{R_2} + C_2 \underline{P} \underline{U}_2(\underline{P}) \right] + \underline{U}_2(\underline{P}),$$

$$\underline{U}_2(\underline{P}) = \underline{U}(\underline{P}) \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{1}{1 + \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2} \underline{P}}$$

avec $\underline{U}(\underline{P}) = \frac{E}{\underline{P}}$.

$$\underline{U}_2(\underline{P}) = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} \left[\frac{1}{\underline{P}} - \frac{1}{\underline{P} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2}} \right].$$

D'où la loi de variation de $u_2(t)$:

$$u_2(t) = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} \left[1 - e^{-\frac{(R_1 + R_2)t}{R_1 R_2 C_2}} \right].$$

Les courbes de la figure 8 donnent l'évolution de la tension u_2 correspondant aux atténuateurs réels et parfaits.

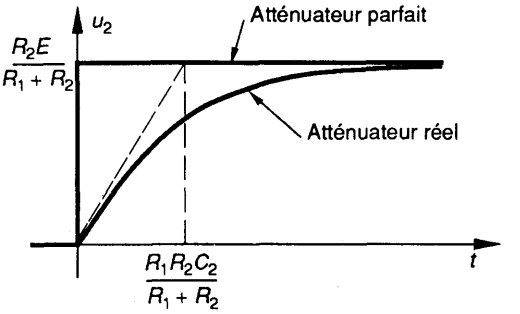


Fig. 8.

4.1.3. Atténuateur compensé

Afin de compenser l'effet de la capacité C_2, on place en parallèle sur R_1 une capacité C_1, ce qui conduit au schéma de la figure 9.

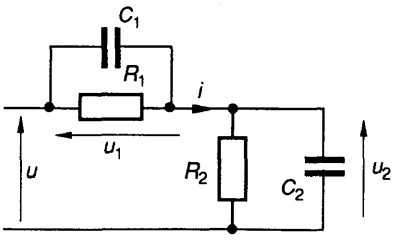


Fig. 9.

On espère ainsi accélérer l'évolution de la tension u_2. Supposons, en effet, que la tension u soit un échelon de tension et qu'à l'instant $t = 0^-$, les condensateurs soient déchargés ($u_1(0^-) = u_2(0^-) = 0$). A l'instant $t = 0$ il apparaît un court-circuit instantané par les capacités C_1 et C_2, et le courant $i(0)$ est infini : on se trouve ainsi dans le cas exceptionnel qui autorise des variations brutales de la tension aux bornes du condensateur et dans ce cas $u_2(0^+)$ n'est pas égale à $u_2(0^-)$.

Les conditions initiales étant nulles ($u_2(0^-) = u_1(0^-) = 0$), on peut écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{\underline{U}_1(\underline{P})}{R_1} + C_1 \underline{P}\underline{U}_1(\underline{P}) = \dfrac{\underline{U}_2(\underline{P})}{R_2} + C_2 \underline{P}\underline{U}_2(\underline{P}) \\ \underline{U}(\underline{P}) = \underline{U}_1(\underline{P}) + \underline{U}_2(\underline{P}) \end{cases}$$

soit :

$$\underline{U}_2(\underline{P})\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + (C_1 + C_2)\underline{P}\right] = \underline{U}(\underline{P})\left[\frac{1}{R_1} + C_1\underline{P}\right].$$

$\underline{U}(\underline{P})$ étant égal à $\dfrac{E}{\underline{P}}$ il vient :

$$\underline{U}_2(\underline{P}) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} \times \frac{1 + R_1 C_1 \underline{P}}{\underline{P}\left[1 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}(C_1 + C_2)\underline{P}\right]},$$

$$\underline{U}_2(\underline{P}) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} \left[\frac{1}{\underline{P}} + \frac{\dfrac{C_1}{C_1 + C_2} \times \dfrac{R_1 + R_2}{R_2} - 1}{\underline{P} + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}}\right].$$

D'où la loi de variations de $u_2(t)$:

$$u_2(t) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}\left[1 + \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2} - 1\right) e^{-\frac{(R_1 + R_2)t}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}}\right].$$

Remarquons :

a) Si la condition

$$\frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2} - 1 = 0$$

est satisfaite, c'est-à-dire $R_1 C_1 = R_2 C_2$, $u_2(t) = \dfrac{ER_2}{R_1 + R_2}$, loi identique à celle de l'atténuateur parfait : l'atténuateur est parfaitement compensé.

b) A l'instant $t = 0^+$, $u_2(0^+) = E\dfrac{C_1}{C_1 + C_2}$.

A l'instant $t \to \infty$, $u_2(\infty) = E\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$.

Si $\dfrac{C_1}{C_1 + C_2} > \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$, soit $R_1 C_1 > R_2 C_2$, $u_2(0^+) > u_2(\infty)$, l'atténuateur est surcompensé.

Si $\dfrac{C_1}{C_1 + C_2} < \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$, soit $R_1 C_1 < R_2 C_2$, $u_2(0^+) < u_2(\infty)$, l'atténuateur est sous-compensé.

Suivant la compensation, nous obtenons pour l'évolution de $u_2(t)$, les courbes de la figure 10.

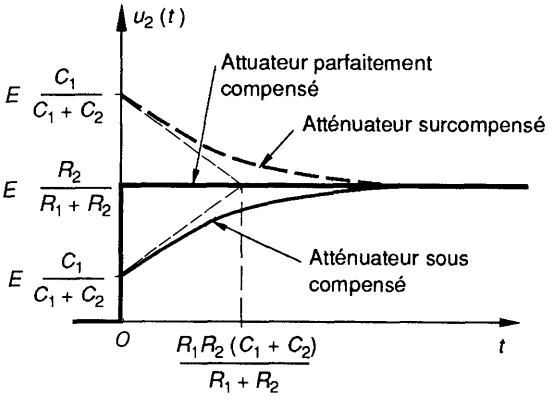


Fig. 10.

Remarquons que la résolution du problème par l'équation différentielle présente une difficulté, qui n'apparaît pas dans la résolution par la transformée de Laplace. En effet $u_2(0^+)$ n'étant pas égale à $u_2(0^-)$, la détermination de la constante d'intégration nécessite, au préalable la connaissance de $u_2(0^+)$.

Remarquons, de plus, que l'étude par la transformée de Laplace se faisant à partir de $t = 0^-$, la relation $u = u_1 + u_2$ *ne conduit pas à* $\dfrac{du_1}{dt} + \dfrac{du_2}{dt} = 0$, car à l'instant $t = 0$ la tension u présente une discontinuité. Une telle écriture aurait conduit à

$$\underline{P}\underline{U}_1(\underline{P}) = -\underline{P}\underline{U}_2(\underline{P})$$

soit

$$\underline{U}_1(\underline{P}) = -\underline{U}_2(\underline{P})$$

ce qui est absurde.

EXERCICES

1.

1° Un échantillonneur (*fig.* 1) est un dispositif qui délivre une suite d'impulsions *d'intensité* $f(nT_e)$ ou $f(nT_e)$ est la valeur du signal d'entrée $f(t)$ à l'instant nT_e. Pour un signal d'entrée en échelon d'amplitude E_0, nul avant l'instant $t = 0$, le signal $s(t)$ a la forme décrite à la figure 2.

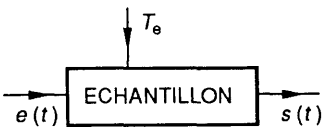


Fig. 1.

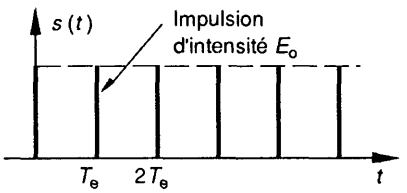


Fig. 2.

Montrer que la transformée de Laplace du signal $s(t)$ s'écrit alors :

$$S(P) = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-PnT_e} = \frac{E_0}{1 - e^{-PT_e}}$$

2° Un bloqueur (*fig.* 3) est un dispositif, qui, à une impulsion d'entrée $u(t)$, *d'intensité* E_0, fait correspondre un signal de sortie $v(t)$, constitué par un créneau d'amplitude E_0 et de durée T_e.

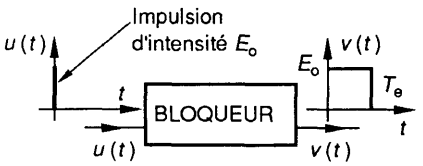


Fig. 3.

Calculer les transformées de Laplace $U(P)$ et $V(P)$ des signaux $u(t)$ et $v(t)$.
En déduire que la transmittance de Laplace du bloqueur s'écrit

$$H(P) = \frac{V(P)}{U(P)} = \frac{1 - e^{-PT_e}}{P}.$$

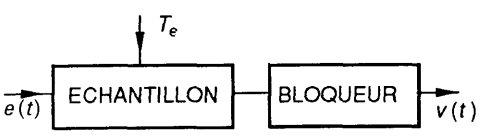


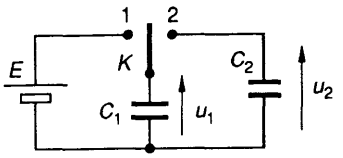
Fig. 4.

3° On monte en cascade les deux dispositifs précédents (*fig.* 4). Le signal d'entrée $e(t)$ est un échelon d'amplitude E_0, nul avant l'instant $t = 0$. Calculer la transformée de Laplace du signal $v(t)$. En déduire que les signaux $e(t)$ et $v(t)$ sont identiques. Le justifier par un raisonnement physique.

4° Le résultat précédent est-il valable quelle que soit la forme du signal $e(t)$? Le justifier en montrant qu'*on ne peut pas* caractériser l'échantillonneur par une transmittance. (On pourra vérifier, par exemple, qu'un même signal $s(t)$ peut être obtenu à partir de signaux $e(t)$ différents.)

2.

Soit le dispositif décrit sur la figure, dans lequel l'interrupteur K est basculé alternativement de la position 1 à la position 2 avec la période T.



On prend comme origine des temps l'instant du $n^{\text{ième}}$ basculement de l'interrupteur K, de la position 1 vers la position 2. Le condensateur C_2 est alors chargé sous la tension $u_2(0_-) = U_{2(n-1)}$ et $u_1(0_-) = E$.

1° Montrer que la transformée de Laplace $\underline{U_2}(\underline{P})$ de la tension $u_2(t)$ s'écrit :

$$\underline{U_2}(\underline{P}) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\frac{E}{\underline{P}} + \frac{C_2}{C_1 + C_2}\frac{U_{2(n-1)}}{\underline{P}}$$

2° Montrer que l'application, à $\underline{U_2}(\underline{P})$, du théorème de la valeur finale conduit au même résultat que l'application du théorème de la valeur initiale.
Justifier ce résultat par un raisonnement physique.
Soit U_{2n} la valeur de u_2 après le $n^{\text{ième}}$ basculement.
En posant $\gamma = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}$, établir la relation de récurrence

$$U_{2n} = \gamma E + (1 - \gamma)U_{2(n-1)}.$$

3° En déduire que U_{2n} s'écrit sous la forme

$$U_{2n} = [1 - (1 - \gamma)^n]E.$$

4° La courbe représentant $u_2(t)$ est formée d'une succession de marches d'escalier.
Montrer que si la capacité C_1 est très faible devant C_2, l'amplitude de ces marches est faible et qu'on peut assimiler $u_2(t)$ à une fonction continue.

5° En posant $(1 - \gamma) = e^{-\frac{T}{\tau}}$, montrer que l'évolution de la tension $u_2(t)$ est identique à celle qu'on obtiendrait en branchant entre les points 1 et 2 une résistance $R = \dfrac{T}{C_1}$.

Conclure en montrant qu'on réalise ainsi une résistance, fonction d'une fréquence.

5 signaux échantillonnés

1. ÉCHANTILLONNAGE

Soit un signal $f(t)$. On réalise un échantillonnage sur le signal en prélevant ses valeurs à la fréquence $F_e = \frac{1}{T_e}$, dite *fréquence d'échantillonnage*. On fait ainsi correspondre, au signal $f(t)$, une suite de nombres :

$$\{ \ldots f(0), f(T_e), \ldots, f(nT_e), \ldots \}.$$

Les nombres ainsi obtenus sont destinés à être traités numériquement.
T_e étant la période d'échantillonnage, on représente un échantillonneur par le schéma de la figure 1, dans lequel l'interrupteur est fermé pendant un temps très court aux instants $t = nT_e$.

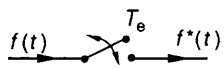


Fig. 1.

Afin de représenter le signal échantillonné par une fonction mathématique $f^*(t)$, (*fig.* 2), on *convient* d'associer à l'échantillon d'*amplitude* $f(nT_e)$, une impulsion de Dirac d'*intensité* $f(nT_e)$:

$$f(nT_e)\delta_u(t - nT_e)$$

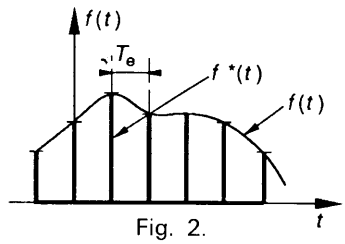


Fig. 2.

où $\delta_u(t - nT_e)$ est la fonction de Dirac, centrée sur $t = nT_e$ et d'intensité unité.
En conséquence, le signal $f^*(t)$ s'écrit :

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_e) \times \delta_u(t - nT_e).$$

La fonction $f^*(t)$ étant nulle pour $t \neq nT_e$, on peut encore écrire :

$$f^*(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_u(t - nT_e),$$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_u(t - nT_e)$ est un peigne de Dirac, représenté sur la figure 3.
On peut alors donner, de l'échantillonnage, le schéma équivalent de la figure 4.

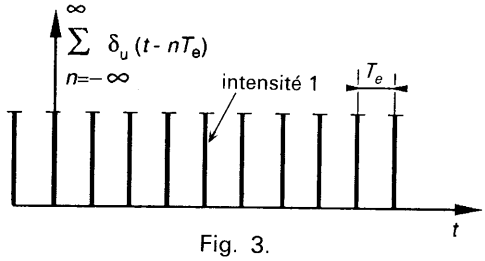


Fig. 3.

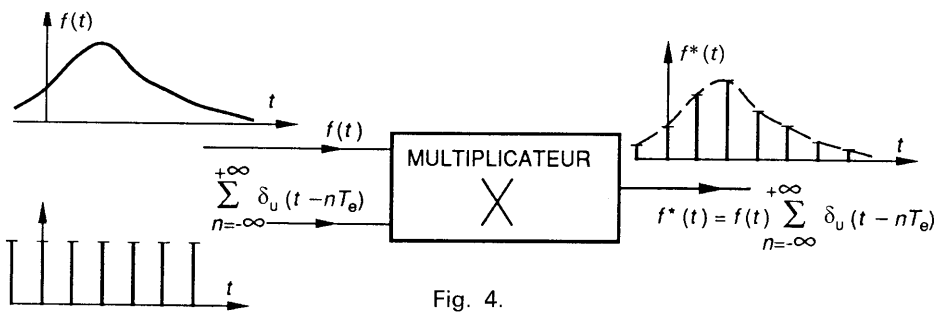


Fig. 4.

Il est intuitif que la représentation de $f(t)$ par $f^*(t)$ est d'autant meilleure que la période d'échantillonnage T_e est plus faible. Les paragraphes suivants le confirmeront.

2. SPECTRE DU SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ

2.1. SPECTRE DE $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_u(t - nT_e)$

Soit la fonction $g(t)$ représentée à la figure 5. Il s'agit d'une fonction périodique, de période T_e. Décomposons-la en série de Fourier en utilisant la forme exponentielle.

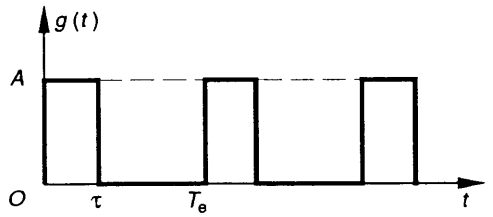


Fig. 5.

$$A_0 = \text{valeur moyenne de } g(t) = \frac{A\tau}{T_e},$$

$$\underline{C}_n = \frac{2}{T_e}\int_0^{T_e} g(t)\,e^{-2\pi j\frac{nt}{T_e}}\,dt = \frac{2A}{T_e}\left[-\frac{e^{-2\pi j\frac{nt}{T_e}}}{2\pi j\frac{n}{T_e}}\right]_0^{\tau}$$

$$= \frac{2A\tau}{T_e}e^{-\pi j\frac{n\tau}{T_e}}\frac{e^{\pi j\frac{n\tau}{T_e}} - e^{-\pi j\frac{n\tau}{T_e}}}{2\pi j\frac{n\tau}{T_e}},$$

$$\underline{C}_n = \frac{2A\tau}{T_e}e^{-\pi j\frac{n\tau}{T_e}}\frac{\sin \pi n\frac{\tau}{T_e}}{\pi\frac{n\tau}{T_e}}.$$

Le peigne de Dirac est obtenu, à partir de $g(t)$, en faisant tendre τ vers zéro, tout en maintenant le produit $A\tau = 1$, ce qui conduit à :

$$A_0 = \frac{1}{T_e} \quad \text{et} \quad \underline{C}_n = \frac{2}{T_e}.$$

En conséquence :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_u(t - nT_e) = \frac{1}{T_e} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{T_e}\cos 2\pi\frac{nt}{T_e}.$$

2.2. SPECTRE D'UNE SINUSOÏDE ÉCHANTILLONNÉE

Soit le signal $f(t) = A\cos 2\pi f_0 t$.

Le signal échantillonné correspondant s'écrit :

$$f^*(t) = A\cos 2\pi f_0 t\left(\frac{1}{T_e} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{T_e}\cos 2\pi nF_e t\right)$$

$$= \frac{A}{T_e}\left[\cos 2\pi f_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\cos 2\pi(nF_e - f_0)t + \cos 2\pi(nF_e + f_0)t\right].$$

Le spectre correspondant est donné sur la figure 6.

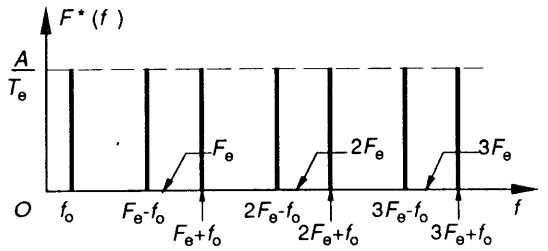


Fig. 6.

2.3. SPECTRE D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

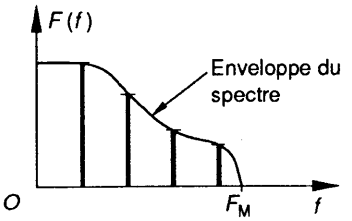


Fig. 7.

Soit un signal périodique $f(t)$ dont le spectre $F(f)$ s'inscrit dans une enveloppe limitée à F_M (*fig.* 7). En répétant, pour chaque sinusoïde de la décomposition de $f(t)$, le raisonnement du paragraphe précédent, nous obtenons pour le spectre de $f^*(t)$ le diagramme de la figure 8.

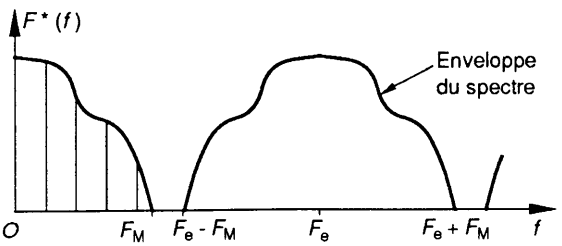


Fig. 8.

3. RECONSTITUTION DU SIGNAL

3.1. RECONSTITUTION PAR FILTRAGE PASSE-BAS

L'observation des spectres des figures 7 et 8 montre qu'on peut isoler, à partir de $f^*(t)$, toutes les composantes sinusoïdales de $f(t)$. Il suffit pour cela de caler un filtre passe-bas entre F_M et $F_e - F_M$.

Cette reconstitution n'est possible que si $F_M < F_e - F_M$, soit :

$$\boxed{F_e > 2F_M}$$

Théorème de Shannon

La reconstitution d'un signal $f(t)$ à partir d'échantillons prélevés à la fréquence F_e, n'est possible que si la fréquence d'échantillonnage F_e est supérieure à 2 fois la fréquence maximale des harmoniques de $f(t)$.

3.2. RECONSTITUTION PAR BLOCAGE

A partir de $f^*(t)$, nous obtenons le signal échantillonné et bloqué $b(t)$ en maintenant la valeur d'un échantillon jusqu'à l'apparition de l'échantillon suivant (*fig.* 9).

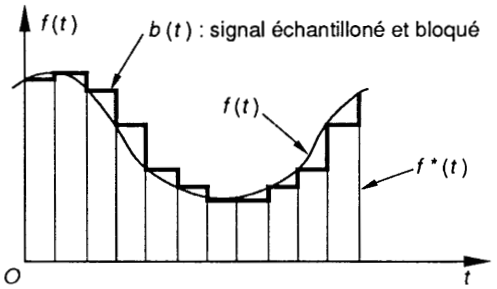


Fig. 9.

3.2.1. Effet du maintien d'un échantillon pendant T_e

Maintenir un échantillon pendant T_e revient à faire passer le signal échantillonné à travers un circuit dont la fonction de transfert $\underline{H}(\underline{P})$ réalise l'opération décrite à la figure 10.

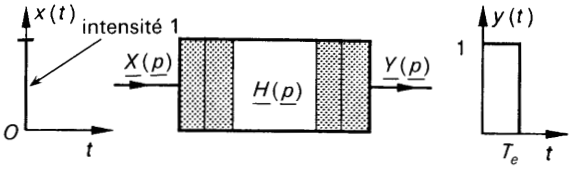


Fig. 10.

A une impulsion de Dirac en entrée ($x(t) = \delta_u(t)$), correspond en sortie un créneau $y(t)$ d'amplitude unité et de durée T_e.

Afin de déterminer $\underline{H}(\underline{P})$, calculons $\underline{X}(\underline{P})$ et $\underline{Y}(\underline{P})$:

$$\underline{X}(\underline{P}) = 1$$

$$\underline{Y}(\underline{P}) = \int_0^{T_e} e^{-\underline{P}t}\, dt = \frac{1 - e^{-\underline{P}T_e}}{\underline{P}}.$$

Nous en déduisons $\underline{H}(\underline{P}) = \dfrac{\underline{Y}(\underline{P})}{\underline{X}(\underline{P})} = \dfrac{1 - e^{-\underline{P}T_e}}{\underline{P}}$.

La transmittance complexe, en régime sinusoïdal permanent, s'écrit donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{j\omega} = e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}\, T_e \frac{\sin\dfrac{\omega T_e}{2}}{\dfrac{\omega T_e}{2}}.$$

Si un échantillon est maintenu pendant le temps T_e, tout se passe comme si le signal $f^*(t)$ était passé à travers un filtre dont la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = T_e e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} \frac{\sin\dfrac{\omega T_e}{2}}{\dfrac{\omega T_e}{2}}.$$

3.2.2. Conséquences

- L'harmonique de pulsation ω est retardé de l'angle $\dfrac{\omega T_e}{2}$, ce qui correspond à un temps de retard $\tau = \dfrac{\omega T_e}{2}\dfrac{1}{\omega} = \dfrac{T_e}{2}$, ce qui est logique d'après l'observation des courbes $f^*(t)$ et $b(t)$. Ce temps de retard peut être un facteur d'instabilité pour certains systèmes. Nous en reparlerons lors de l'étude des asservissements numériques.

- L'amplitude de l'harmonique de pulsation ω est multipliée par :

$$T_e \frac{\sin \frac{\omega T_e}{2}}{\frac{\omega T_e}{2}} = T_e \frac{\sin \pi f T_e}{\pi f T_e}.$$

Si le signal $f(t)$ est sinusoïdal ($f(t) = A \cos 2\pi f_0 t$), on obtient pour le spectre de $b(t)$, le diagramme de la figure 11.

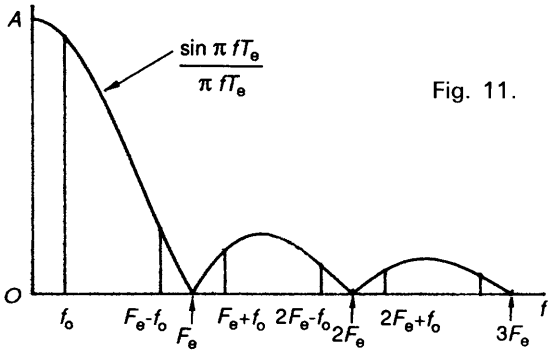


Fig. 11.

REMARQUES

a) L'effet du blocage provoque une atténuation de tous les harmoniques de fréquence supérieure à f_0. Un filtrage rudimentaire suffira donc pour reconstituer la sinusoïde de fréquence f_0. Ce résultat pouvait être prévu car le signal $b(t)$ est plus proche de $f(t)$ que ne l'est $f^*(t)$.

b) Si $f_0 \ll F_e$, les harmoniques de fréquence $F_e - f_0$, $F_e + f_0$, $2F_e - f_0$, ..., se regroupent sur les points où la fonction $\frac{\sin \pi f T_e}{\pi f T_e}$ s'annule. Il ne reste alors qu'une seule raie d'amplitude A et de fréquence f_0, ce qui est logique car, alors, la fonction $b(t)$ est très proche de $f(t)$.

c) Par contre si f_0 n'est pas très faible par rapport à F_e, l'amplitude de la sinusoïde obtenue après filtrage n'est pas égale à A mais à $\frac{A \sin \pi f T_e}{\pi f T_e}$.

4. TRANSFORMÉE EN Z

4.1. DÉFINITION

Soit un signal $f(t)$, nul avant l'instant $t = 0$, et soit $f^*(t)$ la fonction obtenue en échantillonnant $f(t)$ à la fréquence F_e. Compte tenu de $f(t) = 0$ pour $t < 0$, il vient

$$f^*(t) = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_u(t - nT_e)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)\delta_u(t - nT_e).$$

Appliquons la transformation de Laplace à la fonction $f^*(t)$. Il vient :

$$\underline{F}^*(\underline{P}) = \int_{0^-}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)\delta_u(t - nT_e)\, e^{-\underline{P}t}\, dt.$$

La fonction $\delta_u(t - nT_e)$ étant nulle pour $t \neq nT_e$, $\underline{F}^*(\underline{P})$ s'écrit :

$$\underline{F}^*(\underline{P}) = \int_{0^-}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)\, e^{-\underline{P}nT_e}\delta_u(t - nT_e)\, dt.$$

D'autre part, l'intégration est distributive par rapport à l'addition, soit :

$$\underline{F}^*(\underline{P}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)\, e^{-\underline{P}nT_e} \int_{0^-}^{\infty} \delta_u(t - nT_e)\, dt,$$

$\delta_u(t - nT_e)$ étant la fonction de Dirac unité,

$$\int_{0^-}^{\infty} \delta_u(t - nT_e)\, dt = 1,$$

$$\underline{F}^*(\underline{P}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)(e^{+\underline{P}T_e})^{-n}.$$

En effectuant le changement de variables : $\underline{Z} = e^{\underline{P}T_e}$, $\underline{F}^*(\underline{P})$ devient $\underline{F}(\underline{Z})$ telle que :

$$\boxed{\underline{F}(\underline{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)\underline{Z}^{-n}}$$

$\underline{F}(\underline{Z})$ *est la transformée en Z* de $f(t)$: c'est la transformée de Laplace du signal échantillonné $f^*(t)$: nous la noterons aussi $Z[f(t)]$.

REMARQUE

Nous avons établi, qu'en régime sinusoïdal permanent, il est possible de passer de la transmittance complexe $\underline{F}$ à la transmittance de Laplace $\underline{F}(\underline{P})$ en remplaçant $j\omega$ par $\underline{P}$. On passe donc de la transmittance complexe, à la transmittance en $\underline{Z}$ par l'opération $\underline{Z} = e^{j\omega T_e} = e^{+2\pi j f T_e}$.

Cette relation n'est pas univoque; en effet deux valeurs de fréquence distantes de $\frac{1}{T_e}$ conduisent à la même valeur de $\underline{Z}$. Ce phénomène est à rapprocher de celui observé lors de l'étude spectrale : un bloc fréquentiel de $f(t)$ conduit, après échantillonnage, à une infinité de blocs fréquentiels séparés par $\frac{1}{T_e}$.

4.2. PROPRIÉTÉS

4.2.1. Linéarité

Par suite de la distributivité de la somme et de la multiplication par un nombre par rapport au

signe $\sum_0^\infty$, nous déduisons :

- $Z[f_1(t) + f_2(t)] = Z[f_1(t)] + Z[f_2(t)]$
- $Z[Af(t)] = AZ[f(t)]$.

4.2.2. Retard temporel

Soit un signal $f(t)$ échantillonné à la fréquence $F_e = \frac{1}{T_e}$, et soit $\underline{F}(\underline{Z})$ sa transformée en Z.

Considérons la fonction $f(t - kT_e)$, *nulle avant l'instant* $t = kT_e$, en retard de kT_e sur $f(t)$:

$$Z[f(t - kT_e)] = \sum_{n=k}^{\infty} f[(n-k)T_e]\underline{Z}^{-n}.$$

En effectuant le changement de variables $m = n - k$, il vient :

$$Z[f(t - kT_e)] = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT_e)\underline{Z}^{-m}\underline{Z}^{-k}$$
$$= \underline{Z}^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} f(mT_e)\underline{Z}^{-m}.$$

$$Z[f(t - kT_e)] = \underline{Z}^{-k} Z[f(t)].$$

REMARQUE

D'après la relation précédente, le produit d'une transformée en Z par $\underline{Z}^{-1}$, provoque un retard de T_e, c'est-à-dire le passage de l'échantillon $f(nT_e)$ à l'échantillon $f[(n-1)T_e]$. Cette remarque nous sera très utile pour l'établissement des algorithmes de traitement numérique.

4.2.3. Translation complexe

Soit $\underline{F}(\underline{Z})$ la transformée en Z de $f(t)$.
Nous avons vu que la multiplication de $f(t)$ par $e^{\underline{P}_0 t}$, se traduit sur la transformée de Laplace par le remplacement de $\underline{P}$ par $\underline{P} - \underline{P}_0$. L'opération se traduit donc sur la transformée en $\underline{Z}$ par le remplacement de $e^{\underline{P}T_e}$ par $e^{(\underline{P}-\underline{P}_0)T_e}$, c'est-à-dire par une multiplication de $\underline{Z}$ par $e^{-\underline{P}_0 T_e}$:

$$Z[e^{\underline{P}_0 t} f(t)] = F[\underline{Z}\, e^{-\underline{P}_0 T_e}].$$

4.2.4. Multiplication par *t*

Soit $\underline{F}(\underline{Z})$ la transformée en Z de $f(t)$. $\underline{F}(\underline{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)\underline{Z}^{-n}$, sa dérivée par rapport à $\underline{Z}$ s'écrit :

$$\frac{d\underline{F}(\underline{Z})}{d\underline{Z}} = \sum_{n=0}^{\infty} -nf(nT_e)\underline{Z}^{-n-1}$$

Calculons la transformée en Z de $tf(t)$:

$$Z[tf(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} nT_e f(nT_e)\underline{Z}^{-n}$$
$$= \underline{Z}T_e \sum_{n=0}^{\infty} nf(nT_e)\underline{Z}^{-n-1}$$
$$= -\underline{Z}T_e \frac{d\underline{F}(\underline{Z})}{d\underline{Z}},$$

$$Z[tf(t)] = -\underline{Z}T_e \frac{d\underline{F}(\underline{Z})}{d\underline{Z}}.$$

4.2.5. Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

Soit $\underline{F}(\underline{Z})$, la transformée en Z de $f(t)$; on montre que :

$$\lim_{n\to 0} f(nT_e) = \lim_{\underline{Z}\to\infty} \underline{F}(\underline{Z}),$$
$$\lim_{n\to\infty} f(nTe) = \lim_{\underline{Z}\to 1} (1 - \underline{Z}^{-1})\underline{F}(\underline{Z}).$$

4.3. TRANSFORMÉES EN *Z* DE FONCTIONS SIMPLES

4.3.1. Échelon

$f(t) = A$ pour $t \geqslant 0$
$= 0$ pour $t < 0$

sa transformée en Z s'écrit :

$$\underline{F}(\underline{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} A\underline{Z}^{-n} = A \sum_{n=0}^{\infty} \underline{Z}^{-n} = \frac{A}{1 - \underline{Z}^{-1}},$$

$$\underline{F}(\underline{Z}) = A\frac{\underline{Z}}{\underline{Z} - 1}.$$

4.3.2. Rampe

$f(t) = At$ pour $t \geqslant 0$,
$= 0$ pour $t < 0$.

La rampe étant obtenue à partir de l'échelon par multiplication par t, nous en déduisons :

$$\underline{F}(\underline{Z}) = -\underline{Z}T_e \frac{d}{d\underline{Z}}\left[A\frac{\underline{Z}}{\underline{Z} - 1}\right]$$
$$= -\underline{Z}T_e A \frac{-1}{(\underline{Z} - 1)^2},$$

$$\underline{F}(\underline{Z}) = A\frac{\underline{Z}T_e}{(\underline{Z} - 1)^2}.$$

4..3.3. Exponentielle

$f(t) = A\,e^{-at}$ pour $t \geqslant 0$,
$= 0$ pour $t < 0$.

$f(t)$ est obtenue, à partir de l'échelon, par une multiplication par e^{-at} soit

$$\underline{F}(\underline{Z}) = A\frac{\underline{Z}}{\underline{Z} - e^{-aT_e}} = \frac{A}{1 - e^{-aT_e}\underline{Z}^{-1}}.$$

4.3.4. Sinusoïde

$f(t) = \sin \omega_0 t$ pour $t \geqslant 0$,
$= 0$ pour $t < 0$.

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}, \text{ soit}$$

$$\underline{F}(\underline{Z}) = \frac{1}{2j}\left[\frac{\underline{Z}}{\underline{Z} - e^{j\omega_0 T_e}} - \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} - e^{-j\omega_0 T_e}}\right],$$

$$\underline{F}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Z}}{2j}\frac{e^{j\omega_0 T_e} - e^{-j\omega_0 T_e}}{\underline{Z}^2 - \underline{Z}(e^{j\omega_0 T_e} + e^{-j\omega_0 T_e}) + 1},$$

$$\underline{F}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Z}\sin \omega_0 T_e}{\underline{Z}^2 - 2\underline{Z}\cos \omega_0 T_e + 1}.$$

4.3.5. Cosinusoïde

$f(t) = \cos \omega_0 t$ pour $t \geqslant 0$,
$= 0$ pour $t < 0$.

On démontrerait, avec la méthode appliquée pour la sinusoïde :

$$\underline{F}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Z}(\underline{Z} - \cos \omega_0 T_e)}{\underline{Z}^2 - 2\underline{Z}\cos \omega_0 T_e + 1}.$$

4.3.6. Sinusoïde amortie

$f(t) = e^{-at}\sin \omega_0 t$ pour $t \geqslant 0$,
$= 0$ pour $t < 0$.

A partir de la transformée en $\underline{Z}$ de $\sin \omega_0 t$ on déduit :

$$\underline{F}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Z}\,e^{-aT_e}\sin \omega_0 T_e}{\underline{Z}^2 - 2\underline{Z}\,e^{-aT_e}\cos \omega_0 T_e + e^{-2aT_e}}.$$

4.4. INVERSION DE LA TRANSFORMÉE EN $\underline{Z}$

Proposons-nous de retrouver, à partir de $\underline{F}(\underline{Z})$, la fonction originale $f(t)$.

Il existe plusieurs méthodes. Cependant, dans la plupart des cas, $\underline{F}(\underline{Z})$ peut être mise sous la forme d'une fraction rationnelle en $\underline{Z}^{-1}$:

$$\underline{F}(\underline{Z}) = \frac{\underline{N}(\underline{Z}^{-1})}{\underline{D}(\underline{Z}^{-1})}.$$

Comme pour la transformée de Laplace, on décompose $\underline{F}(\underline{Z})$ en éléments simples. Soient $\underline{z}_0, \ldots, \underline{z}_k$, les valeurs de $\underline{Z}^{-1}$ qui annulent $\underline{D}(\underline{Z}^{-1})$. Il vient :

$$\underline{F}(\underline{Z}) = \frac{\underline{N}(\underline{Z}^{-1})}{(\underline{Z}^{-1} - \underline{z}_0)\ldots(\underline{Z}^{-1} - \underline{z}_k)} = \frac{A_0}{\underline{Z}^{-1} - \underline{z}_0} + \ldots + \frac{A_k}{\underline{Z}^{-1} - \underline{z}_k}.$$

avec

$$A_i = \frac{N(z_i)}{(\underline{z}_i - \underline{z}_0)\ldots(\underline{z}_i - \underline{z}_{i-1})(\underline{z}_i - \underline{z}_{i+1})\ldots(\underline{z}_i - \underline{z}_k)},$$

En remarquant que l'original de

$$\frac{A_i}{\underline{Z}^{-1} - \underline{z}_i} = \frac{-\frac{A_i}{\underline{z}_i}}{1 - \frac{\underline{Z}^{-1}}{\underline{z}_i}} \text{ est } -\frac{A_i}{\underline{z}_i} \times \left(\frac{1}{\underline{z}_i}\right)^{\frac{t}{T_e}},$$

il vient

$$f(t) = \sum_{i=0}^{i=k} -\frac{A_i}{\underline{z}_i}\left(\frac{1}{\underline{z}_i}\right)^{\frac{t}{T_e}}.$$

REMARQUE

Si $\underline{z}_i$ est une valeur de $\underline{Z}^{-1}$ qui annule le dénominateur, $\frac{1}{\underline{z}_i}$ est une valeur de $\underline{Z}$ qui annule ce même dénominateur. Nous l'appellerons pôle.

Posons $\frac{1}{\underline{z}_i} = e^{a + j\omega}$. Afin que $f(t)$ ne devienne pas infinie, la stabilité d'un système impose que a soit négatif, c'est-à-dire que le module de $\frac{1}{\underline{z}_i}$ soit inférieur à 1.

Cette remarque est liée, par la relation $\underline{Z} = e^{pT_e}$, à celle que nous avons énoncée sur les transformées de Laplace, pour lesquelles aucun pôle ne doit présenter de partie réelle positive.

Elle sera exploitée ultérieurement.

5. DÉTERMINATION DES ÉQUATIONS DE RÉCURRENCE

5.1. PROBLÈME

Le schéma général d'une chaîne de traitement numérique est donné figure 12 :

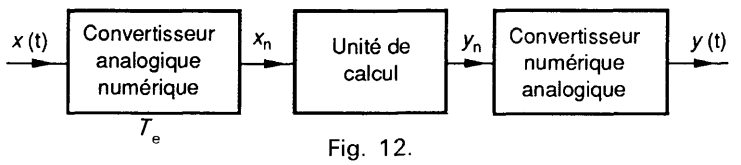


Fig. 12.

- le convertisseur analogique numérique prélève, sur le signal d'entrée $x(t)$, une suite d'échantillons x_n, à la fréquence $F_e = \frac{1}{T_e}$;
- l'unité de calcul détermine, à partir des échantillons précédents, une suite d'échantillons y_n, qu'elle place à l'entrée du convertisseur numérique analogique, avec la même fréquence F_e;
- le convertisseur numérique analogique transforme la suite d'échantillons y_n en signal de sortie $y(t)$.

Soient $\underline{X}(\underline{P})$ et $\underline{Y}(\underline{P})$ les transformées de Laplace de $x(t)$ et $y(t)$. Proposons-nous de réaliser, à l'aide de la chaîne de traitement numérique, une transmittance de Laplace $\underline{H}(\underline{P}) = \frac{\underline{Y}(\underline{P})}{\underline{X}(\underline{P})}$.

Il s'agit de déterminer, à chaque instant nT_e, la valeur de l'échantillon y_n que le calculateur doit présenter à sa sortie. La valeur de y_n devra conduire, par l'intermédiaire du convertisseur numérique analogique, à un signal $y(nT_e)$ égal à la valeur que prendrait le signal $y(t)$, issu du système de transmittance $\underline{H}(\underline{P})$, attaqué par le signal $x(t)$.

Il nous faut donc déterminer une équation de la forme :

$$y_n = a_n x_n + \sum_{i=m}^{n-1} (a_i x_i + b_i y_i),$$

dans laquelle les coefficients a_i et b_i dépendent de la transmittance de Laplace $\underline{H}(\underline{P})$ et de la fréquence d'échantillonnage F_e.

Cette équation de récurrence est aussi appelée **équation aux différences.**

5.2. ÉQUIVALENCE DE LA DÉRIVATION

Nous avons montré, dans le chapitre précédent, qu'il était possible, à partir de l'équation $\underline{Y}(\underline{P}) = \underline{H}(\underline{P})\underline{X}(\underline{P})$, de retrouver l'équation différentielle originelle. Afin de déterminer l'équation aux différences, il est nécessaire de traduire, sur les échantillons x_n et y_n, les opérations de dérivations successives.

Soit la fonction $x(t)$ de la figure 13 sur laquelle sont prélevés les échantillons x_0, x_1, ..., x_{n-2}, x_{n-1}, x_n. Une première approximation consiste à assimiler, à l'instant nT_e, la dérivée $\frac{dx}{dt}$ à $\frac{x_n - x_{n-1}}{T_e}$.

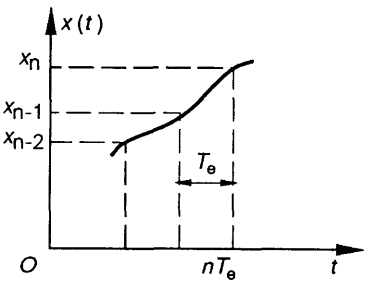


Fig. 13.

Il est bien évident que cette approximation est d'autant meilleure que la période d'échantillonnage T_e, est plus faible. Les développements ultérieurs le confirmeront.

Rappelons :

- L'opération qui consiste à passer de x_n à x_{n-1} est un retard de T_e. Elle se traduit sur la transformée en Z par une multiplication par $\underline{Z}^{-1}$. L'opération $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{T_e}$, se traduit donc par une multiplication par $\dfrac{1 - \underline{Z}^{-1}}{T_e}$.

  On passe ainsi de la transformée en Z de $x(t)$, à celle de $\dfrac{dx}{dt}$ par la multiplication par $\dfrac{1 - \underline{Z}^{-1}}{T_e}$.
- L'opération dérivation sur les fonctions du temps, se traduit, sur la transmittance de Laplace, par une multiplication par $\underline{P}$.

En conséquence, l'approximation proposée permet de passer de la transmittance de Laplace à la transmittance en Z en remplaçant $\underline{P}$ par $\dfrac{1 - \underline{Z}^{-1}}{T_e}$:

$$\underline{P} \leftrightarrow \frac{1 - \underline{Z}^{-1}}{T_e}.$$

REMARQUE

La relation exacte est $\underline{Z} = e^{\underline{P}T_e}$. Si T_e est suffisamment faible, un développement limité au premier ordre conduit à $\underline{Z}^{-1} = e^{-\underline{P}T_e} \approx 1 - \underline{P}T_e$ soit : $\underline{P} = \dfrac{1 - \underline{Z}^{-1}}{T_e}$, qui est bien la relation établie par la dérivation.

Le remplacement de $\underline{P}$ par $\dfrac{1 - \underline{Z}^{-1}}{T_e}$ conduit à une équation de la forme :

$$\underline{Y}(\underline{Z})[a_m \underline{Z}^{-m} + a_{m-1}\underline{Z}^{-(m-1)} + \ldots + a_0] = \underline{X}(\underline{Z})[b_m \underline{Z}^{-m} + \ldots + b_0].$$

La multiplication par $\underline{Z}^{-m}$ faisant passer de l'échantillon d'ordre n à l'échantillon d'ordre $n - m$, l'équation aux différences s'écrit :

$$a_m y_{n-m} + \ldots + a_0 y_n = b_m x_{n-m} + \ldots + b_0 x_n.$$

Exemple

Soit à synthétiser la transmittance

$$\underline{H}(\underline{P}) = \frac{\underline{Y}(\underline{P})}{\underline{X}(\underline{P})} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2m\omega_0 \underline{P} + \underline{P}^2},$$

avec : $\omega_0 = 100\pi$ *rad/sec;* $m = 0{,}1$.

La période d'échantillonnage étant $T_e = 2.10^{-3}$ s, soit $F_e = 500$ Hz.

$$\omega_0^2 \underline{X}(\underline{P}) = [\omega_0^2 + 2m\omega_0 \underline{P} + \underline{P}^2]\underline{Y}(\underline{P})$$

$$\omega_0^2 \underline{X}(\underline{Z}) = \left(\omega_0^2 + 2m\omega_0 \frac{1 - \underline{Z}^{-1}}{T_e} + \frac{(1 - \underline{Z}^{-1})^2}{T_e^2}\right)\underline{Y}(\underline{Z})$$

$$\omega_0^2 T_e^2 \underline{X}(\underline{Z}) = [(\omega_0^2 T_e^2 + 2m\omega_0 T_e + 1) - 2\underline{Z}^{-1}(1 + m\omega_0 T_e) + \underline{Z}^{-2}]\underline{Y}(\underline{Z}),$$

qui conduit à l'équation de récurrence :

$$y_n = y_{n-1} \frac{2(1 + m\omega_0 T_e)}{1 + 2m\omega_0 T_e + \omega_0^2 T_e^2} - y_{n-2} \frac{1}{1 + 2m\omega_0 T_e + \omega_0^2 T_e^2} + x_n \frac{\omega_0^2 T_e^2}{1 + 2m\omega_0 T_e + \omega_0^2 T_e^2}.$$

Le calcul numérique conduit à :

$$y_n = 1{,}39805 y_{n-1} - 0{,}65770 y_{n-2} + 0{,}25965 x_n.$$

Il est possible de simuler sur ordinateur la réponse de la chaîne de traitement numérique, à un échelon unité ($x_n = 1$, quel que soit $n \geqslant 0$).

Le programme BASIC correspondant est le programme 1.

Programme 1

```
 10 SCALE 0,.1,0,2
 20 XAXIS 0,.01
 30 YAXIS 0,.1
 40 B=.25965
 50 A=1.39805*B+.25965
 60 PLOT 0,0
 70 PLOT .002,B
 80 PLOT .004,A
 90 FOR N=3 TO 50
100 C=1.39805*A-.6577*B+.25965
110 B=A @ A=C
120 X=N*2/1000
130 PLOT X,C
140 NEXT N
150 END
```

La réponse de la chaîne de traitement numérique est donnée à la figure 14, alors que la réponse théorique est donnée à la figure 15.

La fréquence d'échantillonnage n'étant pas suffisamment élevée par rapport à f_0, le calcul des coefficients par équivalence de la dérivation conduit à une réponse d'une médiocre précision.

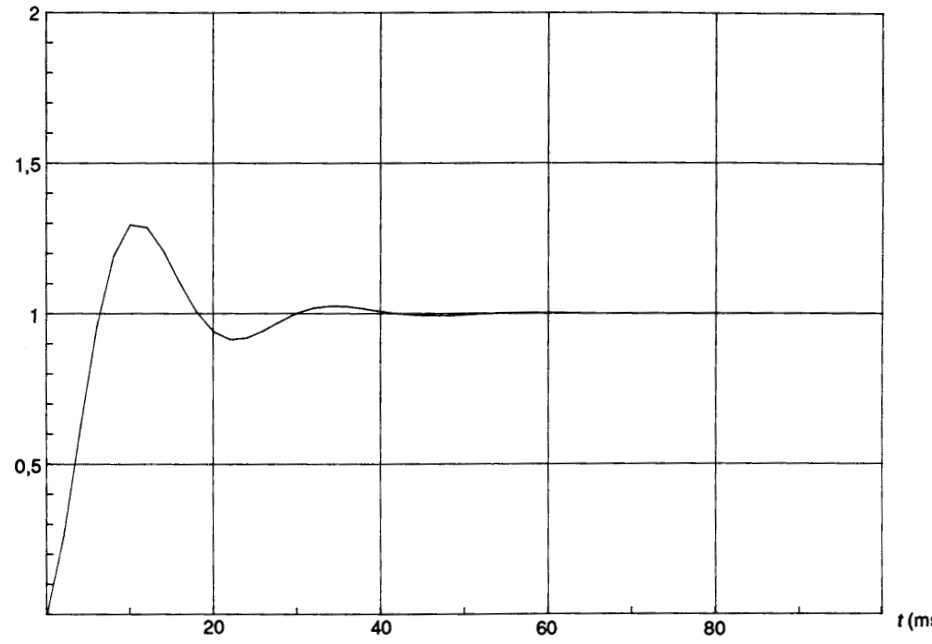


Fig. 14.

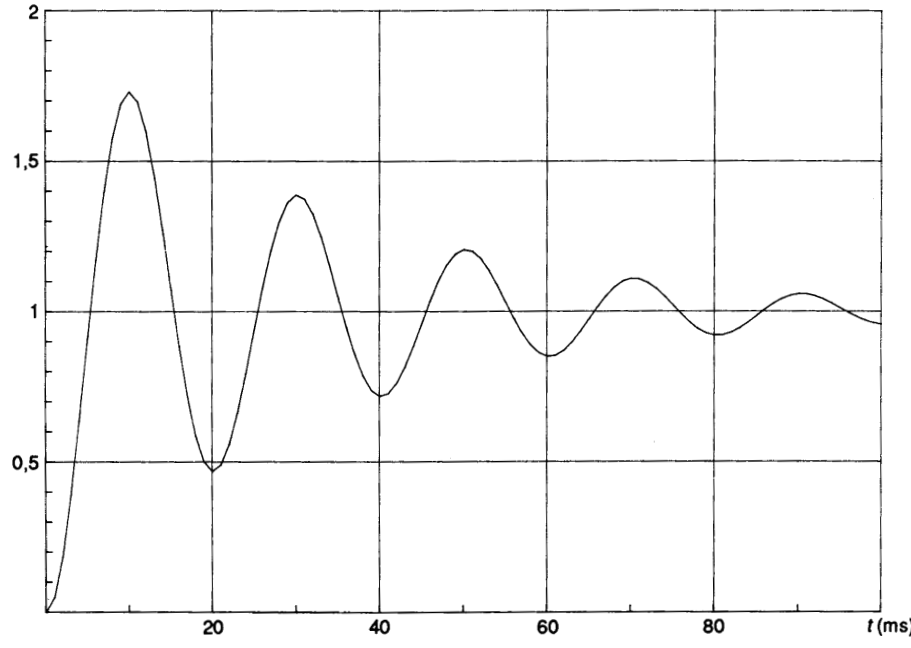


Fig. 15.

5.3. ÉQUIVALENCE DE L'INTÉGRATION

Soit $y(t) = \int_0^t x(u)\,du$ la fonction intégrale de $x(t)$.

Le passage de y_{n-1} à y_n se fait en ajoutant à y_{n-1}, la surface hachurée dans la figure 16. En assimilant cette surface à un trapèze, il vient :

$$y_n - y_{n-1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} T_e.$$

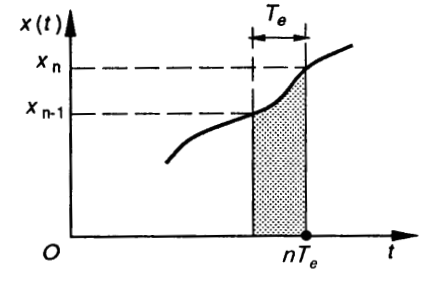


Fig. 16.

Traduisons cette opération sur les transformées en Z :

$$\underline{Y}(\underline{Z}) = \frac{T_e}{2}\frac{1+\underline{Z}^{-1}}{1-\underline{Z}^{-1}}\underline{X}(\underline{Z})$$

On passe ainsi de la transformée en Z d'un signal à la transformée en Z du signal intégral par une multiplication par $\frac{T_e}{2}\frac{1+\underline{Z}^{-1}}{1-\underline{Z}^{-1}}$.

L'opération intégration se traduit, sur les transformées de Laplace, par une division par $\underline{P}$. En conséquence, l'approximation proposée permet de passer de la transmittance de Laplace à la transmittance en Z en remplaçant $\underline{P}$ par $\frac{2}{T_e}\frac{1-\underline{Z}^{-1}}{1+\underline{Z}^{-1}}$,

$$\underline{P} \leftrightarrow \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{T_e}}\frac{\mathbf{1}-\underline{\boldsymbol{Z}}^{-1}}{\mathbf{1}+\underline{\boldsymbol{Z}}^{-1}}.$$

Ce remplacement est aussi appelé *transformation bilinéaire.*

REMARQUE

La relation exacte est $\underline{Z} = e^{\underline{P}T_e}$. *Si* T_e *est suffisamment faible, un développement limité au troisième ordre conduit à :*

$$\underline{Z}^{+1} = e^{+\underline{P}T_e} = 1 + \underline{P}T_e + \frac{\underline{P}^2T_e^2}{2} + \frac{\underline{P}^3T_e^3}{6}.$$

La transformation bilinéaire s'écrit :

$$\underline{Z} = \frac{1+\frac{\underline{P}T_e}{2}}{1-\frac{\underline{P}T_e}{2}}.$$

Effectuons-en un développement limité au troisième ordre :

$$\underline{Z} = \left(1+\frac{\underline{P}T_e}{2}\right)\left[1+\frac{\underline{P}T_e}{2}+\frac{\underline{P}^2T_e^2}{4}+\frac{\underline{P}^3T_e^3}{8}\right]$$
$$= 1 + \underline{P}T_e + \frac{\underline{P}^2T_e^2}{2} + \frac{\underline{P}^3T_e^3}{4}.$$

La transformation bilinéaire s'identifie donc à la transformation exacte, jusqu'au deuxième ordre. Nous pouvons donc en conclure qu'elle est meilleure que celle provenant de la dérivation.

Exemple

Reprenons l'exemple traité par l'équivalence de la dérivation :

$$\underline{H}(\underline{P}) = \frac{\underline{Y}(\underline{P})}{\underline{X}(\underline{P})} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2m\omega_0\underline{P} + \underline{P}^2},$$

avec

$$\omega_0 = 100\pi \text{ rad/sec},$$
$$m = 0{,}1,$$
$$T_e = 2 \,.\, 10^{-3}\,\text{s}.$$

Le passage à la transformée en Z conduit à :

$$\underline{Y}(\underline{Z})\left[\omega_0^2 + 2m\omega_0\frac{2}{T_e}\frac{1-\underline{Z}^{-1}}{1+\underline{Z}^{-1}} + \frac{4}{T_e^2}\left(\frac{1-\underline{Z}^{-1}}{1+\underline{Z}^{-1}}\right)^2\right] = \omega_0^2\underline{X}(\underline{Z}),$$

$$\underline{Y}(\underline{Z})[(\omega_0^2T_e^2 + 4m\omega_0T_e + 4) + 2\underline{Z}^{-1}(\omega_0^2T_e^2 - 4) + \underline{Z}^{-2}(\omega_0^2T_e^2 + 4 - 4m\omega_0T_e)]$$
$$= \underline{X}(\underline{Z})[\omega_0^2T_e^2(1 + 2\underline{Z}^{-1} + \underline{Z}^{-2})].$$

Ce qui donne pour l'équation de récurrence :

$$y_n = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4} + \mathbf{4}m\omega_0T_e + \omega_0^2T_e^2} \times$$
$$[2y_{n-1}(4 - \omega_0^2T_e^2) - y_{n-2}(4 - 4m\omega_0T_e + \omega_0^2T_e^2) + \omega_0^2T_e^2(x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2})]$$

L'application numérique donne :

$$y_n = \mathbf{1{,}55193}y_{n-1} - \mathbf{0{,}89181}y_{n-2} + \mathbf{0{,}084971}(x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2})$$

Le programme 2 permet de simuler la réponse sur ordinateur.

Programme 2

```
 10 SCALE 0, 1,0,2
 20 XAXIS 0, .01
 30 YAXIS 0, .1
 40 B=1.55193*.084971
 50 A=1.55193*B-.89181*.084971+3
    *.084971
 60 PLOT 0,0
 70 PLOT .002,B
 80 PLOT .004,A
 90 FOR N=3 TO 50
100 C=1.55193*A-.89181*B+.084971
    *4
110 B=A @ A=C
120 X=N*2/1000
130 PLOT X,C
140 NEXT N
150 END
```

La courbe obtenue est donnée à la figure 17. On peut constater qu'elle est très proche de la courbe théorique de la figure 15. On peut cependant y déceler une légère erreur sur la pulsation propre.

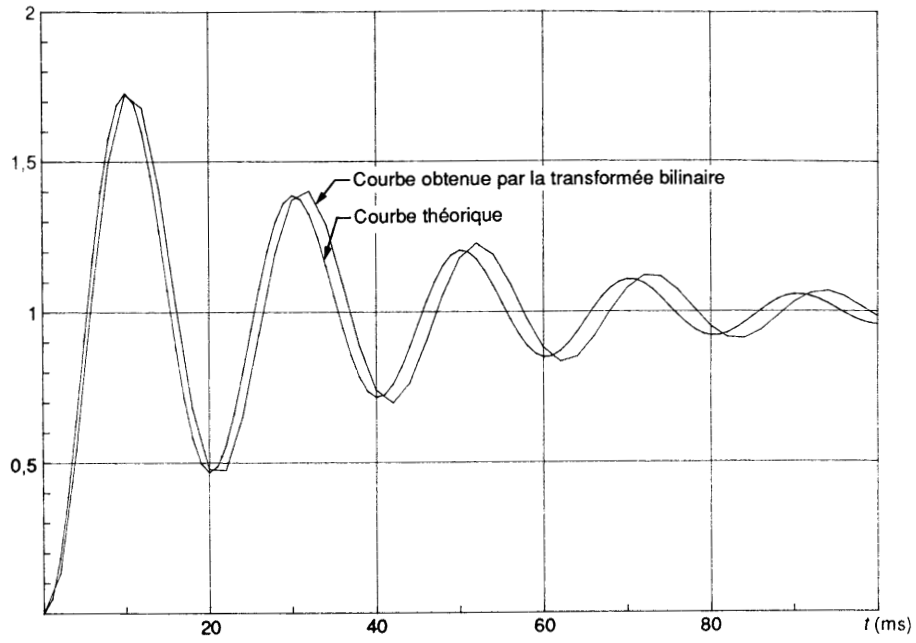


Fig. 17.

5.4. UTILISATION DE LA RÉPONSE IMPULSIONNELLE

Rappelons que le signal échantillonné $x^*(t)$ s'écrit, en fonction du signal d'entrée $x(t)$:

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e)\delta_u(t - nT_e),$$

$x^*(t)$ est une somme d'impulsions de Dirac.

Par suite de la linéarité des systèmes étudiés, la suite y_n est obtenue en échantillonnant le signal de sortie résultant de toutes les réponses impulsionnelles antérieures. En d'autres termes $y(nT_e)$ s'écrit :

$$y(nT_e) = \sum_{m=0}^{n} x[(n-m)T_e]h_i(mT_e),$$

où $h_i(mT_e)$ est la valeur, à l'instant mT_e, de la réponse impulsionnelle.

Pour résoudre le problème proposé en 5.1, établissons l'équation de récurrence, qui, à une impulsion d'entrée, fait correspondre une suite de valeurs y_n, obtenues par échantillonnage de la réponse impulsionnelle du système de transmittance $\underline{H}(\underline{P})$.

Considérons l'« impulsion » d'entrée $x(t)$ représentée à la figure 18, dont la transformée en Z est $\underline{X}(\underline{Z}) = A$. Remarquons que la chaîne de traitement numérique est incapable de distinguer le signal $x(t)$ de tout autre signal dont l'amplitude serait égale à A à l'instant $t = 0$ et qui s'annulerait avant l'instant $t = T_e$. Pour elle, en l'absence de nouvelle information, le signal d'entrée est égal à A. Elle voit donc un créneau d'amplitude A et de durée T_e. Ce créneau est représenté par $x'(t)$ à la figure 18.

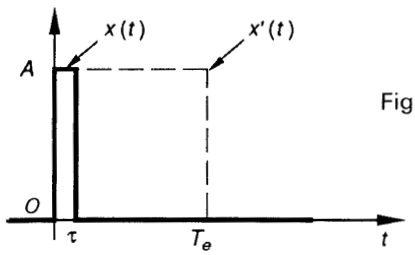


Fig. 18.

Sa transformée en Z est :

$$\underline{X}'(\underline{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} x'(nT_e)\underline{Z}^{-n} = A.$$

Sa transformée de Laplace est :

$$\underline{X}'(\underline{P}) = \int_{0^-}^{\infty} x'(t)\,e^{-\underline{P}t}\,dt = A\frac{1 - e^{-\underline{P}T_e}}{\underline{P}}.$$

La transformée de Laplace du signal de sortie s'écrit :

$$\underline{Y}(\underline{P}) = A\underline{H}(\underline{P})\frac{1 - e^{-\underline{P}T_e}}{\underline{P}}.$$

$\underline{Y}(\underline{P})$ est donc la somme de deux réponses :

- l'une, $A\dfrac{\underline{H}(\underline{P})}{\underline{P}}$, étant la réponse du système à un échelon d'amplitude A;
- l'autre, $-A\dfrac{\underline{H}(\underline{P})}{\underline{P}}e^{-\underline{P}T_e}$, étant la réponse du système à un échelon d'amplitude $-A$, en retard de T_e sur le précédent.

Décomposons $\frac{\underline{H}(\underline{P})}{\underline{P}}$ en éléments simples :

$$\frac{\underline{H}(\underline{P})}{\underline{P}} = \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{\underline{P} - \underline{P}_i},$$

où $\underline{P}_i$ sont les pôles de $\frac{\underline{H}(\underline{P})}{\underline{P}}$.

La réponse correspondante s'écrit :

$$r(t) = \sum_{i=0}^{k} A_i \, e^{\underline{P}_i t}.$$

La transformée en Z *de* $r(t)$ s'écrit :

$$\underline{R}(\underline{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT_e)\underline{Z}^{-n},$$

soit :

$$\underline{R}(\underline{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} A_i \, e^{\underline{P}_i n T_e} \underline{Z}^{-n}$$

L'opération somme étant distributive par rapport à elle-même, on peut permuter les deux signes $\sum$ et écrire :

$$\underline{R}(\underline{Z}) = \sum_{i=0}^{k} A_i \sum_{n=0}^{\infty} (e^{\underline{P}_i T_e} \underline{Z}^{-1})^n,$$

$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{\underline{P}_i T_e} \underline{Z}^{-1})^n$ étant la somme des termes d'une progression géométrique de raison $e^{\underline{P}_i T_e} \underline{Z}^{-1}$, s'écrit $\frac{1}{1 - e^{\underline{P}_i T_e} \underline{Z}^{-1}}$, soit

$$\underline{R}(\underline{Z}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{1 - e^{\underline{P}_i T_e} \underline{Z}^{-1}}.$$

$\underline{R}(\underline{Z})$ est la transformée en Z du signal dont la transformée de Laplace est $\frac{\underline{H}(\underline{P})}{\underline{P}}$.

En conséquence la transformée en Z du signal $\frac{\underline{H}(\underline{P})}{\underline{P}} e^{-\underline{P}T_e}$ est $\underline{Z}^{-1} \times \underline{R}(\underline{Z})$. En effet, les multiplications par $e^{-\underline{P}T_e}$ et par $\underline{Z}^{-1}$ traduisent toutes deux un retard de T_e sur les transformées correspondantes.

La transformée en Z du signal de sortie s'écrit donc :

$$\underline{Y}(\underline{Z}) = (1 - \underline{Z}^{-1})\underline{R}(\underline{Z})A$$

$$= (1 - \underline{Z}^{-1}) \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{1 - e^{\underline{P}_i T_e} \underline{Z}^{-1}} A,$$

$$\underline{Y}(\underline{Z}) = (1 - \underline{Z}^{-1}) \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{1 - e^{\underline{P}_i T_e} \underline{Z}^{-1}} \underline{X}(\underline{Z})$$

car $\underline{X}(\underline{Z}) = A$.

L'expression :

$$\frac{\underline{Y}(\underline{Z})}{\underline{X}(\underline{Z})} = \underline{H}(\underline{Z}) = (1 - \underline{Z}^{-1}) \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{1 - e^{\underline{P}_i T_e} \underline{Z}^{-1}}$$

est la *transmittance en* Z de la chaîne de traitement numérique.

Nous retiendrons : la transmittance en Z d'une chaîne de traitement numérique, réalisant une transmittance de Laplace $\underline{H}(\underline{P})$ est :

$$\underline{H}(\underline{Z}) = (1 - \underline{Z}^{-1}) \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{1 - e^{\underline{P}_i T_e} \underline{Z}^{-1}}$$

où • $\underline{P}_i$ sont *les pôles de* $\frac{\underline{H}(\underline{P})}{\underline{P}}$,

• A_i sont les coefficients résultant de la décomposition de $\frac{\underline{H}(\underline{P})}{\underline{P}}$ en éléments simples.

Sachant que toute multiplication par $\underline{Z}^{-1}$ se traduit par le passage d'un échantillon au précédent, la connaissance de $\underline{H}(\underline{Z})$ permet, à partir de $\underline{Y}(\underline{Z}) = \underline{H}(\underline{Z})\underline{X}(\underline{Z})$, de déterminer l'équation de récurrence.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent :

$$\underline{H}(\underline{P}) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2m\omega_0 \underline{P} + \underline{P}^2}$$

avec $\omega_0 = 100\pi$, $m = 0{,}1$, $T_e = 2.10^{-3}$ s;

$$\frac{\underline{H}(\underline{P})}{\underline{P}} = \frac{\omega_0^2}{\underline{P}(\underline{P} - \underline{P}_1)(\underline{P} - \underline{P}_2)}$$

avec

$$\begin{cases} \underline{P}_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2} = -m\omega_0 + j\omega, \\ \underline{P}_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2} = -m\omega_0 - j\omega. \end{cases}$$

La décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{\underline{H}(\underline{P})}{\underline{P}} = \frac{A_0}{\underline{P}} + \frac{A_1}{\underline{P} - \underline{P}_1} + \frac{A_2}{\underline{P} - \underline{P}_2}$$

avec

$$A = \frac{\omega_0^2}{\underline{P}_1 \underline{P}_2} = 1,$$

$$A_1 = \frac{\omega_0^2}{\underline{P}_1(\underline{P}_1 - \underline{P}_2)} = \frac{1}{2j\sqrt{1-m^2}(j\sqrt{1-m^2} - m)},$$

$$A_2 = \frac{\omega_0^2}{\underline{P}_2(\underline{P}_2 - \underline{P}_1)} = \frac{1}{2j\sqrt{1-m^2}(j\sqrt{1-m^2} + m)}.$$

La transmittance en Z s'écrit donc comme dans l'encadré ci-dessous.

$$\underline{H}(\underline{Z}) = (1-\underline{Z}^{-1})\left[\frac{1}{1-\underline{Z}^{-1}} + \frac{1}{2\mathrm{j}\sqrt{1-m^2}}\left(\frac{1}{\mathrm{j}\sqrt{1-m^2}-m}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}\underline{Z}^{-1}}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{\mathrm{j}\sqrt{1-m^2}+m}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e}\underline{Z}^{-1}}\right)\right],$$

$$\underline{H}(\underline{Z}) = 1 + \frac{1-\underline{Z}^{-1}}{2\mathrm{j}\sqrt{1-m^2}}\left[\frac{2\mathrm{j}\sqrt{1-m^2} - \underline{Z}^{-1}\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}(\mathrm{j}\sqrt{1-m^2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e}) - m(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e}))}{(-1+m^2-m^2)(1-\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}\underline{Z}^{-1})(1-\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e}\underline{Z}^{-1})}\right],$$

$$\underline{H}(\underline{Z}) = 1 + \frac{(1-\underline{Z}^{-1})\left(1-\underline{Z}^{-1}\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\cos\omega T_e + \dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}\underline{Z}^{-1}\sin\omega T_e\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\right)}{-1+2\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\cos\omega T_e\,\underline{Z}^{-1} - \mathrm{e}^{-2m\omega_0 T_e}\underline{Z}^{-2}},$$

$$\underline{H}(\underline{Z}) = 1 -$$
$$\frac{1-\underline{Z}^{-1}\left(1+\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\cos\omega T_e - \mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}\sin\omega T_e\right) + \underline{Z}^{-2}\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\cos\omega T_e - \underline{Z}^{-2}\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\sin\omega T_e}{1-2\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\cos\omega T_e\,\underline{Z}^{-1} + \mathrm{e}^{-2m\omega_0 T_e}\underline{Z}^{-2}},$$

$$\underline{H}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Z}^{-1}\left[1-\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\left(+\cos\omega T_e + \dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}\sin\omega T_e\right)\right] + \underline{Z}^{-2}\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\left(\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e} - \cos\omega T_e + \dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}\sin\omega T_e\right)}{1-2\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\cos\omega T_e\,\underline{Z}^{-1} + \mathrm{e}^{-2m\omega_0 T_e}\underline{Z}^{-2}}.$$

L'application numérique conduit à :

$\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e} = 0{,}9391, \qquad \cos\omega T_e = 0{,}8109,$

$\sin\omega T_e = 0{,}5852,$

$2\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\cos\omega T_e = 1{,}523, \mathrm{e}^{-2m\omega_0 T_e} = 0{,}8819,$

$$1 - \mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\left(\cos\omega T_e + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\sin\omega T_e\right) = 0{,}18325,$$

$$\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e}\left(\mathrm{e}^{-m\omega_0 T_e} - \cos\omega T_e + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\sin\omega T_e\right) = 0{,}1756,$$

soit

$$\underline{H}(\underline{Z}) = \frac{\mathbf{0{,}18325}\underline{Z}^{-1} + \mathbf{0{,}1756}\underline{Z}^{-2}}{\mathbf{1 - 1{,}523}\underline{Z}^{-1} + \mathbf{0{,}8819}\underline{Z}^{-2}} = \frac{\underline{Y}(\underline{Z})}{\underline{X}(\underline{Z})}$$

d'où l'équation de récurrence :

$$y_n = \mathbf{1{,}523}y_{n-1} - \mathbf{0{,}8819}y_{n-2} + \mathbf{0{,}18325}x_{n-1} + \mathbf{0{,}1756}x_{n-2}.$$

Le programme 3 permet de simuler la réponse sur ordinateur.

Programme 3

```
 10 SCALE 0,.1,0.2
 20 XAXIS 0,.01
 30 YAXIS 0,.1
 40 B=.18325
 50 A=1.523*B+.18325+.1756
 60 PLOT 0,0
 70 PLOT .002,B
 80 PLOT .004,A
 90 FOR N=3 TO 50
100 C=1.523*A-.8819*B+.18325+.1756
110 B=A @ A=C
120 X=N*2/1000
130 PLOT X,C
140 NEXT N
150 END
```

La courbe obtenue est donnée à la figure 19. Elle est confondue avec la courbe théorique de la figure 15.

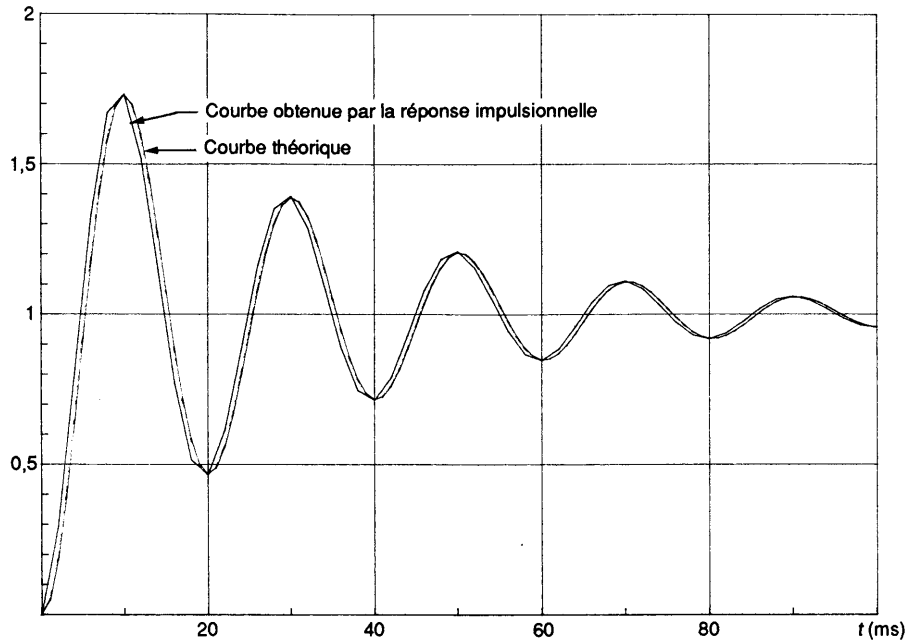
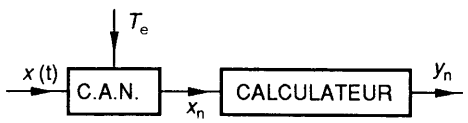


Fig. 19.

EXERCICES

1.
Une chaîne de traitement numérique prélève, avec une fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$, des échantillons $x_n = x(nT_e)$ sur un signal $x(t)$.



1° L'unité de calcul détermine à chaque instant d'échantillonnage, une valeur $y_n = y(nT_e)$ telle que

$$y_n = \frac{1}{4}(x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2}).$$

a) En supposant que le signal $x(t)$ est sinusoïdal ($x(t) = X \cos \omega t$), calculer la valeur $y(nT_e)$ de l'échantillon y_n.
b) Montrer que $y(nT_e)$ correspond à l'échantillon qui serait prélevé sur la sinusoïde

$$y(t) = \frac{X}{2}(1 + \cos \omega T_e) \cos(\omega t - \omega T_e).$$

Quelle est la fonction réalisée par la chaîne de traitement numérique?

2° On désire retrouver les résultats précédents à l'aide des transformées en Z.

a) A partir de

$$y_n = \frac{1}{4}(x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2})$$

établir la transmittance en Z

$$\underline{H}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Y}(\underline{Z})}{\underline{X}(\underline{Z})}.$$

b) En posant $\underline{Z} = e^{j\omega T_e}$, déterminer la transmittance complexe $\underline{H}(j\omega)$ et retrouver les résultats de la question 1° *b*).
c) Tracer les courbes

$$|\underline{H}(j\omega)| = f(\omega) \quad \text{et} \quad \arg \underline{H}(j\omega) = f(\omega).$$

3° En pratique, les échantillons sont présentés à un bloqueur dont la transmittance de Laplace est $\underline{B}(\underline{P}) = \frac{1 - e^{-\underline{P}T_e}}{\underline{P}T_e}$.
Établir que la transmittance complexe de la chaîne complète s'écrit

$$\underline{H_c}(j\omega) = e^{-3j\omega\frac{T_e}{2}} \frac{\sin \omega T_e}{\omega T_e} \cos \frac{\omega T_e}{2}.$$

2.
Une chaîne de traitement numérique fournit des échantillons $y_n = y(nT_e)$ qui sont les moyennes des N échantillons précédents, soit

$$y_n = \frac{1}{N}(x_n + x_{n-1} + \ldots + x_{n-N+1}).$$

1° Déterminer la transmittance en Z, $\underline{H}(\underline{Z}) = \dfrac{\underline{Y}(\underline{Z})}{\underline{X}(\underline{Z})}$ et la mettre sous la forme

$$\underline{H}(\underline{Z}) = \frac{1}{N}\left(\frac{1-\underline{Z}^{-N}}{1-\underline{Z}^{-1}}\right)$$

2° En déduire que la transmittance complexe se met sous la forme

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{N}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(N-1)\omega\frac{T_e}{2}}\,\frac{\sin N\omega\,\dfrac{T_e}{2}}{\sin \omega\,\dfrac{T_e}{2}}.$$

3° Tracer les courbes

$$\arg \underline{H}(\mathrm{j}\omega) = f(\omega) \quad \text{et} \quad |\underline{H}(\mathrm{j}\omega)| = g(\omega).$$

3.

Le schéma d'un filtre à capacités commutées est représenté sur la figure 1.

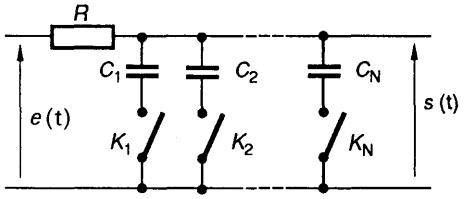


Fig. 1.

Toutes les capacités sont égales : $C_1 = C_2 = ... = C_N$.
Les interrupteurs K_1, K_2, ..., K_N sont fermés séquentiellement, pendant un temps τ, avec une période T_e, comme indiqué sur la figure 2.

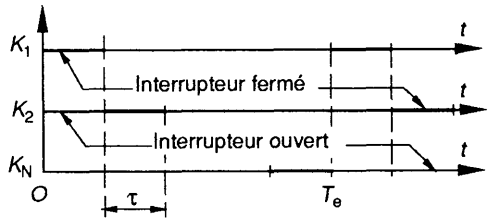


Fig. 2.

On s'intéresse au signal $s(t)$ en régime permanent après le temps d'établissement.
On suppose que le nombre N de cellules « capacité-interrupteur » est suffisamment grand pour que le signal $e(t)$ soit pratiquement constant pendant l'intervalle de temps τ.
1° Étudions l'évolution de la tension aux bornes de la capacité C_i pendant l'intervalle de temps $[nT_e + i\tau, nT_e + (i+1)\tau]$.
a) Écrire l'équation différentielle reliant $s(t)$ et $e(t)$ pendant cet intervalle de temps.
b) Soit e_{in} la valeur de $e(t)$ à l'instant $nT_e + i\tau$, et soit s_{in} la tension aux bornes de la capacité C_i à cet instant. Intégrer l'équation précédente en supposant que la tension $e(t)$ reste constante et égale à e_{in}.
c) Soit $s_{i(n+1)}$ la valeur de $s(t)$ à l'instant $nT_e + (i+1)\tau$.
Montrer que $s_{i(n+1)} = e_{in} + (s_{in} - e_{in})\,\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}$.

En posant $a = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}$, établir la relation de récurrence suivante :

$$s_{i(n+1)} = (1-a)s_{in} + ae_{in}.$$

d) En déduire la transmittance en Z : $\underline{H}(\underline{Z}) = \dfrac{\underline{S}_i(\underline{Z})}{\underline{E}_i(\underline{Z})}$.

2° A partir des résultats de la question 1°, on peut donner le schéma équivalent du dispositif (*fig.* 3), avec $\underline{E}(\underline{Z}) = \underline{E}_1(\underline{Z}) + \underline{E}_2(\underline{Z}) + ... + \underline{E}_N(\underline{Z})$.

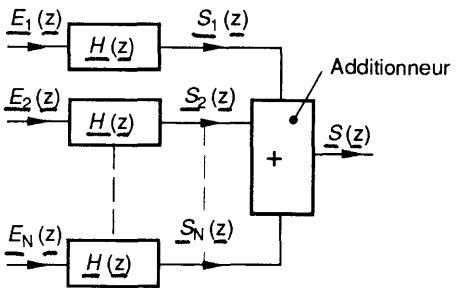


Fig. 3.

a) Établir la relation $\underline{S}(\underline{Z}) = \underline{H}(\underline{Z})\underline{E}(\underline{Z})$.
b) En posant $\underline{Z} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}$, établir la transmittance complexe $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)$ et la mettre sous la forme

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{a}{a - 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}}.$$

c) Montrer que le module $|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)|$ de $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)$ s'écrit

$$|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)| = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 2a + 2 + 2(a-1)\cos \omega T_e}}.$$

En déduire que $|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)|$ est périodique de période $\omega_e = \dfrac{2\pi}{T_e}$.
Tracer l'allure de la courbe $|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)| = f(\omega)$.
d) *Application numérique :* $R = 150$ kΩ; $C = 10$ nF; $T_e = 10^{-3}$ s; $N = 64$.
Déterminer les valeurs maximale et minimale de $|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)|$.
e) Justifier, par un raisonnement physique, que $|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)|$ est égal à 1 pour les pulsations $\omega = \dfrac{2\pi k}{T_e}$ et qu'il est pratiquement nul pour les pulsations $\omega = \dfrac{2\pi k}{T_e} + \dfrac{\pi}{T_e}$.

6 étude énergétique

1. ÉQUATIONS GÉNÉRALES

Nous choisirons, pour ce chapitre les conventions d'orientation de la figure 1.

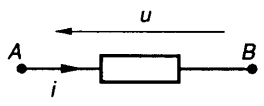


Fig. 1.

Avec ces conventions, toute énergie ou puissance absorbée par l'élément placé entre les points A et B, apparaîtra positive, toute énergie ou puissance fournie sera négative.

Pendant le temps dt, la charge $dq = i\,dt$ passe du point A au point B. Elle perd l'énergie $u\,dq = ui\,dt$ qu'elle fournit au dipôle, soit :

- **énergie fournie au dipôle pendant le temps dt : $dW = ui\,dt$;**
- **puissance instantanée fournie au dipôle** $P = \dfrac{dW}{dt} = ui.$

Les grandeurs u et i étant, dans le cas général, susceptibles de variations rapides, nous sommes amenés à définir la valeur moyenne P de la puissance instantanée par :

$$P = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} p\,dt = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} ui\,dt.$$

1.1. CAS PARTICULIER DE SIGNAUX PÉRIODIQUES

Les grandeurs u et i de la figure 1 sont périodiques de période T. Dans l'expression de la puissance moyenne P, τ peut-être écrit sous la forme :

$$\tau = nT + t_0 \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant t_0 < T.$$

Il vient alors :

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT}\left[\int_0^{nT} ui\,dt + \int_{nT}^{nT+t_0} ui\,dt\right]$$

car $\qquad t_0 \ll nT.$

u et i admettant T pour période, on peut écrire :

$$\int_0^{nT} ui\,dt = n\int_0^{T} ui\,dt,$$

soit :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^{T} ui\,dt + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT}\int_{nT}^{nT+t_0} ui\,dt.$$

Si l'énergie absorbée pendant une période n'est pas infinie, la grandeur $\displaystyle\int_{nT}^{nT+t_0} ui\,dt$ est bornée et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT}\int_{nT}^{nT+t_0} ui\,dt = 0$, soit :

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_0^{T} ui\,dt,}$$

qui est bien l'expression de la valeur moyenne que nous avons définie, au premier chapitre, dans le cas des signaux périodiques.

1.2. CAS PARTICULIER DE SIGNAUX SINUSOÏDAUX

Aux grandeurs sinusoïdales u et i sont associés, deux vecteurs, respectivement $\vec{U}$ et $\vec{I}$ et deux nombres complexes, respectivement $\underline{U}$ et $\underline{I}$.

1.2.1. Conventions

Nous appellerons φ l'angle de retard de i sur u, soit :

$$\begin{cases} u = U\sqrt{2}\cos\omega t, \\ i = I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi), \end{cases}$$

où U et I sont respectivement les valeurs efficaces de u et i.
Avec ces conventions

$$\begin{cases} \underline{U} = U\sqrt{2} \\ \underline{I} = I\sqrt{2}\,e^{-j\varphi} \end{cases}$$

1.2.2. Calcul de la puissance *P* absorbée par le dipôle de la figure 1

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T U\sqrt{2}\cos\omega t I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)\,dt$$
$$= \frac{UI}{T}\left[\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi)\,dt + \int_0^T \cos\varphi\,dt\right]$$
$$= UI\cos\varphi.$$

$$\boxed{P = UI\cos\varphi}$$

Cette puissance moyenne est aussi appelée *puissance active.*

1.2.3. Utilisation des nombres complexes pour le calcul de la puissance *P*

Effectuons, pour cela, le produit $\underline{S} = \underline{UI}^*$, où $\underline{I}^*$ est le nombre complexe conjugué de $\underline{I}$; $\underline{S}$ est appelée *puissance complexe :*

$$\underline{S} = \underline{UI}^* = 2UI\,e^{j\varphi} = 2UI[\cos\varphi + j\sin\varphi].$$

Par comparaison avec l'expression de la puissance active, il vient :

$$\boxed{P = \frac{1}{2}R_e[\underline{S}] = \frac{1}{2}R_e[\underline{UI}^*],}$$

avec $R_e\,[\underline{S}]$ = partie réelle de $\underline{S}$.

1.2.4. Puissance réactive

Il apparaît dans l'expression de la puissance complexe le terme

$$\boxed{Q = UI\sin\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\,[\underline{S}]}$$

où $\mathrm{Im}\,[\underline{S}]$ est la partie imaginaire de S.
Nous l'appellerons *puissance réactive.*
Cette puissance, ne correspondant à aucune puissance réelle, n'est pas mesurée en watt mais en V.A.R. (volts-ampères-réactifs).

1.2.5. Puissance apparente

Le produit des valeurs efficaces de u et de i $S = UI$ est appelé *puissance apparente.* Par comparaison avec la puissance complexe, il vient :

$$\boxed{S = UI = \frac{1}{2}|\underline{S}|.}$$

Cette puissance est mesurée en V.A. (volt-ampères).

1.2.6. Formulaire

Pour l'étude en régime sinusoïdal, nous retiendrons les formules suivantes :

$$\underline{S} = \underline{UI}^* = 2[P + jQ]$$
$$P = \frac{1}{2}R_e[\underline{S}] = UI\cos\varphi,$$
$$Q = \frac{1}{2}I_m[\underline{S}] = UI\sin\varphi,$$
$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

1.2.7. Théorème de Boucherot

Récepteurs en série

Considérons la mise en série de n récepteurs décrite à la figure 2.

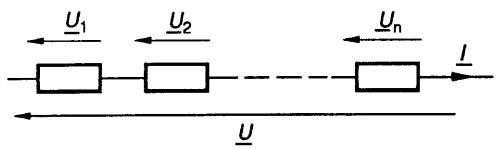


Fig. 2.

A partir des équations :

$$\begin{cases} \underline{S} = \underline{UI}^*, \\ \underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \ldots + \underline{U}_n, \end{cases}$$

on écrit :

$$\underline{S} = \underline{U}_1\underline{I}^* + \underline{U}_2\underline{I}^* + \ldots + \underline{U}_n\underline{I}^*,$$
$$= \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \ldots + \underline{S}_n,$$

où $\underline{S}_1$, $\underline{S}_2$, ..., $\underline{S}_n$ sont les puissances complexes absorbées par les récepteurs élémentaires.

Récepteurs en parallèle (*fig.* 3)

A partir de $\underline{I}^* = \underline{I}_1^* + \underline{I}_2^* + ... + \underline{I}_n^*$, on peut établir de la même façon que $\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + ... + \underline{S}_n$.

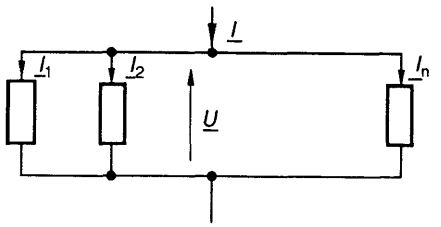


Fig. 3.

La puissance complexe étant, dans tous les cas, la somme des puissances complexes absorbées par les récepteurs élémentaires, on peut écrire :

$$\frac{\underline{S}}{2} = (P_1 + jQ_1) + (P_2 + jQ_2) + ... + (P_n + jQ_n)$$
$$= (P_1 + P_2 + ... + P_n) + j(Q_1 + Q_2 + ... + Q_n) = P + jQ,$$

ou, en égalant parties réelles et imaginaires :

$$\boxed{\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + ... + P_n \\ Q &= Q_1 + Q_2 + ... + Q_n. \end{aligned}}$$

Les puissances actives et réactives absorbées par un ensemble de récepteurs élémentaires sont respectivement égales à la somme des puissances actives et à la somme des puissances réactives absorbées par chacun des récepteurs.

1.3. CAS PARTICULIER D'UNE SOMME DE SIGNAUX SINUSOÏDAUX DE FRÉQUENCES DIFFÉRENTES

La tension u de la figure 1 s'écrit :

$$u = U_1\sqrt{2}\cos(\omega_1 t + \theta_1) + U_2\sqrt{2}\cos(\omega_2 t + \theta_2) + ... + U_n\sqrt{2}\cos(\omega_n t + \theta_n).$$

Le dipôle récepteur étant *supposé linéaire*, l'application du théorème de superposition conduit à écrire le courant i sous la forme :

$$i = I_1\sqrt{2}\cos(\omega_1 t + \theta_1 - \varphi_1) + ... + I_n\sqrt{2}\cos(\omega_n t + \theta_n - \varphi_n),$$

où $I_i\sqrt{2}\cos(\omega_i t + \theta_i - \varphi_i)$ est le courant qui parcourrait le dipôle si la seule tension u appliquée était égale à $U_i\sqrt{2}\cos(\omega_i t + \theta_i)$.

Calculons, dès lors, la puissance moyenne absorbée par le récepteur :

$$P = \text{val. moy. } [ui].$$

On peut vérifier que :

- la valeur moyenne de $\cos(\omega_i t + \theta_i) \cdot \cos(\omega_i t + \theta_i - \varphi_i)$ est égale à $\frac{\cos\varphi_i}{2}$;
- la valeur moyenne de $\cos(\omega_i t + \theta_i)\cos(\omega_j t + \theta_j - \varphi_j)$ est nulle si $\omega_i \neq \omega_j$.

Il vient alors :

$$P = U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + ... + U_n I_n \cos\varphi_n.$$

La puissance absorbée par le récepteur apparaît ainsi comme la somme des puissances que lui fournirait chaque tension sinusoïdale supposée seule, mais il est nécessaire pour cela que le récepteur soit linéaire et que les fréquences des tensions sinusoïdales soient différentes.

2. PUISSANCES ABSORBÉES PAR LES RÉCEPTEURS ÉLÉMENTAIRES

2.1. SOURCE DE TENSION CONSTANTE (*fig.* 4)

La puissance instantanée s'écrit $p = ui = Ei$.

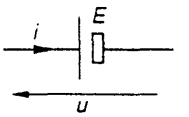


Fig. 4.

Sa valeur moyenne est

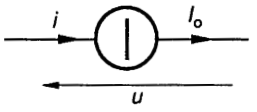
$$P = \text{val. moy. } [Ei] = E \text{ val. moy. } [i],$$

$$\boxed{P = EI_{moy}}$$

quelle que soit la forme du courant i.

2.2. SOURCE DE COURANT CONSTANT (*fig. 5*)

Fig. 5.



La puissance instantanée s'écrit $p = ui = uI_0$.
Sa valeur moyenne est

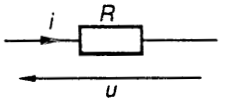
$$P = \text{val. moy. } [uI_0] = I_0 \text{ . val. moy. } [u],$$

$$\boxed{P = I_0 U_{moy}}$$

quelle que soit la forme de la tension u.

2.3. RÉSISTANCE (*fig. 6*)

Fig. 6.



La puissance instantanée s'écrit

$$p = ui = Ri^2 = \frac{u^2}{R}.$$

Sa valeur moyenne est

$$P = R \text{ . val. moy. } [i^2] = \frac{1}{R} \text{. val. moy. } [u^2].$$

2.3.1. En régime continu

i et u sont constants et égaux respectivement à I et U, il vient alors :

$$\boxed{P = RI^2 = \frac{U^2}{R}}$$

2.3.2. En régime périodique établi

Les valeurs moyennes de i^2 et de u^2 s'écrivent respectivement :

$$\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \, dt \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{T}\int_0^T u^2 \, dt.$$

Ce qui correspond à la définition de la valeur efficace que nous avons donnée dans le premier chapitre :

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2 \, dt \quad \text{et} \quad U_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2 \, dt.$$

Il vient alors :

$$\boxed{P = RI_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{R}}$$

2.3.3. En régime sinusoïdal permanent

La puissance complexe s'écrit $\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^*$, avec $\underline{U} = R\underline{I}$, soit

$$\underline{S} = R\underline{I}\underline{I}^* = \frac{\underline{U}\,\underline{U}^*}{R} \quad \text{ou} \quad \underline{S} = R|\underline{I}|^2 = \frac{|\underline{U}|^2}{R}.$$

Nous en déduisons les expressions des puissances active et réactive :

$$\boxed{P = \frac{U^2}{R} = RI^2 \quad \text{et} \quad Q = 0}$$

expression dans laquelle U et I sont les valeurs efficaces de u et i.

2.4: CAPACITÉ (*fig. 7*)

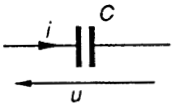


Fig. 7.

2.4.1. Énergie emmagasinée par une capacité

Si pendant le temps dt, la tension aux bornes de la capacité varie de du, elle reçoit l'énergie d$W = ui$ dt. Sachant que $i = C\dfrac{du}{dt}$, cette énergie s'écrit :

$$dW = C\frac{du}{dt}\, u \, dt = Cu \, du.$$

La capacité n'absorbe donc l'énergie que dans la mesure où du n'est pas nulle, c'est-à-dire lorsque la tension u varie.

Pour faire passer la tension u de 0 à U_0 il est donc nécessaire de fournir à la capacité l'énergie

$$W = \int_0^{U_0} Cu\,du = \frac{1}{2} CU_0^2,$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} CU_0^2}$$

Cette énergie est emmagasinée, sous forme électrostatique, en tous les points de l'espace où le champ électrique $\vec{E}$ est non nul.

2.4.2. En régime continu

La tension u aux bornes de la capacité étant constante, elle n'absorbe aucune puissance :

$$\boxed{p = P = 0}$$

2.4.3. En régime périodique établi

La puissance moyenne absorbée par la capacité s'écrit :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T Cu\,du$$

$$P = \frac{C}{2T}[u^2(T) - u^2(0)].$$

La tension u admettant T pour période :

$$\boxed{P = 0}$$

2.4.4. En régime sinusoïdal permanent

La puissance complexe s'écrit $\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^*$ avec $\underline{I} = jC\omega\underline{U}$, soit $\underline{I}^* = -jC\omega\underline{U}^*$, soit :

$$\underline{S} = -jC\omega\underline{U}\,\underline{U}^* = -j\frac{\underline{I}\,\underline{I}^*}{C\omega}$$

$$\text{ou} \qquad \underline{S} = -jC\omega|\underline{U}|^2 = -j\frac{|\underline{I}|^2}{C\omega}.$$

Nous en déduisons les expressions des puissances active et réactive :

$$\boxed{P = 0, \qquad Q = -C\omega U^2 = \frac{-I^2}{C\omega}}$$

Expression dans laquelle U et I sont les valeurs efficaces de u et i.

Remarquons que Q est négative : la capacité est un générateur de puissance réactive.

2.5. INDUCTANCE (*fig.* 8)

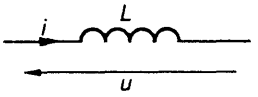


Fig. 8.

2.5.1. Énergie emmagasinée par une inductance

Si, pendant le temps dt, le courant dans l'inductance varie de di, elle reçoit l'énergie $dW = ui\,dt$. Sachant que $u = L\frac{di}{dt}$, cette énergie s'écrit :

$$dW = L\frac{di}{dt} i\,dt = Li\,di.$$

L'inductance n'absorbe donc d'énergie, que dans la mesure où di n'est pas nulle, c'est-à-dire lorsque le courant i, qui la traverse, varie.

Pour faire passer le courant i de 0 à I_0, il est donc nécessaire de fournir à l'inductance l'énergie :

$$W = \int_0^{I_0} Li\,di = \frac{1}{2} LI_0^2,$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} LI_0^2}$$

Cette énergie est emmagasinée, sous forme électromagnétique, en tous les points de l'espace où le champ magnétique $\vec{H}$ est non nul.

2.5.2. En régime continu

Le courant i parcourant l'inductance étant constant, elle n'absorbe aucune puissance :

$$\boxed{p = P = 0}$$

2.5.3. En régime périodique établi

La puissance moyenne absorbée par l'inductance s'écrit :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T Li\,di,$$

$$P = \frac{L}{2T}[i^2(T) - i^2(0)].$$

Le courant i admettant T pour période :

$$\boxed{P = 0}$$

2.5.4. En régime sinusoïdal permanent

La puissance complexe s'écrit $\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^*$ avec $\underline{U} = jL\omega\underline{I}$, soit $\underline{I}^* = j\dfrac{\underline{U}^*}{L\omega}$, d'où

$$\underline{S} = jL\omega\underline{I}\underline{I}^* = j\frac{\underline{U}\underline{U}^*}{L\omega} \quad \text{ou} \quad \underline{S} = jL\omega|\underline{I}|^2 = j\frac{|\underline{U}|^2}{L\omega}.$$

Nous en déduisons les expressions des puissances active et réactive :

$$\boxed{P = 0; \qquad Q = L\omega I^2 = \frac{U^2}{L\omega}}$$

expression dans laquelle U et I sont les valeurs efficaces de u et i.

3. APPLICATION : ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE DE DEUX RÉGULATEURS DE TENSION

3.1. PROBLÈME (*fig.* 9)

Fig. 9.

Nous nous proposons de construire un dispositif qui, alimenté par une tension constante E, fournit à une charge résistive R, une tension constante U, dont la valeur peut être réglée par le régulateur.

3.2. RÉGULATION PAR BALLAST

Le schéma général du dispositif est donné sur la figure 10.

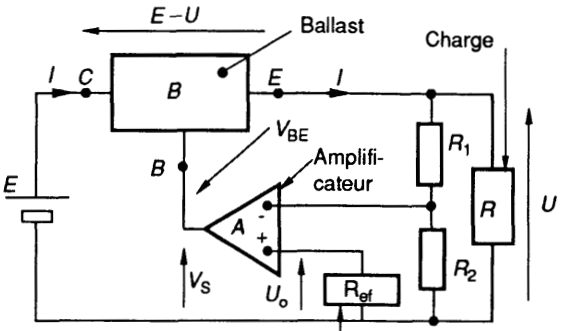


Fig. 10.

• Le ballast B est un ensemble d'éléments électroniques qui fonctionne à la manière d'un amortisseur :
- il délivre sur sa sortie E le même courant I que celui qui entre par le point C;
- quelle que soit la différence de potentiel $E - U$ apparaissant entre l'entrée C et la sortie E, il impose entre les points B et E une tension constante de l'ordre de 1 volt.

• L'amplificateur A est supposé idéal :
- il n'absorbe aucun courant sur ses entrées + et −;
- il fournit en sortie une tension

$$V_S = A(V_+ - V_-).$$

• La référence R_{ef} fournit une tension constante U_0.

3.2.1. Fonctionnement

A partir des équations :

$$\begin{cases} V_S = A[V_+ - V_-] \\ V_+ = U_0 \\ V_- = \dfrac{R_2 U}{R_1 + R_2} \\ V_S = V_{BE} + U \end{cases}$$

il vient $V_S = A\left[U_0 - \dfrac{R_2 U}{R_1 + R_2}\right] = V_{BE} + U$

soit $U\left[1 + A\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\right] = AU_0 - V_{BE}$,

d'où : $$U = \frac{AU_0 - V_{BE}}{1 + A\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Si l'amplification A est très grande, on a sensiblement $U = \dfrac{R_1 + R_2}{R_2} U_0$. On peut donc régler la valeur de la tension U par le rapport des résistances R_1 et R_2.

3.2.2. Étude énergétique

Les résistances R_1 et R_2 peuvent être choisies suffisamment grandes par rapport à R pour que la puissance qui y est dissipée soit négligeable.

Le principal inconvénient du dispositif provient de la puissance dissipée dans le ballast :

$$P_B = (E - U)I = (E - U)\frac{U}{R},$$

alors que la puissance fournie à la charge est $P_U = \dfrac{U^2}{R}$.

Dans le cas où $U = \dfrac{E}{2}$, $P_B = P_U = \dfrac{E^2}{4R}$ le rendement du dispositif est de 50 %.

3.3. RÉGULATION PAR DÉCOUPAGE

Le schéma général du dispositif est donné à la figure 11.

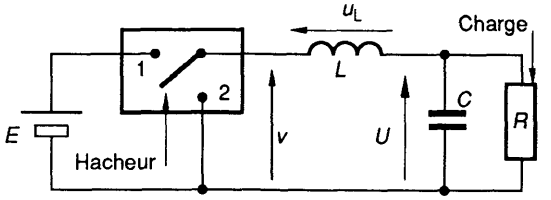


Fig. 11.

Le hacheur est un ensemble d'éléments électroniques fonctionnant à la manière d'un interrupteur basculant périodiquement de la position (1) à la position (2) avec le rapport cyclique a.

3.3.1. Fonctionnement

La tension v a l'allure décrite à la figure 12. Sa valeur moyenne est $V_{moy} = aE$.

- La capacité C a une valeur suffisamment élevée pour que la tension à ses bornes reste constante et égale à U.

Fig. 12.

- De l'équation entre les valeurs instantanées $v = u_L + U$, on tire la relation entre les valeurs moyennes $V_{moy} = aE = U$, soit $U = aE$.

On peut donc régler la valeur de la tension U par le rapport cyclique a.

3.3.2. Étude énergétique

Lorsque le régime périodique est établi, l'inductance et la capacité ne consomment aucune puissance. Toute la puissance fournie par le générateur de tension E se retrouve donc, dans la charge R. Le rendement du dispositif est donc de 100 %, et ce, quelle que soit la valeur de la tension U.

4. APPLICATION : ADAPTATION EN PUISSANCE

4.1. PROBLÈME

Considérons le dispositif de la figure 13 constitué par un générateur sinusoïdal d'impédance interne $\underline{Z}_G$ et une impédance de charge $\underline{Z}_U$.

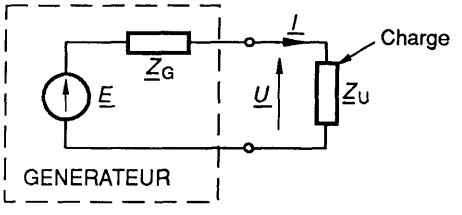


Fig. 13.

Posons

$$\begin{cases} \underline{Z}_U = R_U + jX_U \\ \underline{Z}_G = R_G + jX_G \end{cases}$$

et cherchons les conditions pour lesquelles le générateur fournit le maximum de puissance à la charge $\underline{Z}_U$.

A partir des équations

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{E}\,\dfrac{\underline{Z}_U}{\underline{Z}_U + \underline{Z}_G} \\ \underline{I} = \dfrac{\underline{E}}{\underline{Z}_U + \underline{Z}_G} \end{cases}$$

La puissance complexe fournie à la charge s'écrit

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = \frac{\underline{Z}_U \underline{E}\,\underline{E}^*}{(\underline{Z}_U + \underline{Z}_G)(\underline{Z}_U + \underline{Z}_G)^*}$$

soit $$\underline{S} = \frac{\underline{Z}_U 2E^2}{(R_U + R_G)^2 + (X_U + X_G)^2},$$

formule dans laquelle E est la valeur efficace de la force électromotrice du générateur.

La puissance active fournie à la charge s'écrit

$$P = E^2 \frac{R_U}{(R_U + R_G)^2 + (X_U + X_G)^2}.$$

Cherchons, dès lors, les conditions pour lesquelles cette puissance est maximale, sachant que R_U et R_G sont positifs et que X_U et X_G

- sont négatifs si l'impédance correspondante est capacitive,
- sont positifs si l'impédance correspondante est inductive.

Il apparaît ainsi que la première condition à réaliser est $X_U = -X_G$

soit $P = E^2 \dfrac{R_U}{(R_U + R_G)^2}$.

Afin de déterminer le maximum de P, cherchons la valeur de R_U qui annule $\dfrac{dP}{dR_U}$:

$$\frac{dP}{dR_U} = E^2 \frac{R_G - R_U}{(R_G + R_U)^3} = 0 \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{R_G = R_U}$$

Ce qui donne pour la puissance maximale $\boldsymbol{P_{max} = \dfrac{E^2}{4R_G}}$.

Au total, la puissance fournie à la charge est maximale et vaut $\dfrac{E^2}{4R_G}$ lorsque

$$\begin{cases} R_G = R_U \\ X_G = -X_U \end{cases}$$

soit $\underline{Z}_U = \underline{Z}_G^*$.

4.2. ADAPTATION D'IMPÉDANCE

Dans le cas où le générateur et la charge sont quelconques, on peut intercaler, entre la charge et le générateur, un quadripôle (*fig.* 14) qui, fermé sur l'impédance $\underline{Z}_U$, présente une impédance d'entrée égale à $\underline{Z}_G^*$.

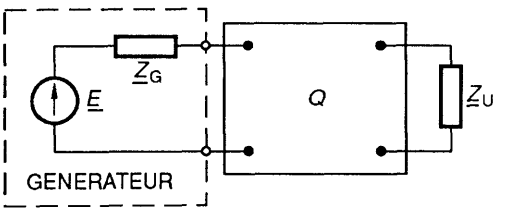


Fig. 14.

Afin d'éviter toute dissipation de puissance dans le quadripôle Q, ce dernier est réalisé avec des éléments réactifs (inductances et capacités). La puissance fournie par le générateur à l'impédance d'entrée $\underline{Z}_G^*$ du quadripôle se retrouve intégralement dans l'impédance de charge $\underline{Z}_U$.

5. MESURES DE PUISSANCE

5.1. SCHÉMA SYNOPTIQUE D'UN WATTMÈTRE

A partir de l'expression de la puissance P = val.moy.$[ui]$, on peut donner le schéma synoptique d'un wattmètre (*fig.* 15) :

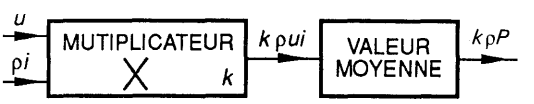


Fig. 15.

5.2. WATTMÈTRE ÉLECTRODYNAMIQUE

Un wattmètre électrodynamique possède (*fig.* 16)

- un circuit *gros fil* parcouru par un courant i,
- un circuit *fil fin* soumis à une tension u.

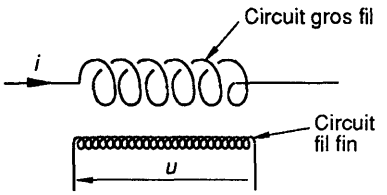


Fig. 16.

Le couple instantanné agissant sur le cadre mobile est proportionnel au produit ui.
Compte tenu de son inertie l'équipage mobile se fixe sur une position moyenne pour laquelle le couple moyen, proportionnel à val.moy.$[ui]$, est égal au couple de rappel. Le wattmètre électrodynamique indique donc la valeur moyenne du produit ui.
Dans le cas particulier d'une utilisation en régime sinusoïdal permanent,

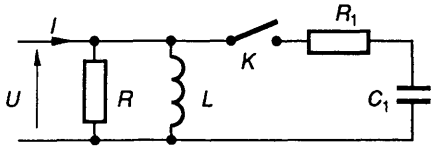
$$\begin{cases} u = U\sqrt{2}\cos \omega t \\ i = I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

L'indication du wattmètre est :

$$P = UI\cos\varphi = \frac{1}{2} R_e[\underline{U}\underline{I}^*]$$

EXERCICES

1. Soit le montage ci-dessous.



1° L'interrupteur K étant ouvert, le montage est alimenté par une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 140$ volts de fréquence 50 hertz. Il absorbe alors un courant de valeur efficace $I_0 = 1$ *A* et une puissance active $P = 60$ W.
Calculer R et $L\omega$.

2° L'interrupteur K étant fermé, le montage est alimenté par une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 80$ volts de fréquence 50 hertz.
Il absorbe alors un courant de valeur efficace $I_1 = 1{,}5$ A et une puissance active $P = 120$ W.
Calculer R_1 et $\dfrac{1}{C_1\omega}$.

2.
On alimente à l'aide d'un générateur sinusoïdal de fréquence $f = 1{,}6$ kHz et de résistance interne R_G, une impédance de charge R_U. Afin de réaliser l'adaptation d'impédance, on intercale un quadripôle Q entre le générateur et la charge (*fig.* 1).

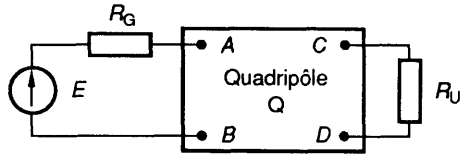


Fig. 1.

Le quadripôle Q est réalisé, à l'aide d'éléments purement réactifs, suivant l'une des deux structures de la figure 2.

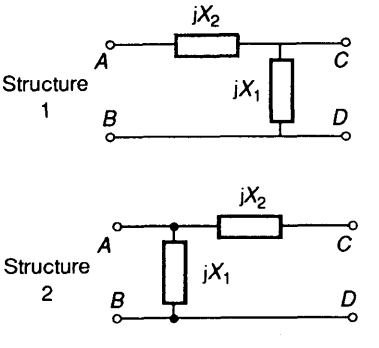


Fig. 2.

L'impédance $\underline{Z}_1 = jX_1$ est une inductance.

1° Quelle structure faut-il choisir pour le quadripôle Q dans les cas suivants :

a) $R_G > R_U$; *b*) $R_G < R_U$.

2° Calculer les réactances X_1 et X_2 du quadripôle, et en déduire les valeurs correspondantes des inductances et des capacités dans les cas suivants :

a) $R_G =$ 3 kΩ et $R_U = 30$ kΩ;

b) $R_G = 30$ kΩ et $R_U =$ 3 kΩ.

3° Calculer la puissance fournie à la charge R_U, d'une part lorsqu'elle est connectée directement au générateur, d'autre part lorsqu'elle est alimentée à travers le quadripôle Q et ce, dans les cas suivants :

a) $R_G =$ 3 kΩ et $R_U = 30$ kΩ;

b) $R_G = 30$ kΩ et $R_U =$ 3 kΩ.

3.
Un système triphasé équilibré en tension est constitué de trois tensions sinusoïdales de même amplitude et déphasées de $\frac{2\pi}{3}$ l'une par rapport à l'autre :

$$e_1 = E\cos\omega t;$$
$$e_2 = E\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right);$$
$$e_3 = E\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

1° Montrer que les nombres complexes qui leur sont associés sont respectivement :

$$\begin{cases} \underline{E}_1 = E \\ \underline{E}_2 = \underline{a}^2 E \\ \underline{E}_3 = \underline{a} E \end{cases}$$

avec $\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2° Vérifier les égalités suivantes :

$$|\underline{a}| = 1; \quad \underline{a}^2 = a^* = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\underline{a}^3 = 1; \quad 1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0.$$

3° Les trois tensions triphasées sont utilisées pour alimenter le dispositif de la figure 1.

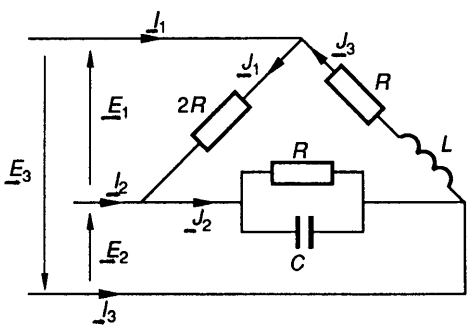


Fig. 1.

On donne $2R = 2L\omega = \frac{1}{C\omega} = 100\ \Omega$.

a) Calculer, en fonction de E, la puissance active P absorbée par le montage.

b) Calculer en fonction de E, les expressions complexes des courants $\underline{J}_1, \underline{J}_2, \underline{J}_3$, puis $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$.

4° On branche deux wattmètres comme l'indique la figure 2.

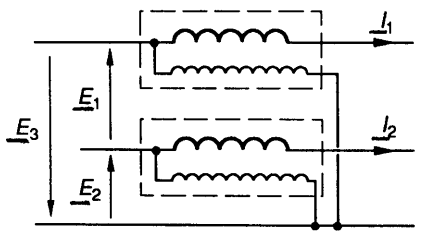


Fig. 2.

- Le circuit gros fil du premier wattmètre est monté en série sur le conducteur parcouru par le courant $\underline{I}_1$. Son circuit fil fin est soumis à la tension $-\underline{E}_3$.
- Le circuit gros fil du second wattmètre est monté en série sur le conducteur parcouru par le courant $\underline{I}_2$. Son circuit fil fin est soumis à la tension $\underline{E}_2$.

Calculer les indications W_1 et W_2 des deux wattmètres.

Comparer la puissance active P absorbée par le montage à la somme $W_1 + W_2$.

7 signaux aléatoires

1. INTRODUCTION

Nous n'avons étudié jusqu'à présent que des signaux parfaitement connus, on les appelle généralement déterministres : ils sont connus par leur représentation et elle est unique, ce n'est pas toujours une fonction mathématique simple à calculer, mais on peut toujours connaître le spectre en fréquence de cette fonction : c'est-à-dire, la répartition en fonction des fréquences de l'énergie contenue dans le signal; ces éléments permettent à tout instant t de déterminer avec certitude la valeur du signal à l'instant $t + \tau$, quelque soit τ.

Il existe une classe de signaux qui ne répondent pas à ce critère, et qu'il est facile de mettre en évidence sur un exemple.

On envisage la sortie d'un amplificateur différentiel dont les deux entrées sont mises à la masse. Si la tension d'offset a été parfaitement réglée, la sortie doit être égale à zéro, or si on augmente de façon importante la sensibilité de l'oscilloscope, on constate que la sortie n'est pas nulle : elle fluctue autour de zéro et est totalement imprédictible.

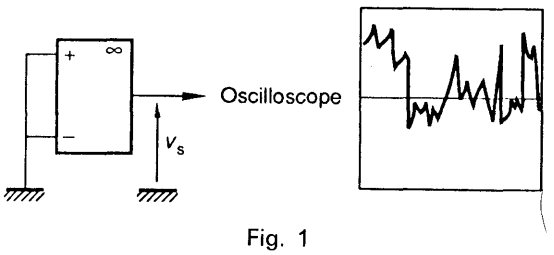


Fig. 1

Ce sont les propriétés intrinsèques du composant qui sont mises en évidence dans cette expérience. Ces fluctuations vont nous géner si nous introduisons une tension différentielle très faible à l'entrée de l'amplificateur; il nous appartient de les connaître le mieux possible pour s'en affranchir.

Les grandeurs mises en œuvre sont les courants; ce sont donc des passages d'électrons (ponctuels et porteurs d'une charge quantifiée d'électricité). Leur déplacement en absence de différence de potentiel à l'entrée de l'amplificateur est lié au hasard et il en passe donc — en temps suffisamment long — autant dans un sens que dans l'autre. Toutefois, à aucun moment, il nous est possible (même si l'on pouvait les peindre!) de les désigner nommément et de prévoir leur mouvement, donc de connaître la quantité d'électricité qui est passée à un instant t donné : ces phénomènes sont étudiés par la physique statistique.

Nous étudierons ensuite sur quelques cas en électronique les propriétés de ces signaux.

2. GRANDEURS ALÉATOIRES

2.1. QUELQUES PROPRIÉTÉS

Les grandeurs où le hasard intervient portent le nom de grandeurs aléatoires (du latin aléa : « les dés, le hasard »); les statisticiens ont développé la théorie des probabilités pour les étudier.

Nous nous contenterons des lancers de pièces, et jets de dés afin d'en découvrir les principales propriétés.

2.1.1. Approche intuitive

Prenons le problème posé au lanceur de pièces de monnaie. Les probabilités et leur théorie permettent non de percer les secrets du hasard, mais d'apporter des renseignements sur le résultat d'une expérience dépendant du hasard; nous savons intuitivement qu'il a une chance sur

deux d'avoir pile (ou face) à chaque lancer, nous ne pouvons pas prévoir le résultat au lancer, mais avec un risque minime, nous affirmerons que pour 2 000 lancers, il aura approximativement obtenu autant de fois pile que face, soit 1 000 de chaque.

2.1.2. Début d'axiomatisation

Chaque lancer de pièces correspond à une expérience. C'est celle-ci qui dépend du hasard, elle donne deux résultats; on appelera le résultat de l'expérience : un événement (aléatoire) élémentaire. Il y a deux événements élémentaires : pile, face; l'espace des événements élémentaires s'appellera l'ensemble des événements élémentaires : (pile, face).

Exemple d'application

Un dé comporte six faces numérotées de 1 à 6. Quels sont les événements élémentaires et quel est l'ensemble des événements élémentaires?

Réponse

Les événements élémentaires sont :

face 1, face 2, face 3, face 4, face 5, face 6.

L'ensemble des événements élémentaires :

(1, 2, 3, 4, 5, 6).

Cet exemple va nous permettre de définir d'autres types d'événement, car de cet ensemble on peut tirer un grand nombre de sous-ensembles qui définiront alors un événement aléatoire non élémentaire par exemple :

- événement pair : (2, 4, 6)
- événement impair : (1, 3, 5).

Nous voyons immédiatement que deux événements viennent compléter la liste, ce sont :

- l'événement certain : il contient tous les événements élémentaires;
- l'événement nul : il ne contient aucun des événements élémentaires.

2.1.3. Probabilité

On peut définir intuitivement la probabilité comme la limite, si elle existe, de la fréquence relative d'occurrence d'un événement par rapport au nombre d'épreuves réalisées lorsque ce nombre d'épreuves tend vers l'infini.

Pour obtenir l'événement (A) :

$$\Pr(A) = \frac{\text{Nbre d'occurrence de } (A)}{\text{Nbre d'épreuves}}.$$

On notera

$$\Pr(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{(NA)}{N}.$$

Exemple d'application

Le lancer des dés.

On constate immédiatement que la probabilité de l'événement certain vaut 1 car, en effet, c'est le rapport de $\frac{N}{N}$.

De même, on constate que la probabilité de l'événement nul vaut 0.

Nous avons : $N = N1 + N2 + N3 + N4 + N5 + N6$.

Si les dés ne sont pas pipés, nous aurons au bout d'un grand nombre de lancer :

$$N_1 = N2 = N3 = N4 = N5 = N6,$$

car chaque événement est équiprobable,

donc $N = 6N_i$, $i \in [1 \text{ à } 6]$,

et $\Pr(1) = \Pr(2) = \Pr(3) = \Pr(4) = \Pr(5) = \Pr(6) = \frac{1}{6}$.

2.2. PRINCIPAUX THÉORÈMES

2.2.1. Somme de deux événements

On appelle somme de deux événements A et B, l'événement $A + B$ ou $A \cup B$ (A union B) consistant en la réalisation de l'événement A ou de l'événement B ou de A et B ensemble.

On représente habituellement les événements par des domaines de l'espace probabilité, l'union des deux domaines est représenté par :

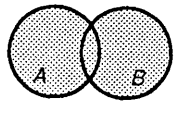


Fig. 2

Si les deux événements n'ont aucune partie commune, on dit alors qu'ils sont incompatibles, c'est par exemple :

- l'événement P : faces paires;
- l'événement I : faces impaires.

Ils seront alors représentés disjoints :

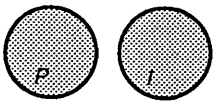
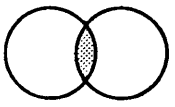


Fig. 3

2.2.2. Produit de deux événements

C'est l'événement consistant en la réalisation simultanée des événements A et B on la note $A \,.\, B$ ou $A \cap B$.



$A \cap B$

Fig. 4

On constate immédiatement que dans le cas de l'exemple précédent représenté sur la figure 3 $A \,.\, B$ est l'événement nul.

Exemple

Soit A l'ensemble des événements pairs

$$A = (2, 4, 6)$$

et B l'ensemble des événements nombres premiers

$$B = (1, 2, 3, 5),$$

alors : $A \,.\, B = (2).$

2.2.3. Théorème des probabilités totales

a) La probabilité d'obtenir l'événement somme de deux événements incompatibles est égal à la somme des probabilités de ces deux événements.

$$\mathbf{Pr}(A + B) = \mathbf{Pr}(A) + \mathbf{Pr}(B)$$

Application

Soit C l'événement certain, en définissant par $\overline{A}$ le contraire de l'événement A, on aura :

$$C = A + \overline{A}.$$

La probabilité de l'événement certain valant 1

on a donc $1 = \Pr(A) + \Pr(\overline{A})$

ou $\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A).$

b) La probabilité d'obtenir l'événement somme de deux événements compatibles est égal à la somme des probabilités de ces deux événements diminuée de la probabilité de l'intersection de ces deux événements.

$$\mathbf{Pr}(A + B) = \mathbf{Pr}(A) + \mathbf{Pr}(B) - \mathbf{Pr}(A \,.\, B)$$

Application

On en déduit immédiatement que :

$$\Pr(A \,.\, B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A + B).$$

2.2.4. Probabilités conditionnelles

Deux événements sont dits *indépendants* si la réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation (ou de la non réalisation) de l'autre.

Si la réalisation de l'un dépend de l'autre, on traduit cette dépendance par la probabilité conditionnelle.

Si l'événement X dépend de l'événement Y, on définit la probabilité $\Pr(X/Y)$ comme étant la probabilité d'obtenir X lorsque Y est réalisé.

On démontrerait que :

$$\Pr(X/Y) = \frac{\Pr(X \,.\, Y)}{\Pr(Y)}$$

et que $$\Pr(Y/X) = \frac{\Pr(X \,.\, Y)}{\Pr(Y)}.$$

On en déduit que la probabilité d'obtenir le produit de deux événements indépendants est égale au produit des probabilités des deux événements.

Si A et B sont indépendants :

$$\Pr(A \,.\, B) = \Pr(A)\ \Pr(B).$$

3. VARIABLES ALÉATOIRES

3.1. DÉFINITION

A chaque événement aléatoire on fait correspondre un élément de R.

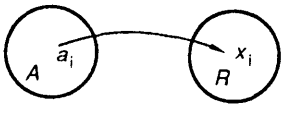


Fig. 5

A l'événement a_i de A, on fait correspondre $x(a_i) \in R$, ce nombre réel ou complexe varie en fonction des différents événements a_i; on le note

indifféremment $x(a_i)$ ou X : c'est une variable aléatoire.

Si x prend un nombre discret de valeur on dit que la **variable aléatoire est discrète.**

Si x est défini sur tout ou partie de l'axe des réels c'est une **variable aléatoire continue.**

3.2. VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

3.2.1. Définition des moments

On appelle espérance mathématique notée $E(x)$, la valeur moyenne de x.

Pour une variable discrète, appelons X_i les valeurs de la variable aléatoire, $\Pr(x = X_i)$ la probabilité d'obtenir la réalisation de X_i.

$$E(x) = X_1 \Pr(x = X_1) + X_2 \Pr(x = X_2) + \ldots + X_n \Pr(x = X_n),$$

ou $$\boldsymbol{E(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i \Pr(x = X_i).}$$

On pose en général :

$$E(x) = m.$$

On appelle espérance mathématique des carrés :

$$E(x^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \Pr(x = X_i).$$

On définit la variance comme l'espérance mathématique de $(x - E(x))^2$, on la note σ_x^2.

$$\sigma_x^2 = E(x - E(x))^2$$

On la calcule aisément :

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - m^2.$$

On définit de façon analogue, les moments d'ordre k comme étant l'espérance mathématique de x^k :

$$E(x^k) = \sum_{i=1}^{n} X_i^k \Pr(x = X_i).$$

3.2.2. Exemple d'application

On prendra comme expérience aléatoire le lancer de deux dés, et comme variable aléatoire discrète la somme des deux faces visibles.

Nous allons utiliser les différents résultats énoncés préalablement pour calculer les grandeurs statistiques intéressantes de cette variable aléatoire.

Il nous faut connaître la loi de probabilité pour l'obtention d'une face d'un dé.

Il y a six faces, elles sont équiprobables, donc

$$\Pr(x = 1) = \Pr(x = 2) = \ldots = \Pr(x = 6).$$

Comme $\Pr(x = 1, 2, 3, 4, 5, 6) = 1$ (événement certain), on en déduit

$$\Pr(x = i \text{ pour } i = 1 \text{ à } 6) = \frac{1}{6}.$$

Nous devons ensuite calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire somme de deux dés.

Nous allons recenser les différents cas possibles :

$$X \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

X_i	événements « somme »	$\Pr(x = x_i)$
2	1 + 1	$\frac{1}{36}$
3	1 + 2, 2 + 1	$\frac{2}{36}$
4	1 + 3, 2 + 2, 3 + 1	$\frac{3}{36}$
5	1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1	$\frac{4}{36}$
6	1 + 5, 2 + 4, 3 + 3, 4 + 3, 5 + 1	$\frac{5}{36}$
7	1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1	$\frac{6}{36}$
8	2 + 6, 3 + 5, 4 + 4, 5 + 3, 6 + 2	$\frac{5}{36}$
9	3 + 6, 4 + 5, 5 + 4, 6 + 3	$\frac{4}{36}$
10	4 + 6, 5 + 5, 6 + 4	$\frac{3}{36}$
11	5 + 6, 6 + 5	$\frac{2}{36}$
12	6 + 6	$\frac{1}{36}$

On vérifie bien sur que :

$$\Pr(x) = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ,9, 10, 11, 12)$$
$$= \sum_{i=2}^{12} \Pr(x = i)$$
$$= \frac{36}{36}$$
$$= 1$$

On représente cette loi de probabilité par le graphique suivant : $\Pr(x = i)$.

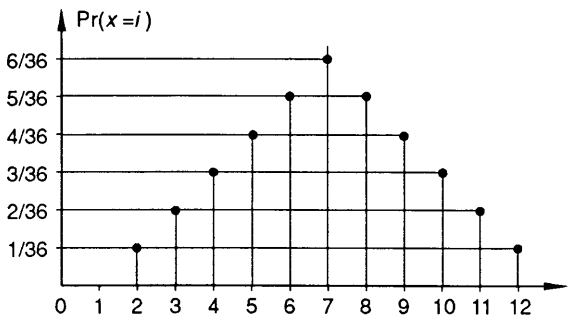


Fig. 6

On remarque sur ce graphique que la loi de probabilité de la variable aléatoire discrète (V.A.D.) est symétrique autour d'un axe vertical centré sur $x = 7$.

Calcul de la valeur moyenne de la V.A.D.

$$E(x) = \sum_{i=2}^{12} i \times \Pr(x = i)$$
$$= \frac{2 \times 1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36}$$
$$+ 6 \times \frac{5}{36}$$
$$+ 7 \times \frac{6}{36} + 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36}$$
$$+ 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + \frac{12}{36}$$

$E(x) = 7$.

On retrouve ainsi une propriété importante des variables aléatoires : lorsque la représentation de la probabilité d'une variable aléatoire est symétrique, cet axe de symétrie se trouve toujours en $E(x)$.

On calcule aisément $E(x^2)$:

$$E(x^2) = \sum_{i=2}^{12} i^2 \Pr(x = i)$$
$$= 54{,}833.$$

On en déduit le carré de l'écart-type σ_x^2 :

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - m^2$$
$$= 5{,}833$$

d'où $\sigma_x = 2{,}41$.

3.3. VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

3.3.1. Densité de probabilité

Nous venons de voir que nous pouvions connaître les propriétés d'une variable aléatoire au travers de la connaissance de la loi de probabilité de cette grandeur.

A partir de l'exemple du paragraphe 3.2.2. nous avons pu représenter la probabilité d'obtenir l'une des valeurs de l'espace des x_i, nous pouvons intuitivement comprendre que si l'espace des x est un espace continu les points représentatifs sont infiniment voisins et la représentation de la loi de probabilité sera une courbe continue.

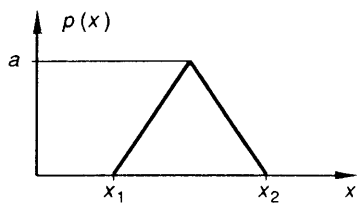


Fig. 7

Nous appellerons *densité de probabilité* et noterons $p(x)$ la fonction caractérisant la loi de probabilité.

Nous en déduisons immédiatement que la probabilité d'obtenir un événement sera définie sur un intervalle $]x, x + dx]$

$$\Pr\{X \in]x, x + dx]\} = p(x)\, dx.$$

Nous pouvons immédiatement en déduire la probabilité de l'événement certain, qui est donnée par l'intégrale sur l'axe des x; on peut la calculer :

$$\Pr\{x \in [\infty + \infty]\} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx$$
$$= 1$$

(résultat du paragraphe 2.1).

Cette propriété est très importante et permet de vérifier que la fonction décrivant la loi de probabilité est exprimée correctement.

A retenir : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1}$

3.3.2. Quelques lois de probabilité

a) Densité de probabilité des variables aléatoires équiprobables

Soit x une variable aléatoire équiprobable sur l'intervalle [0; 2], la courbe représentant la loi de probabilité ne peut être qu'une portion de droite horizontale.

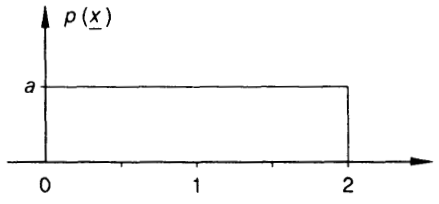


Fig. 8

Nous voyons que pour calculer la valeur de a, il nous suffit d'appliquer la relation que nous avons démontrée précédemment.

$$p(x) = a; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} a \, dx = 2a = 1,$$

donc $$a = 0{,}5.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} p(x) = 0{,}5 \text{ pour } x \in [0, 1[\\ P(x) = 0 \text{ pour } x \notin [0, 1[\end{array}}$$

b) Loi de probabilité gaussienne

Nous rencontrerons souvent des variables aléatoires gaussiennes. Pour en connaître toutes les propriétés il faut les rechercher dans les ouvrages de mathématique.

Cependant il faut connaître la densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne, elle est définie lorsqu'elle est centrée sur 0 par :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right).$$

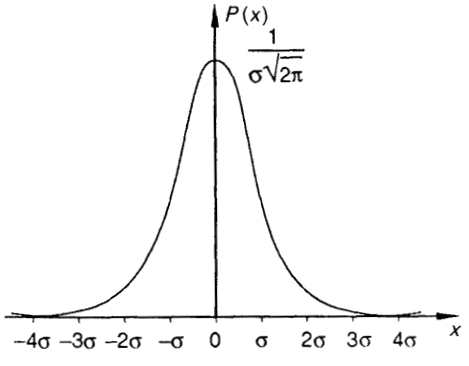


Fig. 9

On peut calculer les premiers moments de cette loi de probabilité :

$$E(x) = 0$$
$$E(x^2) = \sigma^2$$
$$E(x^3) = 3\sigma^4.$$

Lorsque la loi n'est pas centrée sur 0, l'extremum se trouve en a.

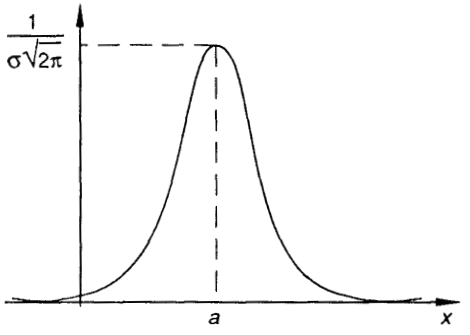


Fig. 10

L'expression de la densité de probabilité se déduit de la précédente par un changement d'axe vertical, soit

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

On calcule aisément les 2 premiers moments

$$E(x) = a$$

(ce résultat est évident vu la symétrie de la fonction $p(x)$ autour de a)

$$E(x^2) = \sigma^2.$$

On peut effectuer un changement de variable en posant $y = x - a$ variable aléatoire centrée en 0.

Ce résultat permet de définir une variable aléatoire gaussienne par deux valeurs σ et a,

- σ appelé écart-type,
- a appelé moyenne.

Exemple physique

Superposition d'un bruit gaussien centré et d'une grandeur continue.

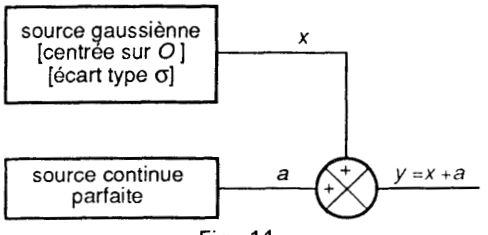


Fig. 11

La variable aléatoire y a le même écart type σ que x et aura pour valeur moyenne a.

c) Densité de probabilité de la loi de probabilité de Poisson

Cette loi est rencontrée fréquemment en physique lorsque l'on compte des événements se produisant à intervalles aléatoires, tels que la désintégration d'un élément radioactif.

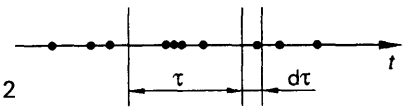


Fig. 12

On définit la probabilité pour qu'il y ait un événement dans l'intervalle $d\tau$ par

$$\Pr\{1,]\tau, \tau + d\tau]\} = \lambda\tau\, e^{-\lambda\tau}\, d\tau,$$

on notera $\quad p(1, \tau) = \lambda\tau e^{-\lambda\tau}$

et la probabilité, pour qu'il n'y ait aucun événement dans l'intervalle $]\tau, \tau + d\tau]$, est définie par sa densité de probabilité.

$$\Pr\{0,]\tau, \tau + d\tau]\} = e^{-\lambda\tau}\, d\tau,$$

on notera $\quad p(0, \tau) = e^{-\lambda\tau}$.

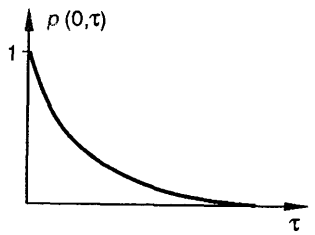


Fig. 13

On constate à l'évidence que plus l'intervalle est long et plus la probabilité qu'il n'y ait pas des événements diminue.

Pour de plus amples développements, il faut se reporter aux ouvrages spécialisés de mathématique.

4. APPLICATION À L'ÉLECTRONIQUE

4.1. STATIONNARITÉ ERGODICITÉ

Jusqu'à présent nous n'avons raisonné que sur des événements aléatoires, où le temps n'intervenait pas comme une variable. Il nous faut reprendre l'exemple du paragraphe 3.3.2 *b*.

Nous pouvons définir un premier événement aléatoire comme étant la sortie de l'additionneur entre l'instant t_1 et t_2, un deuxième événement comme étant la sortie de l'additionneur entre t_2 et t_3...

Comment peut-on caractériser ces différents événements aléatoires puisque la connaissance des lois de probabilité ne fait pas intervenir le temps?

Nous devons introduire la *stationnarité.*

On dira que $x(t)$ est stationnaire si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps, donc du choix de l'origine des temps.

Donc, quelque soit l'échantillon, les propriétés statistiques sont identiques; or pour obtenir expérimentalement $E(x)$, il faut être capable de réaliser :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx,$$

soit posséder un échantillon de durée infinie pour que l'ensemble des x puissent être présents.

Nous constatons que nous devrons nous contenter d'une moyenne sur un intervalle de temps de durée finie.

Nous définirons ainsi l'ergodicité.

On dira que $x(t)$ est un processus aléatoire ergodique si moyennes statistiques sont égales aux moyennes temporelles correspondantes.

Donc

$$\text{si } E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\, dx \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_1 - \frac{T}{2}}^{t_1 + \frac{T}{2}} x(t)\, dt,$$

$$\text{si } E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\, dx \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_1 - \frac{T}{2}}^{t_1 + \frac{T}{2}} x^2(t)\, dt$$

Cela veut dire qu'elles sont indépendantes du choix de t_1.

4.2. BRUIT

Nous définirons comme bruit, les processus aléatoires que nous rencontrons en électronique. Ils sont caractérisables par leurs propriétés statistiques qui sont pour la plupart déduites par le calcul et vérifiées expérimentalement.

4.2.1. Bruit blanc

Nous avons caractérisé jusqu'à présent un signal par sa forme, c'est-à-dire son évolution dans le temps. Il ne nous est pas possible de donner la fonction de variation du temps, mais seulement

les moments $(E(x), E(x^2)...$ et la densité de probabilité $p(x)$ de la grandeur.

Nous devons pour mieux le connaître essayer **d'approcher sa composition spectrale.**

On définira un bruit blanc, comme un bruit dont le spectre est infini et constant.

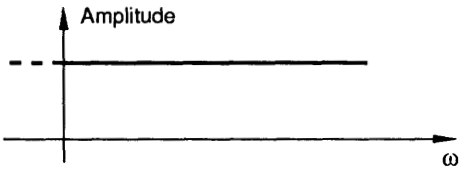


Fig. 14

On constate alors qu'il est d'énergie infinie, et qu'il nous sera plus facile de raisonner sur les puissances. Nous détaillerons au paragraphe 4.3 ces problèmes d'analyse spectrale.

4.2.2. Bruit coloré

Par opposition au bruit blanc, nous définissons un bruit coloré par analogie au spectre lumineux (le blanc contient toutes les couleurs à niveau égal). Il aura donc un spectre fini et sera d'énergie finie.

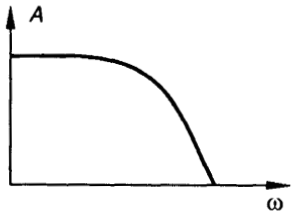


Fig. 15

Les bruits peuvent avoir différentes natures physiques.

4.2.3. Bruit de grenaille

Ce bruit est obtenu en analysant le courant qui traverse une diode alimentée dans le sens passant.

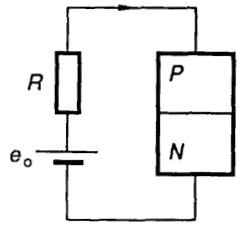


Fig. 16

On constate avec une observation fine que le courant I est variable, alors qu'il devrait être constant.

On peut démontrer que le courant électrique dans la diode est un processus de *Poisson*, on l'appelle bruit de grenaille (lié à l'état corpusculaire de l'électricité). C'est un bruit blanc jusqu'à 1 GHz si on ne tient pas compte du temps de transit.

4.2.4. Bruit thermique

Une résistance parcourue par un courant électrique voit sa différence de potentiel aux bornes varier. Les fluctuations autour de i sont une fois encore liées à un processus poissonnien dont l'amplitude est liée à la température absolue T de la résistance. Il peut être considéré comme blanc jusqu'à 10 GHz.

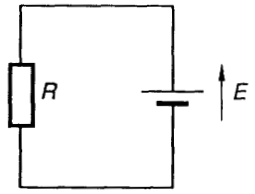


Fig. 17

4.2.5. Autres bruits

On peut encore citer le bruit de génération recombinaison, le bruit de scintillation, qui eux sont des bruits colorés, phénomènes dépendant des grandeurs électriques et de la géométrie des composants.

4.3. ANALYSE SPECTRALE

4.3.1. Fonction d'autocorrélation

Nous nous intéresserons aux processus ergodiques et stationnaires.

On définit la fonction d'autocorrélation par :

$$\Gamma_X(t_1, t_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t_1) \,.\, x(t_2)\, \mathrm{d}t.$$

Le processus étant stationnaire, l'origine des temps n'intervient pas.

On pose $t_2 - t_1 = \tau$ et $t_2 = t$, d'où

$$\Gamma_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t-\tau) \,.\, x(t)\, \mathrm{d}t.$$

La fonction d'autocorrélation au point $\tau = 0$ vaut $E(x^2)$; cette valeur est supérieure à 0.

La fonction d'autocorrélation est symétrique; on obtient par exemple :

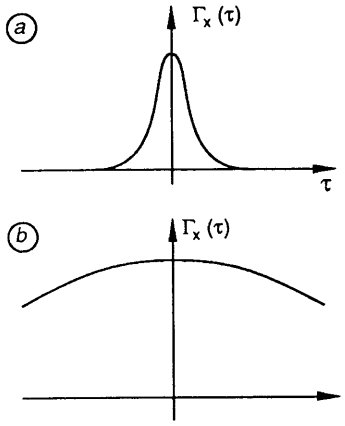


Fig. 18

L'exemple ⓑ est facile à interpréter. Comme $\Gamma_X(\tau)$ ne varie pas beaucoup en fonction de τ, c'est que $x(t)$ et $x(t-\tau)$ sont très voisins, donc $\Gamma_X(\tau)$ traduit la reproductibilité du processus, ou la ressemblance des deux échantillons. Dans ce cas on dit qu'ils sont fortement corrélés.

L'exemple ⓐ montre un phénomène où les deux échantillons, même pour un temps faible, n'ont pas beaucoup de ressemblance. L'autocorrélation traduit en quelque sorte la mémoire du processus, on dit alors que les deux échantillons sont faiblement corrélés.

On constate donc que si $\Gamma_X(\tau)$ est périodique, le phénomène que nous étudions est lui-même périodique et n'est que pseudo-aléatoire.

Réalisation d'un autocorrélateur

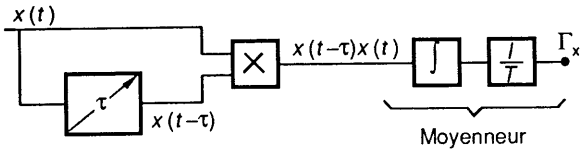


Fig. 19

En général il est très difficile de réaliser un dispositif donnant un retard pur en électronique linéaire, il est fait en général appel à des systèmes de conversion afin de réaliser le retard de façon numérique.

4.3.2. Analyse spectrale

a) Rappel sur les notions d'énergie et de puissance d'un signal

Nous considérerons l'énergie dissipée dans le montage suivant :

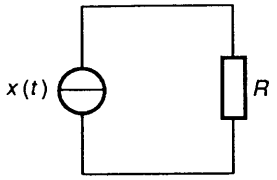


Fig. 20

Pendant le temps dt l'énergie dissipée dans R vaut dE

$$\mathrm{d}w = \frac{x^2(t)}{R}\,\mathrm{d}t.$$

Nous définissons la puissance normalisée instantanée, en prenant $R = 1\ \Omega$:

$$P(t) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = x^2(t).$$

Nous pouvons calculer l'énergie normalisée contenue dans ce signal dans l'intervalle $[t_1, t_2]$:

$$w_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

On connaît ainsi l'énergie normalisée totale du signal en calculant :

$$w_{-\infty,+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

On peut ainsi définir deux classes de signaux :

– les signaux à énergie finie, c'est-à-dire pour lesquels $w_{-\infty,+\infty} < \infty$,

– les signaux à énergie infinie, c'est-à-dire pour lesquels $w_{-\infty,+\infty} = \infty$.

Pour ces signaux une grandeur significative peut être ajoutée à la puissance instantanée; la puissance moyenne sur un intervalle de temps T est :

$$P_{\text{moy}}(t, T) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} x^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{w_{t,t+T}}{T}.$$

Cette grandeur ainsi définie permet de calculer le signal continu possédant la même puissance pendant l'intervalle de temps $[t, t+T]$.

Nous constatons que la notion de puissance moyenne sur un intervalle d'amplitude T, correspond à la définition du moment d'ordre 2 $E(x^2)$ lorsque l'on fait tendre T vers l'infini.

b) Densité spectrale de puissance moyenne

Nous pouvons par un calcul mathématique utilisant la transformation de Fourier, montrer que la connaissance énergétique temporelle du signal est équivalente à sa connaissance énergétique spectrale.

Nous l'appellerons densité spectrale de puissance $S_X(f)$ ou $S_X(\omega)$ (c'est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation). Elle a pour unité des volts carrés ou des ampères carrés par hertz.

Exemple

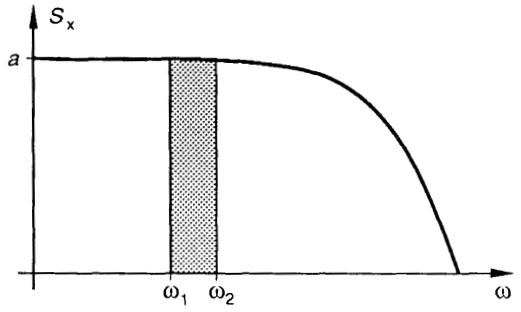


Fig. 21

$a \times (\omega_2 - \omega_1)$ = aire comprise entre ω_1 et ω_2. Elle représente la puissance moyenne temporelle dans la bande de pulsation $[\omega_1, \omega_2]$.

On utilise un moyenneur quadratique précédé d'un filtre de bande pour calculer $a \times (\omega_2 - \omega_2)$:

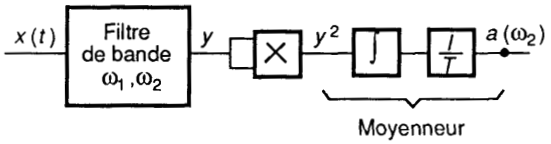


Fig. 22

Maintenant on peut mieux appréhender les notions intuitives de bruit blanc et de bruit coloré.

c) Largeur de bande

Nous avons vu que ce type de bruit avait une répartition spectrale horizontale, nous savons qu'il est d'énergie infinie et de puissance moyenne finie, donc de densité spectrale constante égale à : $2 \times \Gamma_X(0)$.

Exemple d'application

Bruit thermique d'une résistance de valeur R à température T.

Rappel

K : constante de Boltzmann.

Puissance moyenne temporelle :

$$P_M = 4KTR\ \mathrm{d}f.$$

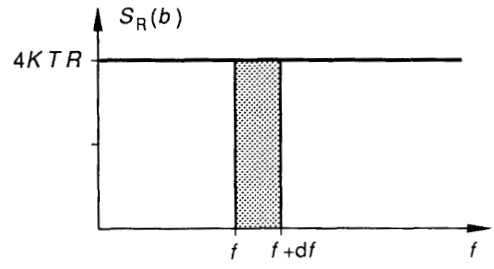


Fig. 23

Connaissant la puissance, on en déduit le générateur équivalent pour la bande de fréquence considérée :

$$P_M = e_{\text{eff}}^2$$

donc $$e_{\text{eff}} = \sqrt{4KTR\ \mathrm{d}f}.$$

2e partie

COMPOSANTS

théorie générale simplifiée des semi-conducteurs

1. RAPPELS D'ÉLECTROSTATIQUE

1.1. CHAMP ÉLECTRIQUE

On appelle champ électrique toute portion d'espace où la charge au repos est soumise à une force. Ce champ est caractérisé en tout point par :

- **un vecteur : le vecteur champ électrique $\vec{E}$,**
- **un nombre : le potentiel V.**

• On appelle ligne de champ, une courbe orientée qui en chacun de ses points est tangente au vecteur champ électrique (*fig.* 1).

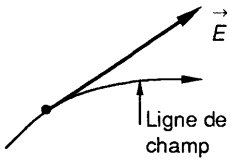


Fig. 1.

• On appelle équipotentielle, une surface dont tous les points sont au même potentiel.

1.2. CRÉATION DU VECTEUR CHAMP ÉLECTRIQUE $\vec{E}$

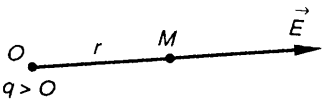


Fig. 2.

Une charge ponctuelle q placée en un point O crée en tout point M de l'espace environnant un vecteur champ électrique $\vec{E}$ (*fig.* 2) :

- dirigé suivant OM,
- d'intensité $E = 9 \cdot 10^9 \frac{q}{r^2}$, dans le vide ou dans l'air,
- *orienté vers la charge si elle est négative.*

Dans le cas d'une répartition plane uniforme et infinie de charges, les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface portant les charges (*fig.* 3).

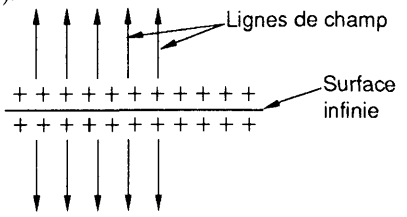


Fig. 3.

1.3. ACTION DU VECTEUR CHAMP ÉLECTRIQUE $\vec{E}$

Toute charge électrique q mise en présence d'un vecteur champ électrique $\vec{E}$ est soumise à une force $\vec{F} = q\vec{E}$ (*fig.* 4).

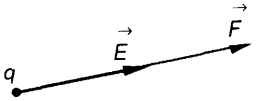


Fig. 4.

Si la charge q est positive, la force est orientée dans le sens du champ.

1.4. RELATION CHAMP POTENTIEL

Soient deux points A et B, d'un champ électrique, distants de dl, et portés respectivement aux potentiels V et $V + dV$, et soit $\vec{E}$ le vecteur champ électrique entre A et B (*fig.* 5).

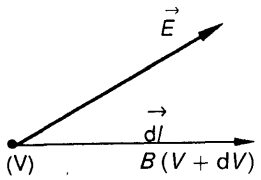


Fig. 5.

En posant $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{E}$ et V sont liés par la relation :

$$\mathbf{d}V = -\vec{E}\,\mathbf{d}\vec{l}.$$

On en déduit les propriétés suivantes :

- le vecteur champ électrique $\vec{E}$ est orienté suivant les potentiels décroissants;
- les surfaces équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ.

1.5. CONDENSATEUR

On obtient un condensateur en mettant en présence deux conducteurs A et B, appelés armatures, séparés par un isolant (*fig.* 6).

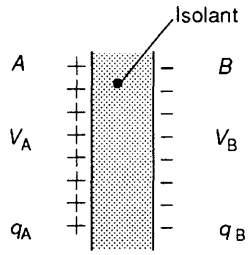


Fig. 6.

Si on porte respectivement ces conducteurs aux potentiels V_A et V_B, il apparaît sur les faces en regard des conducteurs deux charges égales et opposées $q_A = +q$, et $q_B = -q$ telles que :

$$q = C(V_A - V_B).$$

C étant la capacité du condensateur. Elle se mesure en Farads.

1.6. TRAVAIL DE LA FORCE ÉLECTROSTATIQUE

Soit une charge q que l'on déplace dans un champ électrique d'un point A porté au potentiel V_A vers un point B porté au potentiel V_B (*fig.* 7).

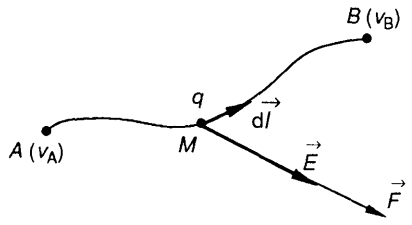


Fig. 7.

En un point intermédiaire M, où le vecteur champ électrique est égal à $\vec{E}$, la force électrostatique fournit, pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$, le travail :

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\,\overrightarrow{dl} = q\vec{E}\,\overrightarrow{dl} = -q\,\mathrm{d}V.$$

Pour le déplacement total de A en B, cette force fournit le travail :

$$W = \int_A^B \mathrm{d}W = q\int_A^B -\mathrm{d}V = q(V_A - V_B).$$

En conclusion : en augmentant de V_0 le potentiel d'une charge q, on lui fournit l'énergie potentielle

$$W_0 = qV_0.$$

1.7. THÉORÈME DE GAUSS

Soit une surface fermée S englobant la charge Q (*fig.* 8).

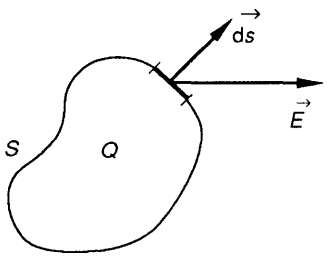


Fig. 8.

On appelle flux du vecteur champ électrique $\vec{E}$ à travers la surface S la quantité :

$$\Phi = \int_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS}.$$

D'après le théorème de Gauss, ce flux est égal à :

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon},$$

où ε est la permittivité du milieu.

Ce théorème, permet, entre autres, de calculer, par un choix judicieux de la surface S, l'expression de champs électriques, dans le cas où la répartition des charges présente des symétries permettant une évaluation simple du flux.

2. RAPPELS SUR LA STRUCTURE DE LA MATIÈRE

L'atome est constitué d'un noyau entouré d'électrons.

2.1. LE NOYAU

Le noyau contient deux types de particules :

- les neutrons qui ne sont pas chargés,
- les protons qui portent une charge électrique $+ e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ coulombs.

2.2. LES ÉLECTRONS

Le noyau est entouré d'électrons qui portent une charge électrique $- e$.

L'atome étant électriquement neutre, le nombre de protons est égal au nombre d'électrons. Les électrons sont répartis en couches successives. On distingue :

- les électrons internes qui occupent les couches internes et qui sont très fortement liés au noyau,
- les électrons périphériques qui occupent la couche la plus externe et qui sont peu liés au noyau.

Tous les atomes tendent à avoir ***huit électrons*** *sur leur couche externe.*

3. SEMI-CONDUCTEUR INTRINSÈQUE

Les semi-conducteurs (germanium et surtout silicium) *possèdent 4 électrons sur leur couche périphérique.* Il est possible de les produire avec un haut degré de pureté (moins d'un atome étranger pour 10^{11} atomes de semi-conducteur) : on parle alors de semi-conducteur intrinsèque.

Pour simplifier le raisonnement, nous représenterons un atome de silicium conformément à la figure 9.

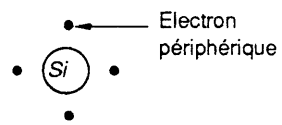


Fig. 9.

3.1. LIAISON COVALENTE

Afin de voir huit électrons sur sa couche externe, chaque atome de silicium met ses 4 électrons périphériques en commun avec les atomes voisins. On obtient ainsi, pour le cristal de silicium, la représentation de la figure 10.

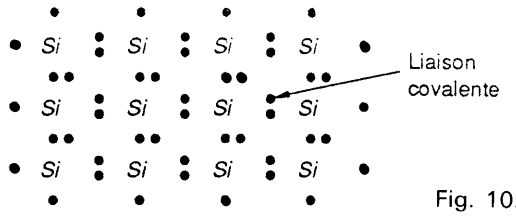


Fig. 10.

C'est la mise en commun des électrons périphériques, appelée liaison covalente, qui assure la cohésion du cristal de silicium.

Les électrons qui participent à ces liaisons sont fortement liés aux atomes de silicium. Il n'apparaît donc aucune charge mobile susceptible d'assurer la circulation d'un courant électrique. Le semi-conducteur est alors un isolant. Cet état apparaît à la température de 0 kelvin.

3.2. IONISATION THERMIQUE

A la température ordinaire, l'agitation thermique provoque la rupture de quelques liaisons covalentes. Un des électrons participant à cette liaison acquiert ainsi l'énergie nécessaire pour quitter l'atome auquel il était lié. Il devient un porteur de charge libre, capable de se déplacer dans le cristal, et autorisant ainsi la circulation d'un courant électrique. Le cristal devient alors un mauvais isolant d'où son appellation de semi-conducteur.

L'atome de silicium qui a perdu un électron n'est plus électriquement neutre : il est devenu un ion positif, (*fig.* 11).

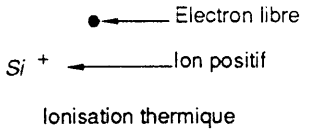


Fig. 11.

Ce phénomène n'intéresse qu'un nombre très faible d'atomes de silicium, (3 sur 10^{13} à 27 °C).

3.3. RECOMBINAISON

L'ionisation thermique conduirait, à terme, à l'ionisation de tous les atomes de silicium si elle n'était pas compensée par un autre phénomène : les recombinaisons. Un électron libre, arrivant à proximité d'un ion positif de silicium peut être capté par ce dernier qui redevient un atome neutre. La liaison covalente est alors rétablie.

A température fixe un équilibre s'établit entre les phénomènes d'ionisation thermique et de recombinaison. La concentration n_i en électrons libres (nombre par unité de volume) dépend :

- de l'énergie W_i nécessaire pour ioniser un atome (pour le silicium $W_i = 1{,}12$ électron-volt $= 1{,}12 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ joules),
- de la température absolue T du cristal, suivant la loi

$$n_i = AT^{3/2}\, e^{-\frac{W_i}{2KT}}$$

dans laquelle A et K sont des constantes; $K = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/° (constante de Boltzman).

Cette concentration augmente donc très rapidement avec la température; elle vaut $n_i = 1{,}5 \cdot 10^{10}$ cm^{-3} pour le silicium à 27 °C ($T = 300$ °K).

3.4. NOTION DE TROU

Considérons les phénomènes successifs décrits à la figure 12 dans laquelle les électrons participant aux liaisons covalentes sont décrits par des traits :

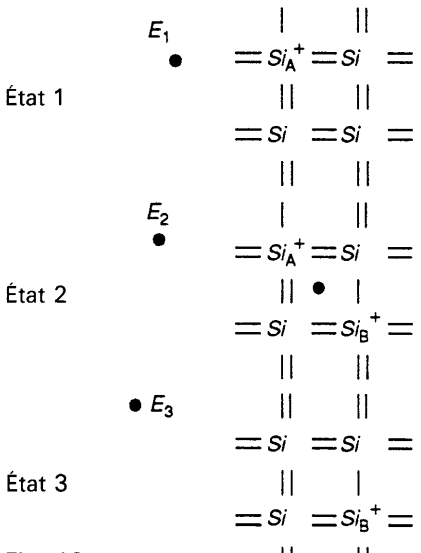


Fig. 12.

- **État 1 :** ionisation d'un atome de silicium qui provoque l'apparition d'un ion positif en A et d'un électron libre en E_1;
- **État 2 :** ionisation d'un deuxième atome de silicium en B;
- **État 3 :** recombinaison en A.

Comparons l'état initial et l'état final :

- l'électron libre s'est déplacé de E_1 en E_3;
- tout se passe comme si la charge positive portée par un ion de silicium s'était déplacée de A en B. En fait ce n'est pas l'ion qui a changé de place, mais la propriété « absence d'électron » qui a transité de A en B. Cette « absence d'électron » est équivalente à une charge positive $+e$: nous l'appellerons *trou.*

Les électrons libres et les ions de silicium apparaissant en quantités égales, la concentration en électrons libres (n_i), et en trous (p_i) sont donc égales :

$$n_i = p_i = AT^{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{W_i}{2KT}}.$$

A chaque électron libre correspond une absence d'électron (trou) : on parle alors de **paire électron-trou.**

4. SEMI-CONDUCTEUR DE TYPE *N*

On obtient un semi-conducteur de type N en injectant dans le cristal de silicium des atomes qui possèdent *cinq électrons* sur leur couche périphérique (phosphore, arsenic).

Quatre de ces cinq électrons sont mis en commun avec les atomes de silicium voisins pour réaliser des liaisons covalentes. Le cinquième électron, inutilisé, est très faiblement lié à l'atome pentavalent. Une énergie très faible suffit pour le libérer (*fig.* 13).

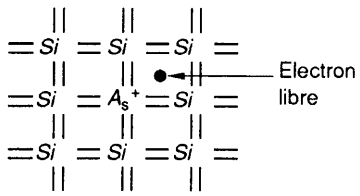


Fig. 13.

L'atome pentavalent, ici l'arsenic, As, qui a fourni un *électron libre* est appelé *atome donneur.* Il a perdu sa neutralité pour devenir un *ion positif fixe.*

A température ordinaire, la quasi totalité des atomes donneurs est ionisée. Le phénomène décrit à la figure 13 se superpose à la création de paires électron-trou par les atomes de silicium.

Aspects quantitatifs

La concentration en atomes donneurs est de une impureté pour 10^5 à 10^8 atomes de silicium.

Rappelons qu'à 27 °C, l'ionisation thermique intéresse 3 atomes de silicium sur 10^{13}.

Le nombre de paires électron-trou est donc beaucoup plus faible que le nombre d'électrons libérés par les atomes donneurs. Du point de vue des charges électriques, on peut donner, du semi-conducteur de type N, la représentation de la figure 14.

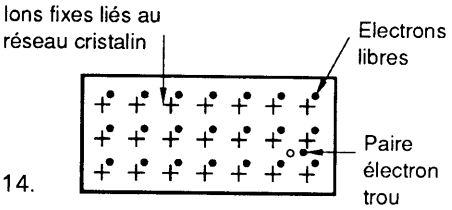


Fig. 14.

Si on considère les porteurs mobiles :

- les électrons libres apparaissent en grand nombre et sont appelés porteurs *majoritaires* d'où l'appellation semi-conducteur de type N,
- les trous très peu nombreux sont appelés *porteurs minoritaires.*

Les concentrations en électrons libres (n) et en trous (p) sont liées par la relation :

$$p \cdot n = p_i \cdot n_i = A_0 T^3 \, e^{-\frac{W_i}{KT}}.$$

La quasi totalité des atomes donneurs étant ionisée, la concentration en électrons libres n est très voisine de la concentration N_D en atomes d'arsenic ($n \approx N_D$). De plus N_D est très grand par rapport à $n_i = p_i$.

Nous pouvons en conclure que la concentration en trous est beaucoup plus faible pour le semi-conducteur de type N que pour le semi-conducteur intrinsèque, ce qui s'explique par le fait que le grand nombre d'électrons libres favorise les recombinaisons.

REMARQUE

L'ionisation d'un atome d'arsenic, contrairement à celle d'un atome de silicium ne conduit pas à la création d'un trou. En effet, chaque atome voyant huit électrons sur sa couche périphérique, la propriété « absence d'électron » devient quasiment insensible au niveau des atomes donneurs ionisés et la capture d'un électron par ces atomes ne peut être que fugitive.

5. SEMI-CONDUCTEUR DE TYPE *P*

On obtient un semi-conducteur de type P en injectant dans le cristal de silicium des atomes qui possèdent *trois électrons* sur leur couche périphérique (bore, indium).

Il manque ainsi un électron à l'atome trivalent pour réaliser les liaisons covalentes avec les quatre atomes de silicium qui l'entourent. En réalité, les électrons participant aux liaisons sont indiscernables les uns des autres. Tout se passe alors comme si un des atomes de silicium voisin avait cédé un électron à l'atome trivalent de bore (*fig.* 15) créant ainsi un trou dans le cristal de silicium.

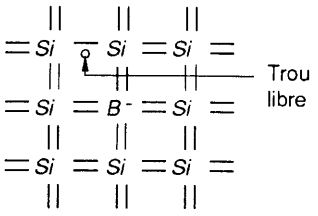


Fig. 15.

L'atome de bore qui capte un électron est appelé *atome accepteur.* Il a perdu sa neutralité pour devenir un *ion négatif fixe.*

A température ordinaire, la quasi totalité des atomes accepteurs est ionisée. Le phénomène décrit à la figure 15 se superpose à la création de paires électron-trou par ionisation thermique entre atomes de silicium.

Comme pour le semi-conducteur de type N, le nombre de porteurs créés par ionisation thermique est beaucoup plus faible que celui résultant de la présence des impuretés et ceci à cause de la concentration en atomes accepteurs (1 atome accepteur pour 10^5 à 10^8 atomes silicium).

Du point de vue des charges électriques, on peut donner, pour le semi-conducteur de type P, la représentation de la figure 16.

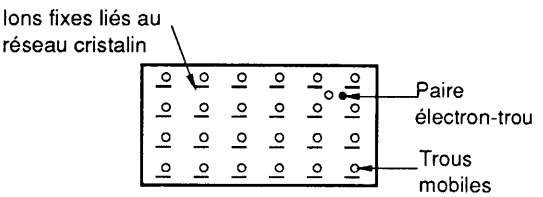


Fig. 16.

Si on considère les porteurs mobiles :

- les trous mobiles apparaissent en grand nombre et sont appelés *porteurs majoritaires*,
- les électrons libres peu nombreux sont appelés *porteurs minoritaires*.

La quasi totalité des atomes accepteurs étant ionisée, la concentration p en trous est très voisine de la concentration N_A en atomes de bore ($p \approx N_A$).

Par suite de la relation :

$$p \,.\, n = p_i \,.\, n_i = A_0 \,.\, T^3 \, e^{-\frac{W_i}{KT}},$$

la concentration en électrons libres est beaucoup plus faible pour le semi-conducteur de type P que pour le semi-conducteur intrinsèque.

6. CONDUCTION DES SEMI-CONDUCTEURS

6.1. MOBILITÉ DES PORTEURS DE CHARGE

Considérons un semi-conducteur isolé. Les porteurs de charge mobiles s'y déplacent en tous sens et comme aucune direction n'est privilégiée, on n'observe aucune circulation de charges à l'échelle macroscopique.

Appliquons au semi-conducteur une différence de potentiel V (*fig.* 17). Par suite de la relation champ-potentiel, il apparaît, dans le semi-conducteur, un champ électrique $\vec{E}$, qui favorise le déplacement des trous dans le sens du champ $\vec{E}$, et le déplacement des électrons mobiles dans le sens opposé.

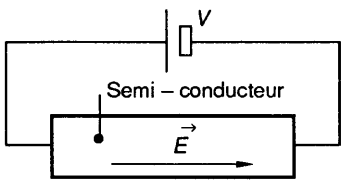


Fig. 17.

A l'échelle macroscopique les trous prennent une vitesse d'ensemble $\vec{v}_P = \mu_P \vec{E}$, et les électrons mobiles une vitesse $\vec{v}_n = \mu_n \vec{E}$, μ_P est la mobilité des trous, μ_n est la mobilité des électrons.

Pour le silicium, les expressions des mobilités sont les suivantes.

$$\mu_P = 0{,}45 \,.\, 10^{-1} \left(\frac{300}{T}\right)^{2,3} \text{m}^2 \,.\, \text{V}^{-1} \,.\, \text{s}^{-1},$$

$$\mu_n = 1{,}45 \,.\, 10^{-1} \left(\frac{300}{T}\right)^{2,6} \text{m}^2 \,.\, \text{V}^{-1} \,.\, \text{s}^{-1},$$

T étant la température absolue.

REMARQUES

- *Les mobilités diminuent lorsque la température augmente : l'agitation thermique accroît le nombre de « chocs » qui s'opposent au déplacement.*
- *A température ordinaire* (T = 300 °K), *la mobilité des trous est plus faible que celle des électrons libres. Cela se conçoit dans la mesure où μ_n provient du déplacement direct des électrons alors que μ_p résulte des actions successives : ionisation thermique, déplacement des électrons, recombinaison.*

6.2. CONDUCTIVITÉ DES SEMI-CONDUCTEURS

Considérons une surface S d'équipotentielle à l'intérieur du semi-conducteur (*fig.* 18).

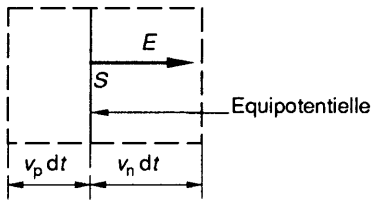


Fig. 18.

Soit n la concentration (nombre par unité de volume) en électrons libres de charge $-e$, et soit p la concentration en trous de charge $+e$.

Le vecteur vitesse des porteurs de charge étant colinéaire au vecteur champ électrique $\vec{E}$, les porteurs traversent perpendiculairement la surface équipotentielle S.

Les porteurs traversant la surface S, pendant le temps dt, sont contenus dans le volume :

- $Sv_n\,dt$ pour les électrons libres, conduisant au passage de la charge $-nSv_n e\,dt$,
- $Sv_p\,dt$ pour les trous, conduisant au passage de la charge $pSv_p e\,dt$.

Tout se passe donc comme si la charge

$$dq = e(nv_n + pv_p)S\,dt = e(n\mu_n + p\mu_p)ES\,dt,$$

traversait, pendant le temps dt, la surface S dans le sens du champ $\vec{E}$, ce qui correspond à un courant

$$I = \frac{dq}{dt} = e(n\mu_n + p\mu_p)ES.$$

Si on considère deux équipotentielles infiniment proches correspondant aux potentiels V et $V - dV$ (*fig.* 19), la relation champ potentiel

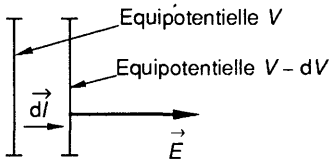


Fig. 19.

$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$ conduit ici à $dV = E\,dl$ car le vecteur champ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles, soit :

$$E = \frac{dV}{dl} = \frac{I}{eS(n\mu_n + p\mu_p)}$$

ou $$dV = \frac{1}{e(n\mu_n + p\mu_p)} \frac{dl}{S} I.$$

$\frac{1}{e(n\mu_n + p\mu_p)} \frac{dl}{S}$ est donc la résistance de la portion de semi-conducteur de longueur dl comprise entre deux équipotentielles de surface S.

La conductivité du semi-conducteur s'écrit donc

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p).$$

6.3. CONSÉQUENCES

a - Nous avons vu que pour un semi-conducteur contenant des impuretés, la concentration en porteurs mobiles est infiniment supérieure à celle du semi-conducteur intrinsèque (n ou $p \gg n_i$ ou p_i).

La conductivité du semi-conducteur de type N ou de type P est donc beaucoup plus forte que celle du semi-conducteur intrinsèque. On dit qu'il est *dopé*.

b - Étudions l'influence de la température sur la conductivité σ du silicium.

- Pour un *semi-conducteur intrinsèque :*

$$\sigma = e(n_i\mu_n + p_i\mu_p) = e\,AT^{3/2}$$
$$e^{-\frac{W_i}{2KT}} \times 10^{-1}\left[0{,}45\left(\frac{300}{T}\right)^{2{,}3} + 1{,}45\left(\frac{300}{T}\right)^{2{,}6}\right]$$

de la forme :

$$\sigma = BT^{3/2}\, e^{-\frac{0{,}65 \cdot 10^4}{T}} \left[0{,}45\left(\frac{300}{T}\right)^{2{,}3} + 1{,}45\left(\frac{300}{T}\right)^{2{,}6}\right].$$

A la température ordinaire, l'exponentielle l'emporte sur les autres fonctions de la température et la *conductivité augmente rapidement avec la température.*

- Pour un *semi-conducteur dopé* par exemple de type N :
  - la concentration en électrons libres est voisine de la concentration N_D en atomes donneurs,
  - la concentration en trous est négligeable par rapport à N_D,
  - la conductivité s'établit donc sensiblement à :

$$\sigma = eN_D\mu_n = eN_D \times 1{,}45 \cdot 10^{-1}\left(\frac{300}{T}\right)^{2{,}6}.$$

La conductivité diminue lorsque la température augmente.

7. EFFET HALL

Considérons un barreau parallélipipédique de semi-conducteur de type P, parcouru par un courant I et soumettons-le à un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire à une de ses faces (*fig.* 20).

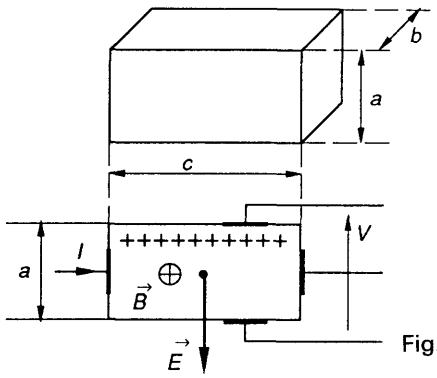


Fig. 20.

Les porteurs, ici les trous se déplaçant à la vitesse v_p, sont soumis à la force de Laplace :
- orientée de bas en haut,
- d'intensité ev_pB.

Les trous sont donc déviés vers le haut et on assiste à une accumulation de charges positives sur la face supérieure du barreau. Cette accumulation ne peut se perpétuer indéfiniment, car elle est à l'origine d'un champ électrique $\vec{E}$ (*fig.* 20) qui soumet les trous à une force orientée de haut en bas, d'intensité eE.

Un état d'équilibre s'établit alors, pour lequel la force de Laplace est compensée par la force électrostatique ce qui donne :

$$eE = ev_pB \quad \text{soit :} \quad E = Bv_p.$$

D'après les résultats du paragraphe précédent, le courant I s'écrit :

$$I = epv_p S = epv_p ab = epab\frac{E}{B}.$$

Par suite de la relation champ-potentiel, il apparaît entre les faces supérieure et inférieure du barreau une différence de potentiel $V = aE$, soit :

$$V = \frac{1}{epb} BI$$

de la forme :

$$V = \boldsymbol{KBI}.$$

On obtient ainsi une différence de potentiel proportionnelle au produit de deux grandeurs électriques : le champ magnétique B et le courant I.

Les sondes à effet Hall peuvent donc être utilisées dans toutes les mesures qui nécessitent le produit de deux grandeurs électriques (valeurs efficaces, puissances,...).

8. DIFFUSION

Considérons un semi-conducteur de type N et supposons que, par un procédé quelconque, on accroisse la concentration en trous dans une région du semi-conducteur (*fig.* 21).

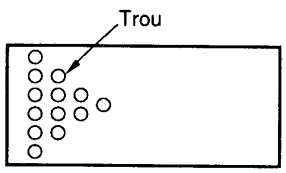


Fig. 21.

Ces trous se déplacent en tous sens mais vont statistiquement se répartir de telle sorte que la concentration en trous soit la même en tout point du semi-conducteur, à la manière des molécules d'un gaz qui, injectées dans un récipient, occupent de façon uniforme le volume qui leur est offert.

Considérons donc une surface dS, à l'intérieur du semi-conducteur, telle que la concentration en trous ne soit pas la même sur chacune de ses faces (*fig.* 22).

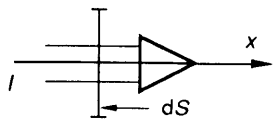


Fig. 22.

Afin d'équilibrer la répartition des charges, cette surface va se voir traversée par un courant I dont l'expression est :

$$I = -eD_p \frac{dp}{dx} dS, \qquad \text{où}$$

e est la charge de l'électron,

D_p est une constante appelée constante de diffusion,

$\frac{dp}{dx}$ est la variation de concentration suivant un axe perpendiculaire à la surface dS; nous l'appellerons *gradient de concentration.*

Remarquons que si la partie gauche contient plus de trous que la partie droite $\frac{dp}{dx}$ est négatif et I est positif, ce qui est naturel.

Nous retiendrons que le courant de diffusion à travers une surface à l'intérieur du semi-conducteur est proportionnel au gradient de concentration des porteurs (voir : base du transistor).

9. JONCTION *P-N*

On obtient une jonction P-N par la mise en contact d'un semi-conducteur de type P et d'un semi-conducteur de type N, ce qui conduit au schéma de la figure 23.

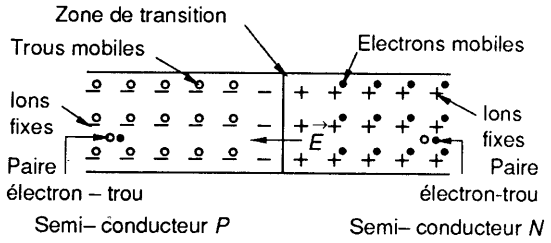


Fig. 23.

Dans la zone de contact, les électrons mobiles du semi-conducteur de type N vont combler les absences d'électron (trous) du semi-conducteur de type P laissant sur place des ions fixes liés au réseau cristallin.

Ces ions fixes constituent deux couches de charges (positives du côté N, négatives du côté P) qui sont à l'origine d'un champ électrique $\vec{E}$ dans la zone de transition. Ce champ tend à maintenir les porteurs majoritaires dans leurs régions respectives (électrons du côté N, trous du côté P) et s'oppose ainsi à la cause qui lui donne naissance, ce qui conduit à un état d'équilibre.

Par suite de la relation champ-potentiel, il apparaît entre les semi-conducteurs de type N et de type P, une différence de potentiel V_0, appelée *barrière de potentiel* (*fig.* 24).

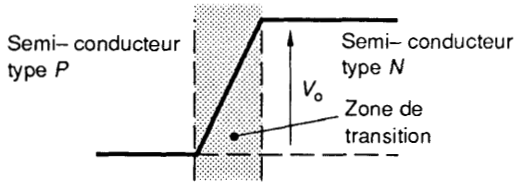


Fig. 24.

9.1. MOUVEMENT DES PORTEURS À TRAVERS LA JONCTION

Si la barrière de potentiel maintient les porteurs majoritaires dans leurs zones respectives, elle n'interdit pas le passage des porteurs minoritaires provenant des paires électron-trou (*fig.* 23). Ce mouvement de porteurs minoritaires conduit à un courant très faible, appelé *courant de saturation* I_S. Ce courant ne dépend que du nombre de porteurs minoritaires se trouvant au voisinage de la jonction et est donc *indépendant de la hauteur* V_0 *de la barrière de potentiel.*

Or, en l'absence d'éléments actifs, la jonction P-N ne peut être parcourue par aucun courant. Il doit donc exister un autre mouvement de charges qui s'oppose au courant de saturation. Il s'agit des porteurs majoritaires qui possèdent l'énergie $W_0 = eV_0$ nécessaire pour franchir la barrière de potentiel. La figure 25 décrit le mouvement des charges à travers la jonction P-N.

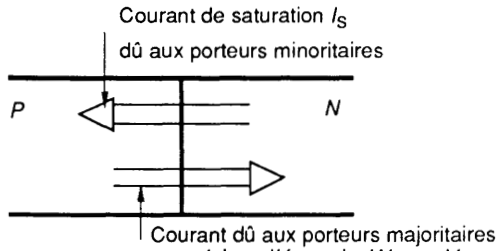


Fig. 25.

Soit N_0 le nombre total de porteurs majoritaires. D'après la loi statistique de Maxwell, le nombre de porteurs majoritaires possédant l'énergie $W_0 = eV_0$ s'écrit :

$$n = N_0 \, e^{-\frac{W_0}{KT}} = N_0 \, e^{-\frac{eV_0}{KT}},$$

où K est la constante de Boltzman :

$$K = 1{,}38 \, . \, 10^{-23} \text{ J/°},$$

T est la température kelvin.

Le courant dû aux porteurs majoritaires est donc de la forme :

$$I_0 \, e^{-\frac{eV_0}{KT}},$$

où I_0 est le courant qui traverserait la jonction s'il n'y avait pas de barrière de potentiel, c'est-à-dire si la diffusion s'effectuait librement.

Ce courant étant égal au courant de saturation I_S, il vient :

$$I_S = I_0 \, e^{-\frac{eV_0}{KT}}.$$

9.2. EXPRESSION DE LA BARRIÈRE DE POTENTIEL V_0

Soient :

N_D, la concentration en atomes donneurs du semi-conducteur N,

N_A, la concentration en atomes accepteurs du semi-conducteur P,

P_N, la concentration en trous dans le semi-conducteur N,

P_P, la concentration en trous dans le semi-conducteur P.

On a $P_N = \dfrac{n_i^2}{N_D}$, $P_P = N_A$, et, d'après la loi de Maxwell, $P_N = P_P \, e^{-\frac{eV_0}{KT}}$, soit :

$$V_0 = \frac{KT}{e} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2}.$$

***Ordre de grandeur à température ordinaire* (T = 300 K)**

Supposons que la concentration en atomes donneurs et en atomes accepteurs soit de une impureté pour 10^7 atomes de silicium. Sachant qu'à la température T = 300 K, le nombre d'atomes de silicium ionisés est de 3 sur 10^{13}, il vient :

$$\frac{N_A N_D}{n_i^2} = \frac{10^{-7} \, . \, 10^{-7}}{(3 \, . \, 10^{-13})^2} = \frac{10^{12}}{9}.$$

Soit :

$$V_0 = \frac{KT}{e} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} = \frac{1{,}38 \, . \, 10^{-23} \, . \, 300}{1{,}6 \, . \, 10^{-19}} \ln \frac{10^{12}}{9}$$

$$V_0 \approx 0{,}65 \text{ volts}.$$

9.3. JONCTION *P-N* POLARISÉE EN DIRECT

Supposons que, le potentiel du semi-conducteur de type N restant constant, on relève, à l'aide d'éléments actifs extérieurs, le potentiel du semi-conducteur de type P, la barrière de potentiel passant ainsi de V_0 à $V_0 - V$.

Le courant dû aux porteurs minoritaires, indépendant de la hauteur de la barrière de potentiel, reste égal à I_S.

Le courant dû aux porteurs majoritaires devient :

$$I_0 \, e^{-\frac{e(V_0 - V)}{KT}} = I_0 \, e^{-\frac{eV_0}{KT}} \, e^{+\frac{eV}{KT}} = I_S \, e^{\frac{eV}{KT}}.$$

Au total il circule donc du semi-conducteur P vers le semi-conducteur N un courant appelé courant direct :

$$I_D = I_S [e^{\frac{eV}{KT}} - 1].$$

Ordre de grandeur

Dès que la tension V appliquée par les éléments actifs extérieurs devient supérieure à 0,1 volt, ($e^{\frac{eV}{KT}} = e^{39V} > e^{3,9} \approx 50 \gg 1$), le terme $e^{\frac{eV}{KT}}$ devient très grand par rapport à 1 et nous pouvons écrire avec une bonne approximation :

$$I_D = I_S \, e^{\frac{eV}{KT}} \approx I_S \, e^{40V}.$$

Ce courant augmente très rapidement avec la tension V : on dit que la jonction est passante ou bien qu'elle est polarisée en direct.

9.4. JONCTION *P-N* POLARISÉE EN INVERSE

Supposons que, de la même manière que dans le paragraphe précédent, on établisse la barrière de potentiel à $V_0 + V$.

Nous pouvons conclure qu'il circule du semi-conducteur N vers le semi-conducteur P un courant I_i appelé courant inverse :

$$I_i = I_S [1 - e^{-\frac{eV}{KT}}].$$

Ordre de grandeur

Dès que la tension V devient supérieure à 0,1 volt

$$\left(e^{-\frac{eV}{KT}} = e^{-39V} < e^{-3,9} = \frac{1}{50} \ll 1 \right)$$

le terme $e^{-\frac{eV}{KT}}$ devient négligeable par rapport à 1 et nous pouvons écrire avec une bonne approximation :

$$I_i = I_S.$$

Ce courant, dû exclusivement aux porteurs minoritaires, est très faible et on peut admettre que le courant à travers la jonction est nul; on dit que la jonction est bloquée ou bien qu'elle est polarisée en inverse.

9.5. RÉSISTANCE DYNAMIQUE D'UNE JONCTION POLARISÉE EN DIRECT

Considérons une jonction polarisée en direct, sur laquelle le potentiel V appliqué par les éléments actifs extérieurs varie autour d'une valeur moyenne V_m, soit

$$V = V_m + dV.$$

Aux petites variations dV de V correspondent des petites variations dI_D du courant direct I_D.

On appelle résistance dynamique r, la résistance que présente la jonction vis-à-vis des petites variations soit : $r = \frac{dV}{dI_D}$.

Par différentiation de l'expression

$$I_D = I_S \, e^{\frac{eV}{KT}},$$

il vient

$$\frac{dI_D}{dV} = I_S \frac{e}{KT} e^{\frac{eV}{KT}} = \frac{e}{KT} I_D,$$

soit

$$r = \frac{KT}{e} \frac{1}{I_D}.$$

A température ordinaire (T = 300 K), il vient :

$$r = \frac{25 \, mV}{I_D}.$$

9.6. INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE

9.6.1. Courant de saturation I_S

Ce courant, dû aux porteurs minoritaires, varie donc comme les concentrations $\frac{n_i^2}{N_A}$ en électrons

mobiles du côté P, et $\frac{n_i^2}{N_D}$ en trous du côté N.

Nous pouvons en conclure que I_S varie comme

$$n_i^2 = A_0 T^3 \, e^{-\frac{W_i}{KT}}.$$

Ce courant augmente rapidement avec la température. Il double tous les 10 °C pour le germanium, tous les 7 °C pour le silicium, ce qui limite l'utilisation des dispositifs à semi-conducteurs à 175 °C pour le silicium et à 75 °C pour le germanium.

9.6.2. Barrière de potentiel V_0

Nous avons établi, au paragraphe 9.3 l'expression :

$$V_0 = \frac{KT}{e} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2},$$

dans laquelle les facteurs T et n_i dépendent de la température.

Déterminons, par une différentielle totale, la variation dV_0 de V_0 résultant d'une variation dT de la température T.

$$dV_0 = \frac{K}{e} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} dT - \frac{KT}{e} \frac{n_i^2}{N_A N_D} \frac{2 n_i N_A N_D}{n_i^4} dn_i,$$

$$dV_0 = V_0 \frac{dT}{T} - \frac{2KT}{e} \frac{dn_i}{n_i}.$$

Or n_i dépend de la température suivant la loi :

$$n_i = A T^{3/2} \, e^{-\frac{W_i}{2KT}},$$

soit

$$\ln n_i = \ln A + \frac{3}{2} \ln T - \frac{W_i}{2KT}.$$

Par différentiation, il vient :

$$\frac{dn_i}{n_i} = \frac{3}{2} \frac{dT}{T} + \frac{W_i}{2KT^2} dT.$$

$$\frac{dV_0}{dT} = \frac{V_0}{T} - \frac{2KT}{e} \left[\frac{3}{2T} + \frac{W_i}{2KT^2} \right] = \frac{V_0}{T} - \frac{3K}{e} - \frac{W_i}{eT}.$$

Ordre de grandeur

Pour le silicium, à 300 K, nous avons établi : $V_0 \approx 0{,}65$ volt, $K = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$, $W_i = 1{,}12$ électron-volt; le calcul numérique conduit à $\frac{dV_0}{dT} = -2 \cdot 10^{-3}$ volts par degré.

En pratique, on admet que la *tension aux bornes d'une jonction diminue de 2,2 mV par degré*, ce qui est conforme au résultat précédent. Cette variation nuisible dans la plupart des cas est cependant utilisée dans certains capteurs de température.

9.7. CAPACITÉS D'UNE JONCTION

9.7.1. Jonction polarisée en inverse

Revenons à la description de la jonction donnée à la figure 23. On y distingue, dans la zone de transition, une charge d'espace analogue à celle qui apparaît sur les armatures d'un condensateur.

Supposons que la jonction soit polarisée en inverse et augmentons la tension inverse V appliquée par les éléments actifs extérieurs. La barrière de potentiel augmente, ainsi donc que le vecteur champ électrique $\vec{E}$. Cette augmentation de $\vec{E}$ ne peut provenir que d'un accroissement de la charge d'espace Q.

Ainsi donc une modulation dV de la tension inverse V provoque une modulation dQ de la charge d'espace Q et ce par une circulation de charges (électrons majoritaires du côté N allant combler les absences d'électrons du côté P) conduisant à un courant dI.

De ce point de vue le comportement de la jonction polarisée en inverse est analogue à celui d'un condensateur qui bloque le courant continu, mais qui est perméable aux petites variations dI de courant résultant de petites variations dV de la tension aux bornes.

Établissons, dès lors, la relation qui lie la charge d'espace Q à la barrière de potentiel $V_0 + V$, et pour cela représentons la zone de transition (*fig.* 26).

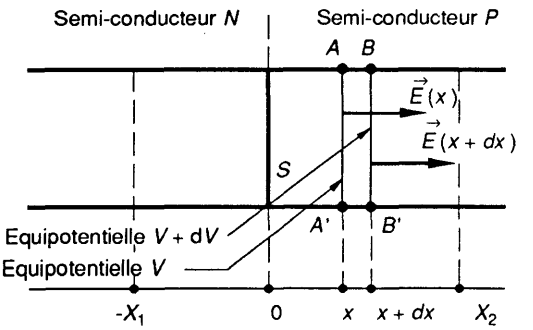


Fig. 26.

Si on prend pour origine ($x = 0$) la surface de contact des deux semi-conducteurs, la zone de transition s'étend de 0 à X_2 du côté P et de 0 à $-X_1$ du côté N.

La concentration en ions positifs fixes, de charge $+e$, sur le semi-conducteur de type N, est égale à N_D. De même la concentration en ions négatifs fixes, de charge $-e$, sur le semi-conducteur de type P, est égale à N_A. Ces deux charges provenant de l'annulation, en quantités égales, des porteurs mobiles, sont égales et opposées ce qui conduit à

$$N_A X_2 = N_D X_1.$$

Ceci nous permet de remarquer, au passage, que la zone de transition s'étend d'autant plus profondément dans l'un des semi-conducteurs, qu'il est moins dopé par rapport à l'autre.

Les impuretés étant régulièrement réparties dans le cristal, les surfaces équipotentielles sont, par symétrie, des plans perpendiculaires à Ox. Considérons deux de ces équipotentielles, correspondant aux potentiels V et $V + \mathrm{d}V$, placées respectivement aux abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Les vecteurs champ électrique, perpendiculaires aux surfaces équipotentielles, ont pour expression $E(x)$ sur l'équipotentielle V et $E(x + \mathrm{d}x)$ sur l'équipotentielle $V + \mathrm{d}V$.

Soit S la section du barreau semi-conducteur et ε sa permittivité. Appliquons le théorème de Gauss au parallélépipède $ABA'B'$ (voir paragraphe 1.7). Il vient :

$$S[E(x + \mathrm{d}x) - E(x)] = S\,\mathrm{d}E(x) = \frac{1}{\varepsilon}(-N_A e S\,\mathrm{d}x),$$

soit
$$\mathrm{d}E(x) = -\frac{N_A e}{\varepsilon}\,\mathrm{d}x.$$

Rappelons que l'évolution du potentiel dans le semi-conducteur à l'allure décrite à la figure 27.

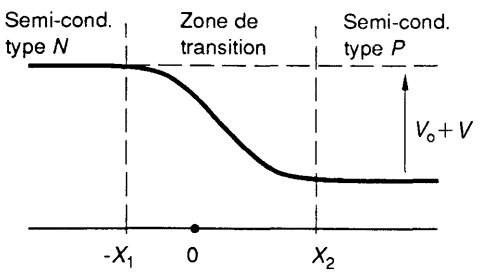


Fig. 27.

Nous pouvons en conclure, d'après $\mathrm{d}V = -\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l}$, que, le potentiel étant constant en dehors de la zone de transition, le vecteur champ électrique y est nul, soit :

$$E(-X_1) = E(X_2) = 0.$$

Compte tenu de cette condition, l'intégration de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}E(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{N_A e}{\varepsilon}$$

conduit à l'expression du champ électrique :

$$E(x) = -\frac{N_A e}{\varepsilon}(x - X_2),$$

valable pour $0 \leqslant x \leqslant X_2$.

On établirait, de la même manière, l'expression :

$$E(x) = \frac{N_D e}{\varepsilon}(x + X_1)$$

pour
$$-X_1 \leqslant x \leqslant 0.$$

Remarquons que pour $x = 0$ les deux expressions conduisent à la même valeur du champ

$$E(0) = \frac{N_D X_1 e}{\varepsilon} = \frac{N_A X_2 e}{\varepsilon},$$

car
$$N_D X_1 = N_A X_2.$$

Par intégration de l'équation

$$\mathrm{d}V = -\vec{E}\,\vec{\mathrm{d}l} = -E\,\mathrm{d}x$$

entre
$$-X_1 \quad \text{et} \quad X_2,$$

il vient :

$$\int_{-X_1}^{X_2} \mathrm{d}V = V(X_2) - V(-X_1) = -(V_0 + V)$$

$$= \int_{-X_1}^{0} -\frac{N_D e}{\varepsilon}(x + X_1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{X_2} \frac{N_A e}{\varepsilon}(x - X_2)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{N_D e}{\varepsilon}\left[\frac{x^2}{2} + X_1 x\right]_{-X_1}^{0} + \frac{N_A e}{\varepsilon}\left[\frac{x^2}{2} - X_2 x\right]_{0}^{X_2}$$

$$= -\frac{N_D e}{\varepsilon}\frac{X_1^2}{2} - \frac{N_A e}{\varepsilon}\frac{X_2^2}{2} = -\frac{N_D e}{2\varepsilon} X_1^2\left[1 + \frac{N_D}{N_A}\right],$$

soit
$$V_0 + V = \frac{N_D e}{2\varepsilon} X_1^2\left[1 + \frac{N_D}{N_A}\right].$$

La charge Q de la zone de transition, pour le semi-conducteur de type N s'écrit :

$$Q = N_D e X_1 S.$$

Par élimination de X_1, il vient :

$$V_0 + V = \frac{N_D e}{2\mathcal{E}} \left[1 + \frac{N_D}{N_A} \right] \frac{Q^2}{N_D^2 e^2 S^2},$$

soit : $$Q = \sqrt{\frac{2\mathcal{E} e S^2}{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D}}} \sqrt{V_0 + V}.$$

Une variation dV de V conduit à une variation dQ de Q telle que :

$$dQ = \sqrt{\frac{2\mathcal{E} e S^2}{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{V_0 + V}} dV,$$

identique à celle qui interviendrait sur le condensateur de capacité :

$$C = S \sqrt{\frac{\frac{\mathcal{E} e}{2}}{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{V_0 + V}}.$$

Cette capacité qui limite l'utilisation de la jonction avec la fréquence, peut être utilisée pour réaliser une capacité variable (varicap). C'est une capacité dynamique qui dépend de la tension inverse de polarisation V autour de laquelle, on provoque des petites variations de tension dV.

9.7.2. Jonction polarisée en direct : charge stockée

Considérons une jonction P-N polarisée en direct et raisonnons sur le semi-conducteur de type P. La faible valeur de la barrière de potentiel autorise le passage des porteurs majoritaires et provoque la circulation d'un courant direct I du semi-conducteur P vers le semi-conducteur N. Il apparaît dans le semi-conducteur P un grand nombre d'électrons en transit. Les atomes trivalents voient dans cet excès d'électrons une excellente occasion de compléter leurs liaisons covalentes et on conçoit qu'ils auront du mal lorsqu'on voudra bloquer la jonction à se séparer de cet électron qu'ils ont capté.

On peut se représenter le phénomène (*fig.* 28) en imaginant une table, incrustée de demi-sphères en creux (simulant les trous) sur laquelle roulent des billes (simulant les électrons en transit). On conçoit que le flux de billes (simulant le courant I) accroît le nombre de captures par les trous (recombinaisons).

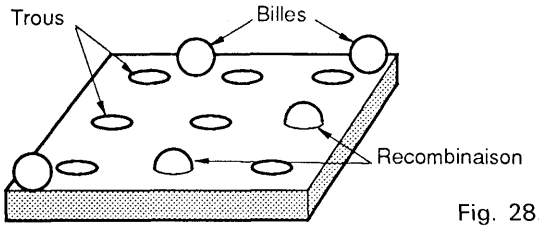


Fig. 28.

Cet excès de recombinaisons, par rapport à l'état d'équilibre du semi-conducteur, constitue une charge stockée Q_S.

Si, dès lors on accroit la barrière de potentiel pour bloquer la jonction, le semi-conducteur P libère ces électrons en excès. Ces derniers, étant des porteurs minoritaires peuvent aisément franchir la jonction. Ils sont à l'origine d'un courant inverse qui perdure tant que le semi-conducteur n'a pas retrouvé son état d'équilibre. L'évolution de la charge stockée Q_S obéit à une loi de la forme

$$\frac{dQ_S}{dt} + \frac{Q_S}{\tau} = I$$

où τ est la durée de vie des porteurs.

I est le courant circulant du semi-conducteur P vers le semi-conducteur N.

Remarquons que, pour un courant I constant, on atteint un état d'équilibre donné par la solution particulière de l'équation différentielle, soit $Q_S = \tau I$: la charge stockée est directement proportionnelle au courant I, c'est-à-dire au flux d'électrons en transit.

EXERCICES

1.

On rappelle la relation entre la barrière de potentiel V_0 et le courant de saturation I_S d'une jonction *P-N* : $I_S = I_0\, e^{-\frac{eV_0}{KT}}$ dans laquelle

$$K = 1{,}38 \,.\, 10^{-23} \text{ J/K}, \quad e = 1{,}6 \,.\, 10^{-19} \text{ C}.$$

Pour le silicium : V_0 dépend de la température sous la forme $\frac{dV_0}{dT} = -2{,}2 \times 10^{-3}$ V.

$$V_0 = 0{,}6 \text{ Volts à } 300 \text{ K}.$$

1° En négligeant les variations de I_0 avec la température, établir la relation :

$$\frac{dI_S}{I_S} = \frac{e}{KT}\left[-dV_0 + V_0 \frac{dT}{T}\right]$$

2° A partir des valeurs numériques, vérifier que pour le silicium, à la température de 300 K, le courant de saturation I_S double tous les 7°.

3° Retrouver ce résultat à partir de l'égalité $I_S = BT^3\, e^{-\frac{W_i}{KT}}$, avec

$$W_i = 1{,}12 \text{ e} \,.\, \text{V}$$

2.

On donne, pour le germanium, les propriétés suivantes :

- Énergie d'ionisation d'un atome de germanium :

$$W_i = 0{,}78 \text{ eV} = 0{,}78 \times 1{,}6 \times 10^{-19}.$$

- A la température de 300 K, 5 atomes de germanium sur 10^{10} sont ionisés.

1° Considérant une jonction *P-N* au germanium pour laquelle la concentration en impuretés du côté *N* et du côté *P* est d'une impureté pour 10^7 atomes de germanium, montrer que la barrière de potentiel s'établit à $V_0 = 0{,}27$ volts.

2° Par une méthode analogue à celle du cours, vérifier les affirmations suivantes à la température ordinaire de 300 K :

a) la barrière de potentiel V_0 décroît de 2 mV par degré $\left(\frac{dV_0}{dT} = -2 * 10^{-3}\right)$,

b) le courant de saturation I_S double tous les 10 K.

2 diode à jonction P-N

1. DESCRIPTION ET SYMBOLE

La diode à jonction P-N est un composant formé par la succession suivante de matériaux : métal, semi-conducteur de type P, semi-conducteur de type N, métal (*fig.* 1).

Le métal en contact avec le semi-conducteur de type P est appelé *l'anode*, celui au contact du semi-conducteur de type N, la *cathode*.

On représente le composant par le symbole donné à la figure 1.

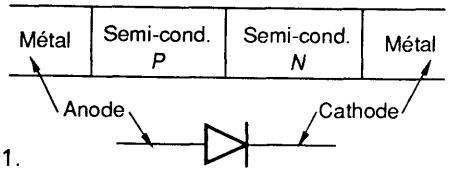


Fig. 1.

2. DIODE EN COURT-CIRCUIT

Relions par un conducteur les deux extrémités métalliques de la diode. Le potentiel de l'anode est ainsi égal au potentiel de la cathode alors qu'il existe entre les semi-conducteurs de type P et de type N une différence de potentiel V_0. L'évolution du potentiel le long de la diode a donc l'allure donnée à la figure 2.

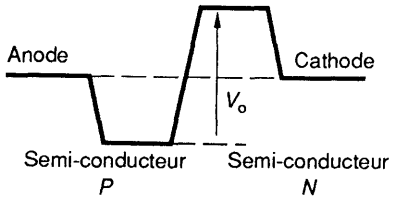


Fig. 2.

Il apparaît ainsi entre les portions métalliques et les semi-conducteurs, deux autres barrières de potentiel.

Pour expliquer la présence de ces barrières, considérons la description de la figure 3.

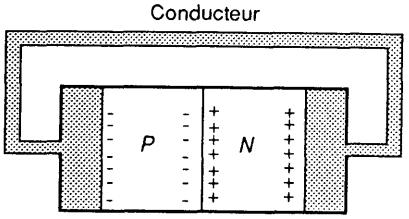


Fig. 3.

Une partie des électrons mobiles de la région *N* s'écoule le long du conducteur pour annuler les trous de la région *P*, laissant sur place des ions fixes, liés au réseau cristallin. Ces ions sont à l'origine des deux barrières de potentiel métal-semi-conducteur qui apparaissent sur la figure 2.

La diode apparaît donc constituée par deux jonctions :

- une jonction « interne » au contact des deux semi-conducteurs,
- une jonction « externe » faisant intervenir le conducteur extérieur.

3. DIODE POLARISÉE EN DIRECT

Afin d'abaisser les barrières de potentiel, imaginons le dispositif de la figure 4.

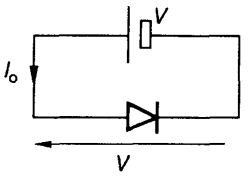


Fig. 4.

Le potentiel de l'anode étant, de *V*, supérieur au potentiel de la cathode, l'évolution du potentiel le long de la diode a l'allure donnée à la figure 5.

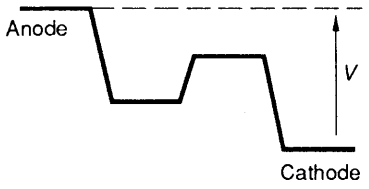


Fig. 5.

Comment la tension V se répartit-elle sur les barrières de potentiel?

La détermination exacte de cette répartition semble relativement complexe. Remarquons cependant qu'il suffit, aux porteurs majoritaires, de franchir la jonction interne pour traverser la diode. On peut, dès lors distinguer deux cas extrêmes.

Cas le plus «favorable»

Les barrières de potentiel métal semi-conducteur restent constantes. Toute la tension V est utilisée pour écrouler la barrière de potentiel de la jonction interne qui s'établit ainsi à $V_0 - V$. Nous avons montré au paragraphe 8.3 du chapitre précédent que la jonction, donc ici la diode, est parcourue par un courant direct :

$$I_D = I_S\, e^{\frac{eV}{kT}} = I_S\, e^{40V} \qquad \text{à } T = 300 \text{ K}.$$

Cas le plus «défavorable»

La tension V se répartit également entre les jonctions «interne» et «externe», la barrière de potentiel s'établit alors à $V_0 - \frac{V}{2}$ et la diode est parcourue par un courant direct :

$$I_D = I_S\, e^{\frac{eV}{2KT}} = I_S\, e^{20V}, \qquad \text{où } T = 300\,\text{K}.$$

En pratique

Nous écrirons la relation entre V et I_D sous la forme :

$$I_D = I_S\, e^{\frac{eV}{\eta KT}},$$

où η est un nombre, compris entre 1 et 2, qui dépend du semi-conducteur et des conditions de fonctionnement.

- Pour le germanium, $\eta = 1$
- Pour le silicium,
  $\eta = 2$ pour les «faibles courants»
  $\eta = 1$ pour les «forts courants»

4. DIODE POLARISÉE EN INVERSE

Afin d'élever les barrières de potentiel, imaginons le dispositif de la figure 6.

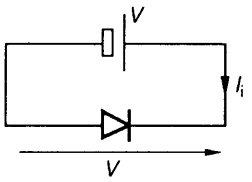


Fig. 6.

Le potentiel de la cathode étant de V, supérieur au potentiel de l'anode, l'évolution du potentiel le long de la diode a l'allure décrite à la figure 7.

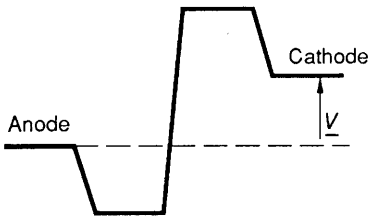


Fig. 7.

La barrière de potentiel est accrue et nous avons montré dans le chapitre précédent (paragraphe 8.4) que la diode est alors parcourue par un courant inverse $I_i = I_S$.

En pratique, ce courant I_S, très faible (10^{-12} A), est masqué par un courant de fuite dû aux impuretés à la surface des jonctions. Le courant inverse I_i traversant la diode devenant ainsi de l'ordre de 10^{-9} A.

5. CARACTÉRISTIQUE D'UNE DIODE À JONCTION

Proposons-nous de déterminer la courbe $v = f(i)$ sur la figure 8.

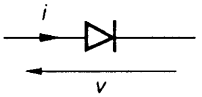


Fig. 8.

Les résultats des paragraphes 3 et 4 nous permettent de conclure :

- Pour $v > 0$ $i = I_D = I_S\, e^{\frac{ev}{\eta KT}}$,
- Pour $v < 0$ $i = -I_i \approx -10^{-9}$ A.

La caractéristique de la diode a donc l'allure décrite à la figure 9.

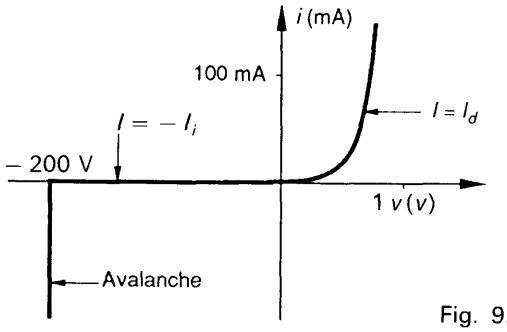


Fig. 9.

De plus, si la tension v devient très négative ($-$ 200 volts) la barrière de potentiel augmente (*fig.* 9). Les porteurs minoritaires, franchissant cette jonction acquièrent une énergie suffisante pour provoquer l'ionisation d'atomes de silicium au voisinage de la jonction, créant ainsi de nombreux porteurs minoritaires qui franchissent à leur tour la jonction, etc.

C'est le phénomène d'*avalanche* qui se traduit, sur la figure 9, par un accroissement très rapide du courant inverse.

6. SCHÉMA ÉQUIVALENT D'UNE DIODE À JONCTION

Idéalisons la caractéristique de la figure 9 en l'assimilant à deux droites conformément au schéma de la figure 10.

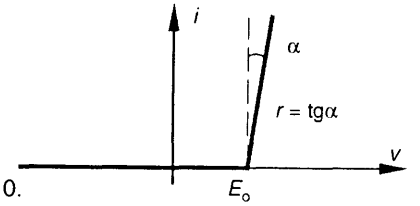


Fig. 10.

• Pour $v < E_0$ la relation entre v et i est décrite par l'équation $i = 0$, qui conduit au schéma équivalent de la figure 11.

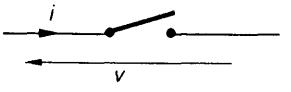


Fig. 11.

• Pour $v > E_0$ la relation entre v et i est décrite par l'équation $v = E_0 + ri$ avec $r = \text{tg}\ \alpha$, qui conduit au schéma équivalent de la figure 12.

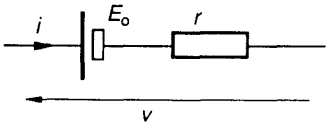


Fig. 12.

La résistance r est de l'ordre de grandeur de quelques dixièmes d'ohm à quelques ohms (elle dépend de la zone moyenne d'utilisation de la caractéristique).

E_0, appelée *tension de seuil* est de l'ordre de 0,6 volt pour une diode au silicium et de 0,2 volt pour une diode au germanium.

7. DIODE IDÉALE ET DEGRÉ D'APPROXIMATION

Dans le cas où les composants montés en série avec la diode, font apparaître, lorsque la diode conduit, des chutes de tension très supérieures à E_0, il est possible de pousser plus loin l'approximation en idéalisant la caractéristique de la diode par la courbe de la figure 13.

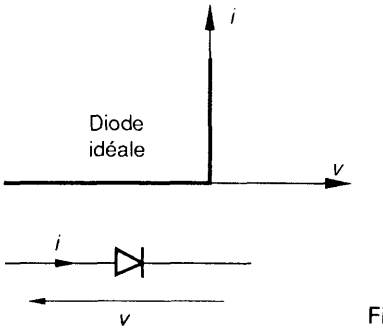


Fig. 13.

La diode idéale apparaît ainsi comme un composant qui s'oppose au passage d'un courant i négatif et qui laisse passer « sans opposition » un courant i positif, la tension à ses bornes étant alors nulle.

Si la tension aux bornes des composants montés en série avec la diode n'est pas négligeable par rapport à E_0, il faut revenir au schéma équivalent du paragraphe 6 voire à l'équation $i = I_S\, e^{\frac{ev}{\eta KT}}$.

8. LIMITATIONS D'UNE DIODE À JONCTION

8.1. LIMITATION EN TEMPÉRATURE

Nous avons vu, au chapitre précédent, que l'augmentation très rapide du courant de saturation I_S, limite l'utilisation des jonctions à 175 °C pour le silicium et à 75 °C pour le germanium.

8.2. LIMITATION EN PUISSANCE

Cette limitation traduit l'aptitude de la diode à se débarrasser, sous forme de chaleur rayonnée, de l'énergie électrique $P = vi$ qu'elle reçoit. Elle dépend des conditions de refroidissement et de la température ambiante.

8.3. DIODE POLARISÉE EN DIRECT

La densité maximale de porteurs, traversant la jonction, limite le *courant direct* à une valeur notée I_{FM}.

Cependant la diode supporte pendant des temps très courts (précisés par le constructeur) un courant direct beaucoup plus important, noté I_{FSM}.

8.4. DIODE POLARISÉE EN INVERSE

Le phénomène d'avalanche limite la *tension inverse* à une valeur notée V_{RM}.

9. TEMPS DE COMMUTATION D'UNE DIODE

• Considérons le dispositif de la figure 14, dans lequel la tension e varie, en fonction du temps, conformément à la courbe donnée à la figure 15.*a*.

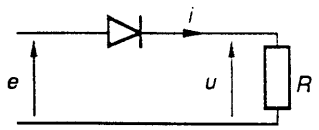


Fig. 14.

• Si la diode était idéale, elle permettrait l'application de toute la tension e à la résistance R lorsque $e = E_1$ et elle bloquerait le passage du courant lorsque $e = -E_2$. On obtiendrait, pour le courant i, la courbe donnée à la figure 15.*b*.

• En réalité l'évolution du courant i obéit à une courbe dont l'allure est donnée à la figure 15.*c*. On y distingue :

– lors de la mise en condition de la diode : le courant i ne s'établit pas instantanément à sa valeur d'équilibre $\frac{E_1}{R}$;

– au moment du blocage : il apparaît un courant inverse $-\frac{E_2}{R}$, pendant un temps t_s, appelé *temps de stockage*.

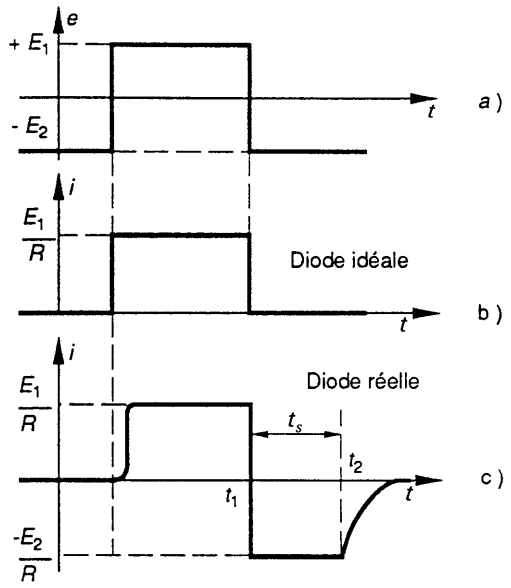


Fig. 15.

Pratiquement, ce temps t_s est bien supérieur, à tous les autres temps de commutation de la diode. C'est lui qui limite la fréquence f d'utilisation du composant, la diode ne pouvant être considérée comme parfaite que si $f \ll \frac{1}{t_s}$.

Ce temps de stockage t_s, résulte de la charge stockée Q_S que nous avons décrite au paragraphe 9.7.2 du chapitre précédent.

Les porteurs majoritaires, devenus « excès de porteurs minoritaires », après franchissement de la jonction, constituent une charge stockée Q_S qui obéit à la loi :

$$\frac{dQ_S}{dt} + \frac{Q_S}{\tau} = i.$$

Cette charge stockée change l'équilibre des semiconducteurs et on ne peut espérer bloquer la diode que lorsque cette charge en excès a disparu. Le temps de stockage t_s est le temps nécessaire à la disparition de la charge stockée Q_S.

• *Lorsque la diode est parcourue par un courant direct* $\frac{E_1}{R}$, il s'établit un régime

permanent pour lequel la charge stockée est donnée par la solution particulière de l'équation différentielle :

$$\frac{dQ_S}{dt} + \frac{Q_S}{\tau} = \frac{E_1}{R},$$

soit $$Q_S = \tau \frac{E_1}{R}.$$

- *Lorsque la tension d'alimentation e passe de* $+E_1$ *à* $-E_2$, cette charge stockée maintient la diode en conduction. Elle est alors traversée par le courant $i = -\frac{E_2}{R}$ et la charge Q_S obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{dQ_S}{dt} + \frac{Q_S}{\tau} = -\frac{E_2}{R},$$

dont la solution générale est de la forme :

$$Q_S = -\frac{\tau E_2}{R} + K\, e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Sachant qu'à l'instant $t = t_1$ la charge stockée est égale à $\frac{\tau E_1}{R}$, il vient :

$$Q_S = -\frac{\tau E_2}{R} + (E_1 + E_2)\frac{\tau}{R} e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}.$$

La charge stockée est complètement éliminée à l'instant t_2 tel que :

$$0 = -\frac{\tau E_2}{R} + (E_1 + E_2)\frac{\tau}{R} e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}},$$

soit :

$$t_s = t_2 - t_1 = \tau \ln \frac{E_1 + E_2}{E_2}.$$

Le temps de stockage dépend donc, par l'intermédiaire de E_1 et E_2, des conditions d'utilisation. Le constructeur indique le temps t_{rr}, temps de recouvrement inverse (100 ns à quelques μs) qui est de l'ordre de grandeur de τ.

REMARQUE

La montée du courant lors de la mise en conduction de la diode ainsi que la disparition exponentielle du courant inverse sont dues à la capacité de transition (paragraphe 9.7.1 du chapitre précédent).

Compensation du temps de stockage

Afin de compenser l'effet de la charge stockée, on place, en parallèle sur la résistance R, une capacité C conformément au schéma de la figure 16.

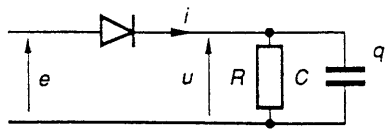


Fig. 16.

Lorsque la tension e est égale à E_1, la diode est conductrice et la capacité C se charge sous $u = E_1$ emmagasinant ainsi la charge $q = CE_1$.
A l'instant où la tension e passe de $+E_1$ à $-E_2$, la tension aux bornes de la diode passe instantanément à $e - u = -(E_1 + E_2)$.
La diode, étant maintenue conductrice par la charge stockée, se trouve instantanément traversée par un courant i négatif « infini ».
Nous nous trouvons donc dans le cas exceptionnel où la tension u aux bornes de la capacité C peut subir une variation brutale et suivant la valeur de la capacité, l'évolution de la tension u obéit à une des courbes décrites à la figure 17.

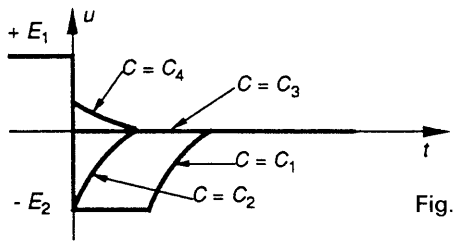


Fig. 17.

A l'instant où la tension e bascule de $+E_1$ à $-E_2$, la tension u passe instantanément à une valeur que nous noterons U_i, la charge emmagasinée par la capacité passant de CE_1 à CU_i. La charge $Q_t = C(E_1 - U_i)$ traverse donc instantanément la diode de la cathode vers l'anode :

- **Pour** $C = C_1$, $U_i = -E_2$, la charge

$$Q_t = C[E_1 - U_i] = C[E_1 + E_2]$$

est insuffisante pour éliminer la charge stockée, ce qui conduit à

$$C[E_1 + E_2] < \tau \frac{E_1}{R},$$

soit $$RC < \tau \frac{E_1}{E_1 + E_2}$$

- **Pour** $C = C_2$, $U_i = -E_2$, la charge $Q_t = C[E_1 + E_2]$ est juste égale à la charge stockée, ce qui conduit à

$$C[E_1 + E_2] = \tau \frac{E_1}{R},$$

soit $$RC = \tau \frac{E_1}{E_1 + E_2}$$

- **Pour $C = C_3$, $U_i = 0$,** *la compensation est parfaite* et l'on a :

$$Q_t = CE_1 = \tau\frac{E_1}{R} \qquad \text{soit} \qquad \boldsymbol{RC = \tau}.$$

- **Pour $C = C_4$,** la charge stockée Q_S est éliminée avant que la capacité C soit complètement déchargée. La diode se bloque et la tension u revient vers zéro par décharge du condensateur C dans la résistance R.

10. QUELQUES APPLICATIONS DES DIODES À JONCTION

10.1. REDRESSEMENT

10.1.1. Redressement simple alternance

Considérons le schéma de la figure 18, dans lequel la tension e varie sous la forme : $e = E \cos \omega t$.

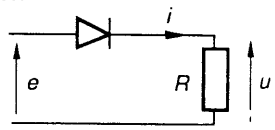


Fig. 18.

La diode, supposée parfaite, interdit la circulation d'un courant i négatif et se comporte comme un court-circuit lorsqu'elle est parcourue par un courant i positif, ce qui conduit pour la tension u à la représentation de la figure 19.

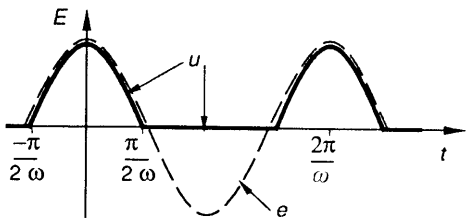


Fig. 19.

La tension u est périodique, de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$:

– sa valeur moyenne est :

$$U_{moy} = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} E\cos\omega t\,dt = \frac{E}{\pi};$$

– sa valeur efficace est :

$$U_{eff} = \left[\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} E^2\cos^2\omega t\,dt\right]^{1/2} = \frac{E}{2}.$$

La tension inverse maximale, aux bornes de la diode apparaît lorsque la diode est bloquée et lorsque $e = -E$. Elle est donc égale à E et la diode devra être telle que $V_{RM} > E$.

De plus le courant direct moyen étant égal à $\dfrac{E}{\pi R}$ la diode devra être telle que $I_{FM} > \dfrac{E}{\pi R}$.

1.1.2. Redressement double alternance

Considérons le schéma de la figure 20 dans lequel la tension e varie sous la forme : $e = E \cos \omega t$.

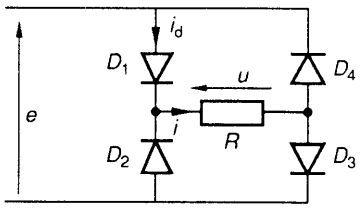


Fig. 20.

Lorsque la tension e est positive, les diodes D_1 et D_3 conduisent, les diodes D_2 et D_4 sont bloquées et inversement lorsque la tension e est négative. On obtient pour la tension u la courbe de la figure 21.

Cette tension est périodique, de période $T = \dfrac{\pi}{\omega}$.

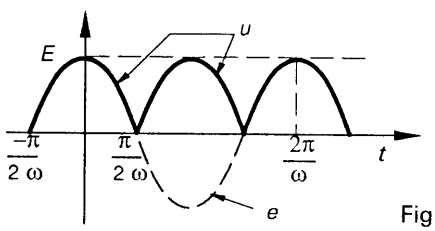


Fig. 21.

Sa valeur moyenne est :

$$U_{moy} = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} E\cos\omega t\,dt = \frac{2E}{\pi}.$$

Sa valeur efficace est :

$$U_{eff} = \left[\frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} E^2\cos^2\omega t\,dt\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{E}{\sqrt{2}}.$$

Lorsque D_1 et D_3 conduisent, la tension inverse aux bornes de D_2 ou de D_4 est égale à e dont la valeur maximum est E. Les diodes doivent donc être telles que $V_{RM} > E$.

Chaque diode ne conduisant que pendant une alternance de la tension e, la représentation de i_d est analogue à la représentation de u sur la figure 19, soit :

$$I_{d\text{moy}} = \frac{E}{\pi R} \quad \text{et} \quad I_{d\,\text{eff}} = \frac{E}{2R}.$$

Les diodes devront être telles que $I_{FM} > \dfrac{E}{\pi R}$.

On conçoit, d'après la forme des courbes, que le redressement est une étape dans la transformation de la tension e sinusoïdale en tension u continue. Afin de se rapprocher d'une tension u constante, on place en parallèle sur la résistance R un élément qui s'oppose à la variation de la tension à ses bornes c'est-à-dire un condensateur de capacité C. Cela qui conduit au dispositif suivant.

10.2. REDRESSEMENT AVEC FILTRAGE *R.C.*

Soit le montage de la figure 22 alimenté par deux tensions e égales, d'expression : $e = E \cos \omega t$.

Le condensateur C freine l'évolution de la tension u. La diode D_1 ne peut conduire que si la tension e devient supérieure à u. La diode D_2 ne peut conduire que si la tension $-e$ devient supérieure à u.

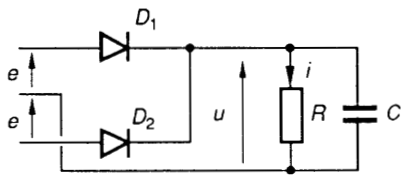


Fig. 22.

En supposant les diodes parfaites, on obtient, pour u, la courbe donnée à la figure 23. On peut y distinguer plusieurs phases.

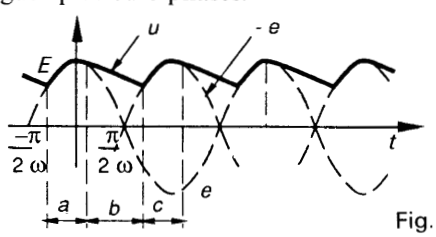


Fig. 23.

Phase a

La diode D_1 conduit appliquant à la diode D_2 la tension inverse $2e > 0$, la diode D_2 est donc bloquée. La diode D_1 étant supposée parfaite, la tension u suit l'évolution de la tension e. Remarquons que les diodes doivent être telles que $V_{RM} > 2E$.

Phase b

La tension e décroît rapidement et le condensateur, freinant l'évolution de la tension u, l'empêche de suivre la décroissance de e, ce qui impose $u > e$. La diode D_1 se bloque donc à son tour et le circuit RC se trouve isolé. La décroissance de la tension u est donc régie par la décharge du condensateur C dans la résistance R.

Phase c

La tension u décroissant et la tension $-e$ étant croissante, il arrive un moment où $u < -e$. La diode D_2 entre en conduction et la tension u suit l'évolution de la tension $-e$.

A la limite, si la constante de temps RC est infiniment grande par rapport à la période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ de la tension e, la décroissance de u, lors de la phase b, est négligeable et la tension u reste sensiblement constante et égale à E.

Ondulation résiduelle dans le cas ou $RC \gg T$

La tension u restant peu différente de E, le courant dans la résistance R varie peu autour de $I_{\text{moy}} = \dfrac{E}{R}$.

Au cours de la phase b, le condensateur se décharge à courant constant $\dfrac{E}{R}$ entre les instants peu différents de 0 et $\dfrac{\pi}{\omega}$. L'ondulation ΔU est obtenue par intégration de l'équation $i \approx \dfrac{E}{R} = -C\dfrac{du}{dt}$, soit :

$$-\Delta U = \int_{\substack{\text{pendant la} \\ \text{phase b}}} du = \int_0^{\pi/\omega} -\frac{E}{RC}\,dt$$

$$\Delta U = \frac{\pi E}{RC\omega} = \frac{I_{\text{moy}}}{2Cf}$$

10.3. REDRESSEMENT AVEC FILTRAGE *RC* ET RÉSISTANCE EN SÉRIE

Lors de la mise en route du dispositif de la figure 22, le condensateur, déchargé, se comporte comme un court-circuit. L'appel de courant est donc très important.

Afin de limiter ce défaut, on place parfois une résistance r en série avec le circuit RC, d'où le schéma de la figure 24 avec

$$e = E \cos \omega t = E \cos \theta.$$

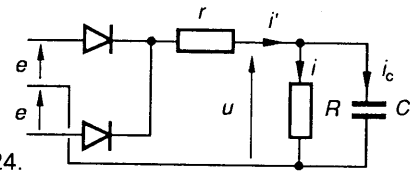


Fig. 24.

Lors de la conduction de l'une des diodes, la chute de tension dans la résistance r empêche la tension u de suivre soit la tension e, soit la tension $-e$.

Cependant, si la constante de temps RC est suffisamment grande, cette tension reste sensiblement constante et égale à U_0, ce qui conduit au graphe de la figure 25.

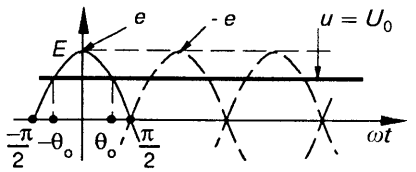


Fig. 25.

L'angle $\theta_0 = \omega t_0$, pour lequel la tension e devient égale à U_0 est appelé angle d'ouverture et il est défini par

$$U_0 = E \cos \omega t_0 = E \cos \theta_0.$$

De l'équation $i' = i + i_C$, on tire $I'_{moy} = I_{moy}$ car le courant moyen est nul dans un condensateur en régime périodique établi.

De plus $I_{moy} = \dfrac{U_0}{R}$ et $i' = \dfrac{E \cos \theta - U_0}{r}$ pour $-\theta_0 < \theta < \theta_0$. Soit

$$I'_{moy} = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{E \cos \theta - U_0}{r} \, d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi r} [E \sin \theta_0 - U_0 \theta_0]$$

$$= \frac{2E}{\pi r} [\sin \theta_0 - \theta_0 \cos \theta_0],$$

d'où il vient d'après $I'_{moy} = I_{moy}$:

$$\frac{2E}{\pi r} [\sin \theta_0 - \theta_0 \cos \theta_0] = \frac{U_0}{R} = \frac{E \cos \theta_0}{R}$$

soit :

$$\tan \theta_0 - \theta_0 = \frac{\pi r}{2R},$$

équation qui permet de déterminer θ_0, puis $U_0 = E \cos \theta_0$.

10.4. DOUBLEUR ET INVERSEUR DE TENSION CONTINUE

Soit le dispositif de la figure 26. A l'instant $t = 0$, $u(0^-) = u(0^+) = U_0$, on ferme l'interrupteur K. La diode est supposée parfaite.

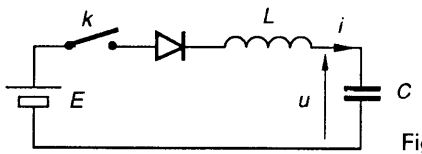


Fig. 26.

Des équations

$$\begin{cases} E = L \dfrac{di}{dt} + u \\ i = C \dfrac{du}{dt} \end{cases} \quad \text{on tire} \quad u + LC \frac{d^2u}{dt^2} = E.$$

La résolution de cette équation différentielle conduit à $u = E + A \cos(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Les constantes A et φ dépendent des conditions initiales :

$$i(0^-) = i(0^+) = 0,$$
$$u(0^-) = u(0^+) = U_0.$$

- De $i(0^+) = C \dfrac{du}{dt}(0^+) = 0$, on tire $-A\omega \sin \varphi = 0$, soit $\varphi = 0$.
- De $u(0^+) = U_0$, on tire $A = U_0 - E$.

Ce qui conduit aux équations finales :

$$u = E + (U_0 - E) \cos \omega t,$$

$$i = C \frac{du}{dt} = C\omega (E - U_0) \sin \omega t.$$

La diode bloque le courant i négatif, ces équations ne sont donc valables que lorsque i est positif, c'est-à-dire pour $E > U_0$ et pour $0 < t < \dfrac{\pi}{\omega}$.

10.4.1. $U_0 = 0$: doubleur de tension

Les équations deviennent

$$\begin{cases} u = E(1 - \cos \omega t), \\ i = CE\omega \sin \omega t. \end{cases}$$

Les courbes régissant l'évolution de la tension u et du courant i sont données à la figure 27.

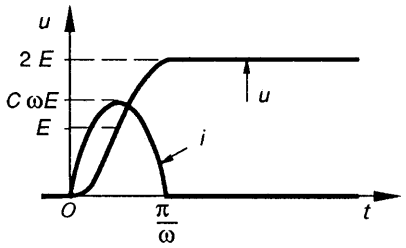


Fig. 27.

A l'instant $t = \frac{\pi}{\omega}$, la diode bloque le courant i, la tension u est alors égale à $2E$. Après l'instant $t = \frac{\pi}{\omega}$ et compte tenu de l'équation

$$i = C\frac{du}{dt} = 0,$$

la tension u reste constante et égale à $2E$.

10.4.2. $E = 0$ et $U_0 < 0$: inverseur de tension

Les équations deviennent :

$$\begin{cases} u = U_0 \cos \omega t, \\ i = -C\omega U_0 \sin \omega t, \end{cases}$$

et conduisent aux courbes de la figure 28.

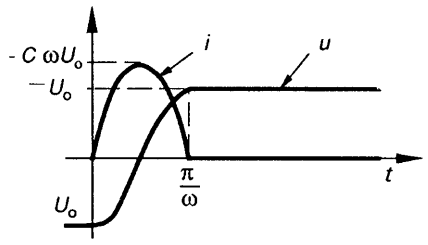


Fig. 28.

A l'instant $t = \frac{\pi}{\omega}$, la diode bloque le courant i et la tension u reste constante et égale à $-U_0 > 0$.

Ces deux circuits (doubleur et inverseur) sont utilisés pour le blocage de thyristors alimentés en continu, l'interrupteur K est alors réalisé par un thyristor auxiliaire de commutation.

10.5. DOUBLEUR DE TENSION

Considérons le schéma de la figure 29.

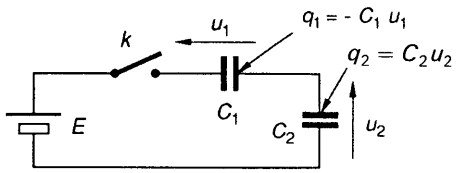


Fig. 29.

A l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur K. Les conditions initiales sont

$$u_1(0^-) = -E \text{ et } u_2(0^-) = U_{2n}.$$

Le circuit ne présente aucune résistance, ce qui autorise le passage d'un courant infini. Les tensions aux bornes des condensateurs sont donc susceptibles de variations brutales; c'est ce qui se passe à l'instant où on ferme l'interrupteur K.

Établissons les valeurs $u_1(0^+)$ et $u_2(0^+)$ des tensions après la fermeture de l'interrupteur K. Nous poserons $u_2(0^+) = U_{2(n+1)}$.

• Il apparaît dans le circuit une portion de conducteur isolé qui porte la charge

$$q_1 = -C_1 u_1,$$

du côté du condensateur C_1, et

$$q_2 = C_2 u_2,$$

du côté du condensateur C_2. La charge de ce conducteur ne pouvant varier, il vient :

$$q_1(0^-) + q_2(0^-) = q_1(0^+) + q_2(0^+)$$

soit :

$$+ C_1 E + C_2 U_{2n} = -C_1 u_1(0^+) + C_2 U_{2(n+1)}.$$

• L'interrupteur K étant fermé, nous pouvons écrire :

$$E = u_1(0^+) + U_{2(n+1)}.$$

Par élimination de $u_1(0^+)$ entre ces deux équations, il vient :

$$U_{2(n+1)} = \frac{2C_1}{C_1 + C_2} E + \frac{C_2}{C_1 + C_2} U_{2n},$$

ou en posant $\gamma = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$:

$$U_{2(n+1)} = 2(1 - \gamma)E + \gamma U_{2n}.$$

Considérons maintenant le schéma de la figure 30 alimenté par une tension carrée d'amplitude E. Les diodes sont supposées parfaites.

A la mise sous tension supposée intervenir à l'instant $t = 0$, la diode D_1 conduit, la diode D_2

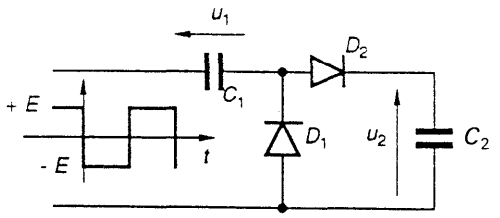


Fig. 30.

est bloquée, le condensateur C_1 se charge sous la tension $u_1 = -E$, et u_2 reste à zéro.

Lorsque la tension d'alimentation passe à $+E$, la diode D_1 est bloquée, la diode D_2 conduit et on retrouve le schéma de la figure 29, le condensateur C_2 se charge donc sous la tension $u_2 = 2E(1-\gamma)$.

A chaque période de la tension d'alimentation, le condensateur C_1 se charge sous $u_1 = -E$ puis se décharge partiellement dans le condensateur C_2 dont la tension u_2 varie par sauts successifs suivant la loi de récurrence :

$$U_{2(n+1)} = \gamma U_{2n} + 2E(1-\gamma).$$

Montrons que $U_{2n} = 2E[1-\gamma^n]$.

D'après la loi de récurrence :

$$\begin{aligned} U_{2(n+1)} &= 2E\gamma[1-\gamma^n] + 2E[1-\gamma] \\ &= 2E[1-\gamma^{n+1}], \end{aligned}$$

ce qui confirme l'équation : $U_{2n} = 2E[1-\gamma^n]$.

$\gamma = \dfrac{C_2}{C_1 + C_2}$ étant inférieur à 1, U_{2n} tend vers $2E$.

Remarquons qu'en toute rigueur U_{2n} n'atteint sa valeur finale $2E$ qu'après un nombre infini de périodes. Cependant, elle n'en diffère que de 5 % lorsque :

$$2\frac{95E}{100} = 2E[1-\gamma^n],$$

soit : $n = \dfrac{\lg 20}{\lg \dfrac{1}{\gamma}}$;

si $C_1 = C_2$, il vient : $\gamma = \dfrac{1}{2}$ et $n = 4{,}3$.

Après cinq périodes, la tension u_2 diffère de sa valeur finale $2E$ de moins de 5 %.

Ce dispositif est aussi appelé « pompe à diodes » car il fonctionne à la manière d'une pompe aspirante et refoulante : la capacité C_1 joue le rôle du cylindre du corps de pompe que l'on emplit à chaque période, et que l'on vide dans un réservoir qui correspond ici à la capacité C_2. Les diodes jouent le rôle des soupapes de la pompe.

10.6. COMPARATEUR DE PHASE

Considérons le dispositif de la figure 31 que l'on appelle « modulateur en anneau » ou encore « modulateur équilibré ».

Les diodes seront remplacées par leurs schémas équivalents décrits par les figures 11 et 12, dans lesquels nous supposerons que la tension de seuil E_0 est négligeable par rapport aux tensions e_R et e_S.

Une diode sera donc équivalente :

- à une résistance r lorsqu'elle conduit,
- à un circuit ouvert lorsqu'elle est bloquée.

Considérons, dans un premier temps, la partie gauche du schéma constituée par les générateurs e_S, $-e_S$, e_R et par les diodes D_1 et D_2, et calculons la tension v_0 au point O.

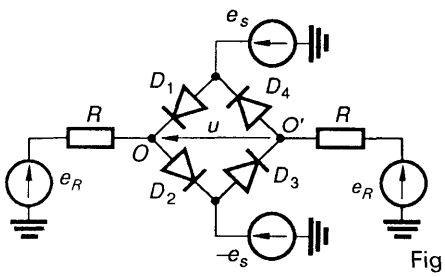


Fig. 31.

État 1 : Les diodes D_1 et D_2 sont bloquées.

La tension v_0 est alors égale à e_R : $v_0 = e_R$.

Les conditions conduisant à cet état sont : $v_0 > e_S$ et $v_0 < -e_S$, soit :

$$\begin{cases} e_R > e_S \\ e_R < -e_S \end{cases},$$

conditions qui ne peuvent être vérifiées que si $e_S < 0$.

État 2 : D_1 conduit, D_2 est bloquée.

Nous obtenons le schéma équivalent de la figure 32 et la tension v_0 s'établit à :

$$v_0 = \frac{Re_S + re_R}{R + r}.$$

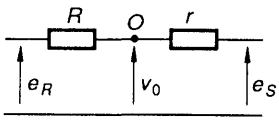


Fig. 32.

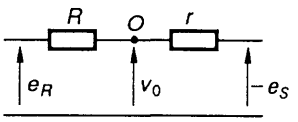


Fig. 33.

Les conditions conduisant à cet état sont : $v_0 < e_S$ et $v_0 < -e_S$, soit :

$$\begin{cases} Re_S + re_R < (R+r)e_S \\ Re_S + re_R < -(R+r)e_S \end{cases}$$

ou encore $\begin{cases} e_R < e_S \\ e_R\left(\dfrac{r}{2R+r}\right) < -e_S. \end{cases}$

État 3 : D_1 bloquée, D_2 conduit.
Nous obtenons le schéma équivalent de la figure 33 et la tension v_0 s'établit à :

$$v_0 = \frac{-Re_S + re_R}{R+r}.$$

Les conditions conduisant à cet état sont : $v_0 > e_S$ et $v_0 > -e_S$, soit :

$$\begin{cases} -Re_S + re_R > (R+r)e_S \\ -Re_S + re_R > -(R+r)e_S \end{cases}$$

ou encore $\begin{cases} e_R\left(\dfrac{r}{2R+r}\right) > e_S \\ e_R > -e_S. \end{cases}$

État 4 : Les diodes D_1 et D_2 conduisent.
Nous obtenons le schéma équivalent de la figure 34 et la tension v_0 s'établit à :

$$v_0 = \frac{r^2e_R + rRe_S - rRe_S}{r^2 + 2Rr},$$

soit $$v_0 = \frac{re_R}{r+2R}.$$

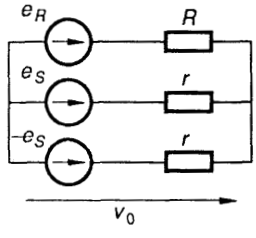


Fig. 34.

Les conditions conduisant à cet état sont : $v_0 < e_S$ et $v_0 > -e_S$, soit :

$$\begin{cases} re_R < (2R+r)e_S \\ re_R > -(2R+r)e_S \end{cases}$$

ou encore $\begin{cases} e_R\dfrac{r}{r+2R} < e_S \\ e_R\dfrac{r}{r+2R} > -e_S. \end{cases}$

Récapitulons

Nous supposerons que la *résistance interne r de la diode est très faible devant R.* Le tableau ci-dessous donne les différentes valeurs de v_0 ainsi que les conditions dans lesquelles elles sont établies.

D_1	D_2	Conditions	v_0
bloquée	bloquée	$e_R > e_S$ et $e_R < -e_S$	e_R
conduit	bloquée	$e_R < e_S$ et $e_S < 0$	e_S
bloquée	conduit	$e_R > -e_S$ et $e_S < 0$	$-e_S$
conduit	conduit	$e_S > 0$	0

Considérons maintenant, la partie droite du schéma de la figure 31, constituée par les générateurs e_S, $-e_S$, e_R et par les diodes D_3 et D_4. En raisonnant de façon identique, nous pouvons établir, en supposant que $r \ll R$, les valeurs de la tension v'_0 au point O'. Ce qui conduit au tableau ci-dessous :

D_4	D_3	Conditions	v'_0
bloquée	bloquée	$e_R < e_S$ et $e_R > -e_S$	e_R
conduit	bloquée	$e_R > e_S$ et $e_S > 0$	e_S
bloquée	conduit	$e_S > 0$ et $e_R < -e_S$	$-e_S$
conduit	conduit	$e_S < 0$	0

• En regroupant les deux tableaux précédents, nous pouvons établir les valeurs de la tension $u = v_0 - v'_0$, ainsi que les conditions dans lesquelles elles ont été établies.

Conditions		v_0	v'_0	u
$e_s < 0$	$e_R > e_S$ et $e_R < -e_S$	e_R	0	e_R
	$e_R < e_S$	e_S	0	e_S
	$e_R > -e_S$	$-e_S$	0	$-e_S$
$e_s > 0$	$e_R < e_S$ et $e_R > -e_S$	0	e_R	$-e_R$
	$e_R > e_S$	0	e_S	$-e_S$
	$e_R < -e_S$	0	$-e_S$	e_S

• Traçons, dès lors, les variations de u dans le cas où les tensions e_R et e_S sont sinusoïdales et de même pulsation ω :

$$\begin{cases} e_S = E_S \sin \omega t \\ e_R = E_R \sin(\omega t - \varphi). \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi le graphe de la figure 35.

La tension u est périodique, de période $\dfrac{\pi}{\omega}$.

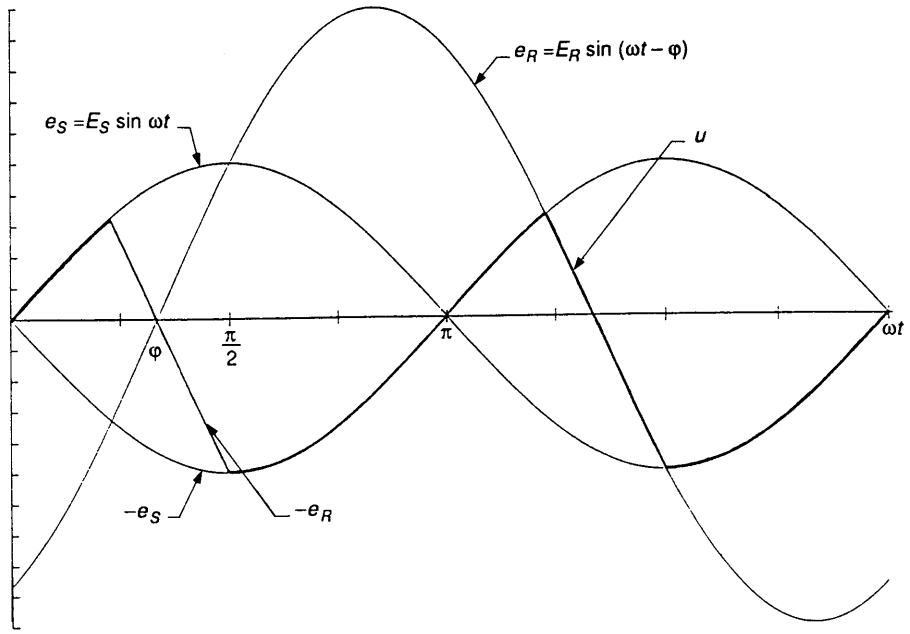

$e_R = E_R \sin(\omega t - \varphi)$
$e_S = E_S \sin \omega t$
u
φ
$\frac{\pi}{2}$
π
ωt
$-e_S$
$-e_R$

Fig. 35.

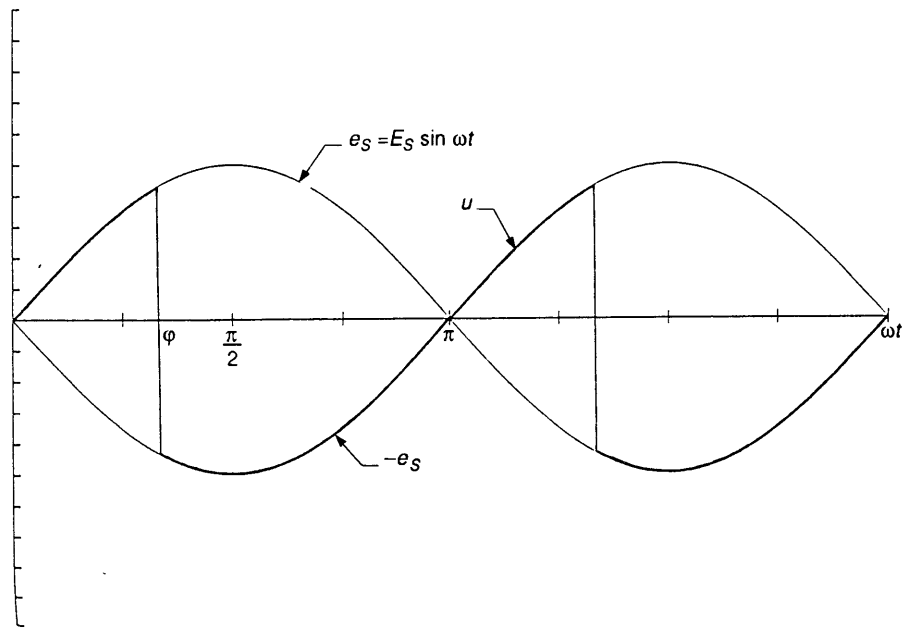

$e_S = E_S \sin \omega t$
u
φ
$\frac{\pi}{2}$
π
ωt
$-e_S$

Fig. 36.

• Dans le cas où E_R *est très grande par rapport à* E_S, nous obtenons, pour les variations de la tension u le graphe de la figure 36.

La valeur moyenne de la tension u peut être établie par :

$$U_{moy} = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} u\,dt$$

$$= \frac{\omega}{\pi}\left[\int_0^{\varphi/\omega} E_S \sin \omega t\,dt - \int_{\varphi/\omega}^{\pi/\varphi} E_S \sin \omega t\,dt\right]$$

$$= -\frac{E_S\omega}{\pi}\left\{\left[\frac{\cos \omega t}{\omega}\right]_0^{\varphi/\omega} - \left[\frac{\cos \omega t}{\omega}\right]_{\varphi/\omega}^{\pi/\omega}\right\}$$

$$= -2\frac{E_S}{\pi}\cos \varphi.$$

• En conclusion

En appliquant la tension u à un filtre passe-bas qui élimine les tensions de pulsation supérieure ou égale à 2ω, et dans le cas où $E_R \gg E_S$, il est possible d'élaborer une tension qui varie en fonction de la phase φ suivant la loi

$$U = -\frac{2E_S}{\pi}\cos \varphi.$$

Ce résultat est à rapprocher de celui que l'on obtient en appliquant les deux tensions e_R et e_S à un multiplicateur analogique suivi d'un filtre passe-bas.

11. DIODE ZENER

La diode Zener exploite le phénomène d'avalanche qui apparaît sur la caractéristique de la figure 9. Ce phénomène est dû à la création de porteurs minoritaires au voisinage de la jonction polarisée en inverse. Cependant, dans le cas de la diode Zener, ces porteurs sont créés par accroissement du champ électrique lié à l'existence de la barrière de potentiel. Si ce champ électrique est suffisamment élevé (de l'ordre de 10^7 V m^{-1}), il arrache des électrons aux atomes, provoquant ainsi la création de porteurs minoritaires.

La diode Zener dont le symbole est donné à la figure 37, présente une caractéristique dont l'allure est donnée à la figure 38.

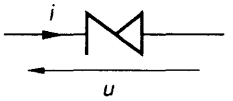


Fig. 37.

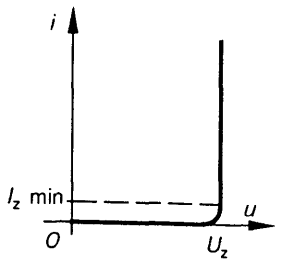


Fig. 38.

Pour $i > I_{Z\min}$, la tension u reste sensiblement constante et égale à U_Z, de l'ordre de quelques volts à quelques dizaines de volts, appelée tension de Zener. Remarquons, qu'une diode à jonction peut être, conformément au graphe de la figure 10, considérée comme une diode Zener de tension E_0.

11.1. SCHÉMA ÉQUIVALENT

A partir de la caractéristique idéalisée de la figure 39 nous pouvons déduire pour un point de fonctionnement situé sur la partie verticale (fonctionnement en diode Zener) :

$$u = U_Z + ri.$$

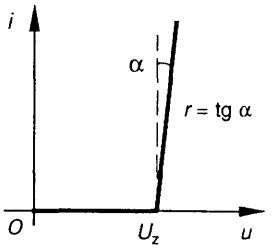


Fig. 39.

Ce qui conduit au schéma équivalent de la figure 40. L'ordre de grandeur de r est de quelques dixièmes d'ohm à quelques ohms.

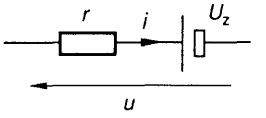


Fig. 40.

11.2. LIMITATIONS

A la condition $i > I_{Z\min}$, qui garantit un fonctionnement dans la partie verticale de la caractéristique, il faut ajouter une condition issue de la limitation en puissance de la diode Zener.

La puissance maximale dissipable, sous forme de chaleur rayonnée, P_{max}, conduit à la condition $ui < P_{max}$, puis, compte tenu de $u \approx U_Z$ = constante, à $i < I_{Z\max} = \dfrac{P_{max}}{U_Z}$.

Soit au total : $I_{Z\min} < i < I_{Z\max}$

11.3. INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE

Le coefficient de température $\alpha_T = \frac{1}{U_Z}\frac{dU_Z}{dT}$ varie en fonction de la tension de Zener comme l'indique la figure 41.

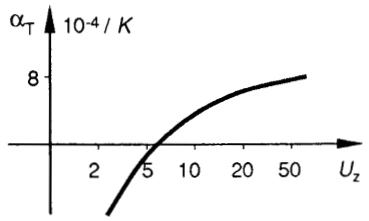


Fig. 41.

Nous y remarquons :

- pour $U_Z \approx 6$ volts, $\alpha_T = 0$ et la tension de Zener dépend très peu de la température;
- pour $U_Z > 6$ volts, α_T est positif et la tension de Zener augmente avec la température;
- pour $U_Z < 6$ volts, α_T est négatif et la tension de Zener diminue avec la température.

Cette variation limite l'utilisation des diodes Zener dans les dispositifs de mesure.

Remarquons cependant que, pour U_Z supérieur à 6 volts, on peut compenser l'effet de la température en montant en série avec la diode Zener une diode polarisée en direct. Sachant que la tension aux bornes de la diode diminue de 2,2 mV par degré, on compense ainsi l'accroissement de la tension de Zener. La diode peut être incorporée dans le boîtier de la Zener et il est alors possible d'élaborer un composant maintenant une tension de 8 volts avec un coefficient de température de 10^{-5}, dans une gamme de température allant de $-55\,°C$ à $100\,°C$.

11.4. MONTAGE STABILISATEUR ÉLÉMENTAIRE

Le dispositif de la figure 42 permet de maintenir la tension U, aux bornes de la charge R_c, sensiblement constante lorsque le courant I_u qui la traverse varie entre zéro et $I_{U\max}$, la tension d'alimentation E variant entre $E_{\min}$ et $E_{\max}$ (ce peut être, par exemple, la tension de la figure 23 obtenue par redressement double alternance).

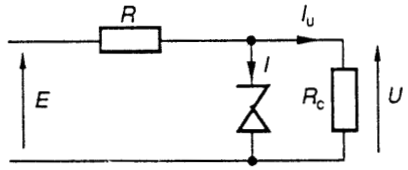


Fig. 42.

11.4.1. Calcul de la résistance *R*

Cette résistance est calculée de telle sorte que le courant I_Z dans la diode Zener reste compris entre $I_{Z\min}$ et $I_{Z\max}$ quelque soit le fonctionnement, c'est-à-dire dans les conditions les plus défavorables.

La tension U restant constante et égale à U_Z, $I_Z = \frac{E - U_Z}{R} - I_U$.

La condition $I_Z < I_{Z\max}$ impose dans les conditions les plus défavorables (c'est-à-dire $E = E_{\max}$, $I_U = 0$) :

$$\frac{E_{\max} - U_Z}{R} < I_{Z\max},$$

soit :

$$R > \frac{E_{\max} - U_Z}{I_{Z\max}}.$$

La condition $I_Z > I_{Z\min}$ impose dans les conditions les plus défavorables ($E = E_{\min}$ et $I_U = I_{U\max}$) :

$$\frac{E_{\min} - U_Z}{R} > I_{Z\min} + I_{U\max},$$

soit :

$$R < \frac{E_{\min} - U_Z}{I_{Z\min} + I_{U\max}}.$$

11.4.3. Qualité de la stabilisation

Elle se juge par la petite variation u de U résultant d'une petite variation e de E et d'une petite variation i_u de I_U, ce qui conduit à écrire

$$u = \frac{1}{\delta}e - \rho i_U \quad \begin{cases} \text{avec} \\ \delta \text{ le facteur de stabilisation,} \\ \rho \text{ la résistance interne.} \end{cases}$$

Par remplacement de la diode Zener par son schéma équivalent, on obtient le schéma de la figure 43.

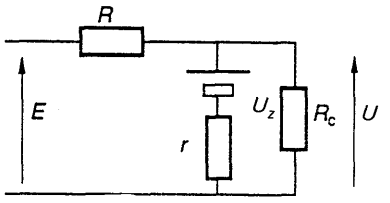


Fig. 43.

Remarquons que :

- du point de vue des petites variations, toute tension constante se comporte comme un court-circuit;
- on peut écrire $\delta = \left(\frac{e}{u}\right)_{i_u=0}$ et $\rho = -\left(\frac{u}{i_u}\right)_{e=0}$.

Ce qui conduit :

- pour le calcul de δ au schéma de la figure 44, d'où on tire $\delta = \frac{R+r}{r} \approx \frac{R}{r}$;

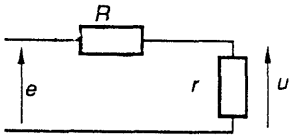


Fig. 44.

- pour le calcul de ρ au schéma de la figure 45, d'où on tire $\rho = \frac{rR}{R+r} \approx r$.

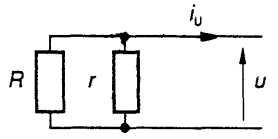


Fig. 45.

12. PHOTODIODES

Une radiation lumineuse de longueur d'onde λ, donc de fréquence $v = \frac{c}{\lambda}$ (ou c est la vitesse de la lumière $= 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}) est constituée de grains d'énergie appelés photons qui transportent chacun une énergie $W_p = hv$ (où h est la constante de Plank $= 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J s).

• Si on éclaire un semi-conducteur, à l'aide de cette radiation, les photons « heurtent » les électrons de valence du semi-conducteur et si leur énergie hv est suffisante pour les arracher, ils provoquent la création de paires électron-trou.

• Considérons donc une jonction polarisée en inverse. Le courant qui la traverse, dû essentiellement aux porteurs minoritaires, est très faible (de l'ordre du nanoampère). Si on éclaire cette jonction, la création de paires électron-trou provoque l'apparition de porteurs minoritaires qui franchissent aisément la jonction, et le courant inverse augmente.

La création de porteurs minoritaires augmentant avec l'intensité de la radiation, on obtient un composant dont la résistance apparente diminue avec l'éclairement. On l'utilise pour des systèmes de détection de lumière : cellules photoélectriques, lecture de films, etc.

EXERCICES

1.

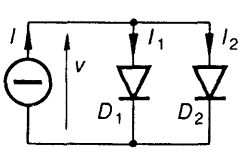
On rappelle la loi de variation du courant de saturation d'une diode à jonction P-N : $I_S = BT^3 \, e^{-\frac{W_i}{KT}}$ avec $K = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K et

$$W_i = 1{,}12 \text{ eV} = 1{,}12 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Montrer que pour une variation dT de température, la variation dI_S du courant de saturation I_S est donnée par :

$$\frac{dI_S}{I_S} = 3\frac{dT}{T} + \frac{W_i}{KT^2} dT.$$

Calculer la valeur de $\frac{dI_S}{I_S}$ pour un accroissement $dT = 2$ °C de température autour de $T = 300$ K.



2° On considère le dispositif, décrit par la figure, dans lequel deux diodes identiques sont alimentées par un générateur de courant constant I.

a) Sachant que le courant direct d'une diode s'écrit :

$$I = I_S \, e^{\frac{eV}{KT}} \text{ avec } e = 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ coulomb},$$

établir la relation $T_1 \ln \frac{I_1}{I_{S_1}} = T_2 \ln \frac{I_2}{I_{S_2}}$.

b) Par suite d'un déséquilibre thermique, la température T_1 de la diode D_1 s'accroît de dT_1; montrer que la variation dI_1 du courant I_1 est donnée par

$$dI_1\left[\frac{T_1}{I_1} + \frac{T_2}{I_2}\right] = T_1 \frac{dI_{S_1}}{I_{S_1}} - dT_1 \frac{eV}{KT_1}$$

c) A partir de l'état d'équilibre ($I_1 = I_2$, $T_1 = T_2 = 300$ K, $V = 0{,}6$ volts), le déséquilibre thermique provoque une élévation de 2 °C de la température T_1.

Montrer que les courants I_1 et I_2 s'établissent à $I_1 = \frac{65}{100} I$, $I_2 = \frac{35}{100} I$.

d) Va-t-on observer un retour vers l'équilibre thermique (en d'autres termes, l'équilibre thermique initial était-il stable)? Conclure et proposer des solutions.

2.

La figure 1 représente une cellule élémentaire de la partie sensible d'une caméra reticon.

Les condensateurs sont initialement chargés sous une tension E : $[v_1(0_-) = v_2(0_-) = E > 0]$, puis à l'instant $t = 0$ les interrupteurs K_1 et K_2 sont ouverts.

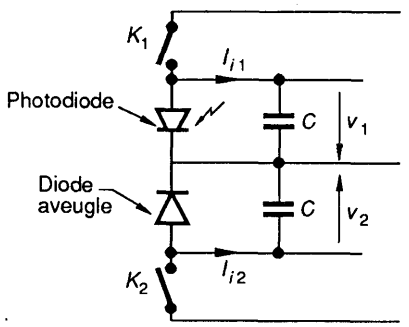


Fig. 1.

1° En l'absence d'éclairement les deux diodes de la figure 1 sont parcourues par les courants I_{i_1} et I_{i_2} tels que $I_i = I_S\left[1 - e^{-\frac{ev}{\eta KT}}\right]$ avec $K = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ JK; $\eta = 1{,}9$; $I_S = BT^3 e^{-\frac{W_i}{KT}}$.

a) Sachant qu'à la température ordinaire de 27 °C, $I_S = 10^{-10}$ A, calculer sa valeur à 100 °C.

b) Montrer que, dès que la tension v devient supérieure à 0,2 V, les courant I_{i_1} et I_{i_2} sont peu différents de I_S.

2° Lorsque la photodiode est éclairée, elle est traversée par un courant supplémentaire I_P qui dépend de l'éclairement. On donne $I_P = 0{,}2$ μA. Montrer qu'à la température de 27 °C, le courant inverse dans la photodiode est caractéristique de l'éclairement. En est-il de même à 100 °C?

3° On admet, pour modèle des diodes, le schéma équivalent de la figure 2.

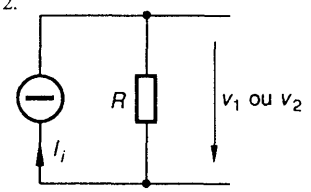


Fig. 2.

a) En associant ce schéma équivalent au condensateur C de la figure 1, établir, en fonction de R, C et I_i, l'équation différentielle de la tension v_1.

b) Intégrer cette équation différentielle et calculer $v_1(t)$.

4° A l'instant $t = \tau$ les deux interrupteurs K_1 et K_2 sont fermés et les tensions v_1 et v_2 sont appliquées à un amplificateur de différence dont la tension de sortie u est égale à $A(v_2 - v_1)$.

a) Calculer $u(\tau)$ en fonction de A, R, I_p, τ, C et montrer que sa valeur est caractéristique de l'éclairement.

b) Justifier la présence de la diode aveugle.

3.

La figure 1 donne le schéma de principe d'un redresseur triphasé.

Les diodes D_1, D_2, D_3 sont parfaites.

La charge est suffisamment inductive pour pouvoir être assimilée, en régime permanent, a un générateur de courant I.

Les trois tensions e_1, e_2, e_3 forment un système triphasé équilibré direct :

$e_1 = E \cos \omega t$, $e_2 = E \cos(\omega t - 2\pi/3)$, $e_3 = E \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$.

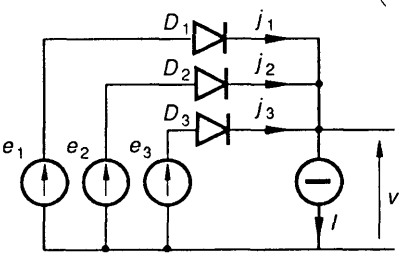


Fig. 1.

1° Montrer que deux diodes ne peuvent conduire simultanément et que celle qui conduit correspond à la tension la plus élevée.

a) tracer sur un même graphe les tensions $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$, $v(t)$

b) montrer que la valeur moyenne de la tension v s'écrit $V_{moy} = \frac{3E\sqrt{3}}{2\pi}$.

2° En réalité, les générateurs ne sont pas parfaits; ils possèdent une inductance interne λ. Lors des commutations, cette inductance s'oppose aux variations brutales du courant, et *pendant un intervalle de temps* τ, *deux diodes conduisent simultanément* (fig. 2). Ce phénomène est appelé *empiètement anodique.*

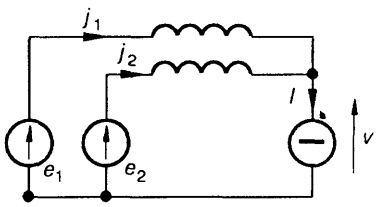


Fig. 2.

a) A l'instant $t = \frac{\pi}{3\omega}$, $j_1\left(\frac{\pi}{3\omega}\right) = I$, $j_2\left(\frac{\pi}{3\omega}\right) = 0$, la diode D_2 commence à conduire. Établir l'équation différentielle du courant j_2 en fonction de e_1 et e_2. Intégrer cette équation et démontrer la relation suivante :

$$I = \frac{E\sqrt{3}}{2\lambda\omega}(1 - \cos \omega\tau)$$

b) Établir, dans l'intervalle de temps $\left[\frac{\pi}{3\omega}, \frac{\pi}{3\omega} + \tau\right]$, l'équation de la tension v en fonction de e_1 et e_2, faire apparaître le défaut sur le graphe de $v(t)$ et calculer la chute de tension $\varepsilon = e_2 - v$ en fonction de e_1 et de e_2.

c) Montrer qu'il en résulte sur V_{moy} une chute de tension égale à

$$\varepsilon_{moy} = \frac{3E\sqrt{3}}{4\pi}(1 - \cos \omega\tau) = \frac{3\lambda\omega}{2\pi} I.$$

3 le transistor à jonctions

1. DESCRIPTION ET SYMBOLE

Le transistor est formé par la succession de trois semi-conducteurs, respectivement de type P-N-P ou N-P-N, ce qui conduit à la description de la figure 1.

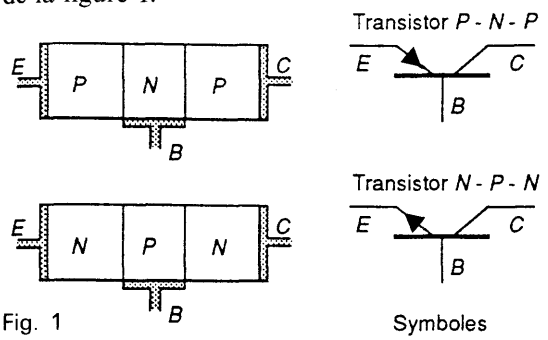


Fig. 1 Symboles

Des connexions métalliques sont fixées sur la partie centrale appelée *base B* et sur les deux extrémités appelées respectivement *émetteur E* et *collecteur C*.

Bien que le transistor soit en apparence symétrique, on ne peut pas permuter émetteur et collecteur car, par construction, les jonctions base-émetteur et base-collecteur ne sont pas identiques. La figure 2 indique, par exemple, la structure d'un transistor de type planar :

- l'émetteur est beaucoup plus dopé que la base,
- la flèche qui repère l'émetteur indique le sens passant de la jonction émetteur-base.

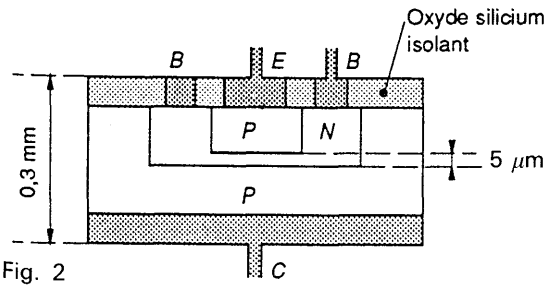


Fig. 2

2. EFFET TRANSISTOR

L'effet transistor apparaît lorsqu'on polarise la *jonction émetteur-base en direct* et la *jonction collecteur-base en inverse.*

2.1. FONCTIONNEMENT À COURANT DE BASE NUL

Alimentons un transistor P-N-P comme indiqué à la figure 3. Nous y distinguons entre base et collecteur une jonction polarisée en inverse. Le courant I_C est le courant inverse de la jonction base-collecteur, de l'ordre du nA et indépendant de V_{CB}, nous le noterons I_{C_0B}.

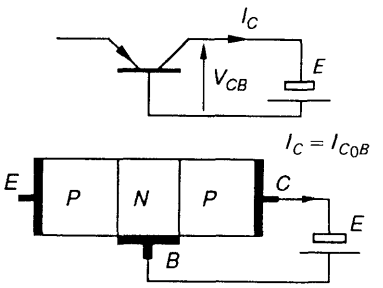


Fig. 3

2.2. FONCTIONNEMENT À COURANT DE BASE CONSTANT

2.2.1. Fonctionnement à collecteur ouvert

Alimentons le transistor P-N-P, comme indiqué à la figure 4. La jonction base-émetteur est polarisée en direct. La tension à ses bornes est

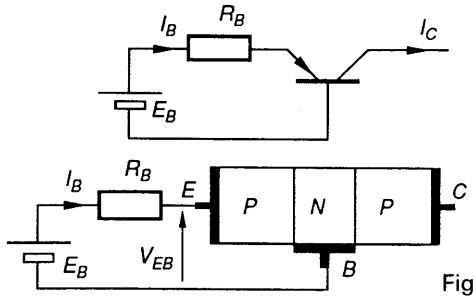


Fig. 4

donc faible (de l'ordre de 0,6 volt pour le silicium et de 0,2 volt pour le germanium). Si la tension d'alimentation E_B est très grande par rapport à 0,6 volt, le courant

$$I_B = \frac{E_B - 0{,}6}{R_B} \approx \frac{E_B}{R_B}$$

ne dépend que des éléments extérieurs et est indépendant du transistor. La caractéristique $I_B = f(V_{EB})$ est celle d'une diode polarisée en direct et le courant de collecteur est nul.

2.2.2. Fonctionnement à collecteur fermé

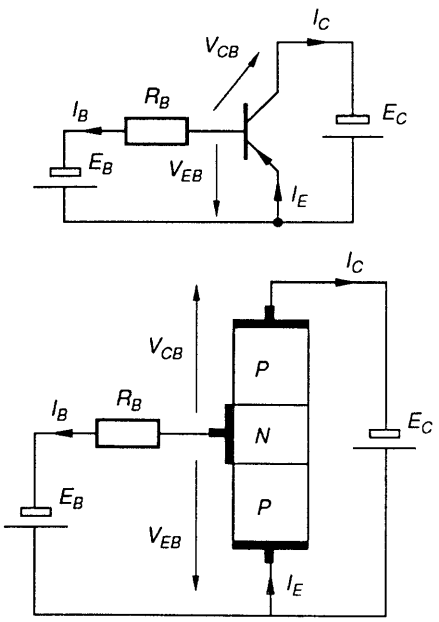


Fig. 5

Considérons le schéma de la figure 5, dans lequel les forces électromotrices E_B et E_C sont très grandes par rapport à 0,6 volt.

L'alimentation de la base étant identique à celle du schéma de la figure 4, la jonction base-émetteur est polarisée en direct et le courant $I_B \approx \frac{E_B}{R_B}$ est indépendant du transistor. De plus, l'émetteur étant beaucoup plus dopé que la base, ce courant est essentiellement dû aux trous injectés de l'émetteur vers la base.

La tension collecteur base

$$V_{CB} = -E_C + V_{EB} \approx -E_C$$

est négative et la jonction collecteur-base est polarisée en inverse.

L'évolution spatiale du potentiel dans le transistor a donc l'allure indiquée à la figure 6.

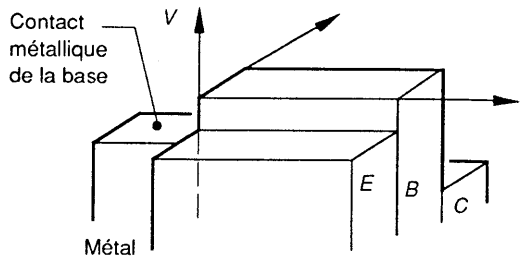


Fig. 6

Les trous injectés par l'émetteur dans la base, dont la contribution au courant I_E est primordiale, ne diffusent pas tous vers la barrière de potentiel base-métal, contrairement à ce que l'on observe lorsque le collecteur est ouvert. La majeure partie d'entre eux se trouve happée par la barrière de potentiel base-collecteur, tendant ainsi à modifier la répartition des trous dans la base. Or le courant de base I_B, dû essentiellement à ces porteurs, dépend (voir diffusion) du gradient de concentration de ces porteurs au voisinage de la barrière de potentiel base-métal.

Dans le fonctionnement envisagé, le courant I_B ne dépend que des éléments extérieurs $\left(I_B \approx \frac{E}{R_B}\right)$, et le transistor qui n'est pas maître de ce courant, n'est donc pas maître de ce gradient de concentration. Il est donc nécessaire que le nombre de trous injectés par l'émetteur augmente considérablement de façon à retrouver au voisinage de la barrière de potentiel base-métal la répartition de trous imposée par le courant I_B.

Par construction (voir figure 2), le collecteur capte un nombre de trous beaucoup plus important que la base. Il apparaît donc un courant I_C, bien supérieur au courant I_B, qui dépend du nombre de porteurs injectés par l'émetteur et du courant I_B par l'intermédiaire du gradient de concentration en trous au voisinage de la barrière de potentiel base-métal.

***En conclusion*, l'effet transistor consiste à contrôler, à l'aide du courant de base I_B, relativement faible, un courant de collecteur I_C, beaucoup plus important.**

REMARQUE

Le métal ne contient pas de trous; c'est en fait un réservoir d'électrons mobiles. Dire qu'un trou tombe le long de la barrière de potentiel base-métal signifie qu'un électron mobile du métal traverse la barrière pour annuler ce trou par recombinaison.

Le courant de base correspond donc à un courant de recombinaison : les trous injectés par l'émetteur dans la base atteignent presque tous le collecteur, mais un petit nombre d'entre eux se recombinent au passage avec les électrons majoritaires de la base. Ce phénomène doit être compensé par un apport d'électrons, sinon la structure du semi-conducteur de la base évoluerait indéfiniment. Ce sont les électrons provenant du métal de la base qui compensent les recombinaisons.

3. MISE EN ÉQUATIONS

Regroupons les schémas des figures 3 et 4 pour réaliser le schéma de la figure 7.

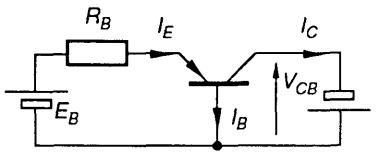


Fig. 7

Le courant I_C résulte :

- du courant de fuite en base commune I_{C_0B} qui intervient sur le schéma de la figure 3;
- du courant αI_E provenant des trous injectés par l'émetteur.

α est un nombre inférieur à 1, car, d'une part une faible partie du courant I_E est dû aux électrons majoritaires de la base et d'autre part une partie des trous est absorbée par les recombinaisons avant d'atteindre le collecteur. Cependant, α est d'autant plus voisin de l'unité que la base est moins dopée et que ses dimensions sont faibles.

Soit au total : $I_C = \alpha I_E + I_{C_0B}$.

De plus, si la tension V_{CB} augmente, la charge d'espace de la jonction base-collecteur augmente, accroissant ainsi les dimensions de la zone de transition dépourvue de porteurs mobiles. Comme la base est peu dopée, cet accroissement se fait essentiellement aux dépens de la base qui voit sa largeur effective réduite, ce qui accroît, pour les trous injectés par l'émetteur, la possibilité d'atteindre le collecteur. Ce phénomène connu sous le nom d'« effet Early » provoque une augmentation du courant I_C avec V_{CB}. Pour en tenir compte, nous introduirons le terme correctif $\frac{V_{CB}}{\rho}$, soit en définitive :

$$I_C = \alpha I_E + I_{C_0B} + \frac{V_{CB}}{\rho}.$$

Ordres de grandeurs

- αI_E est de l'ordre de quelques dizaines de mA, voire de plusieurs ampères.
- I_{C_0B} et $\frac{V_{CB}}{\rho}$ sont de l'ordre de quelques nA.
- I_{C_0B} et $\frac{V_{CB}}{\rho}$ apparaissent ainsi comme des termes correctifs et très souvent nous pourrons écrire en première approximation : $I_C = \alpha I_E$.
- α varie entre 0,9 et 0,995.

4. CARACTÉRISTIQUES DU TRANSISTOR

Le transistor est relié au réseau extérieur par trois connexions (émetteur-base-collecteur). Afin de pouvoir considérer le transistor comme un quadripôle, il faut mettre une de ses connexions en commun entre l'entrée et la sortie.

L'utilisation la plus courante étant le montage émetteur commun, nous établirons les caractéristiques pour ce type de montage, qui correspond au schéma de la figure 8.

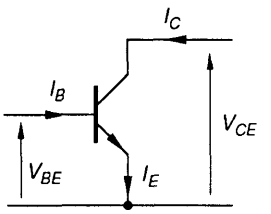


Fig. 8

Nous savons qu'un quadripôle est complètement décrit par deux équations entre les grandeurs d'entrée (ici I_B et V_{BE}) et les grandeurs de sortie (ici I_C et V_{CE}).

Afin d'être au plus près du fonctionnement physique du composant, ces équations sont recherchées sous la forme :

$$\begin{cases} V_{BE} = f(I_B, V_{CE}), \\ I_C = f(I_B, V_{CE}). \end{cases}$$

Il s'agit de fonctions de deux variables qui sont décrites par des surfaces dans un espace à trois dimensions. Afin de faciliter la représentation,

nous tracerons les courbes obtenues, en coupant ces surfaces par des plans perpendiculaires aux axes des variables I_B et V_{CE}, ce qui conduit au tracé des courbes suivantes.

4.1. CARACTÉRISTIQUES $I_C = f(V_{CE})$ À I_B CONSTANTE

Nous avons établi au paragraphe 3 l'équation $I_C = \alpha I_E + I_{C_0B} + \frac{V_{CB}}{\rho}$.

Comme il ne peut y avoir une accumulation infinie de charges sur le transistor, la loi des nœuds conduit à

$$I_E = I_C + I_B.$$

D'autre part $V_{CB} = V_{CE} + V_{EB}$. La tension V_{CB} est la tension aux bornes d'une jonction polarisée en inverse. Elle est de l'ordre d'une dizaine de volts. La tension V_{BE} est la tension aux bornes d'une jonction polarisée en direct. Elle est de l'ordre de 0,6 volt. Soit $V_{CB} \approx V_{CE}$.

Des équations :

$$\begin{cases} I_C = \alpha I_E + I_{C_0B} + \dfrac{V_{CE}}{\rho} \\ I_E = I_C + I_B \end{cases}$$

on tire :

$$I_C = \frac{\alpha}{1-\alpha} I_B + \frac{I_{C_0B}}{1-\alpha} + \frac{V_{CE}}{\rho(1-\alpha)}$$

que l'on écrit sous la forme :

$$\boxed{I_C = \beta I_B + I_{C_0E} + \frac{V_{CE}}{\rho'}}$$

avec :

- $\beta = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$, qui est le gain en courant en émetteur commun;
- $I_{C_0E} = \dfrac{I_{C_0B}}{1-\alpha}$, qui est le courant de fuite en émetteur commun;
- $\rho' = \rho(1-\alpha)$.

Nous obtenons ainsi les caractéristiques tracées à la figure 9 (les graduations étant données à titre indicatif).

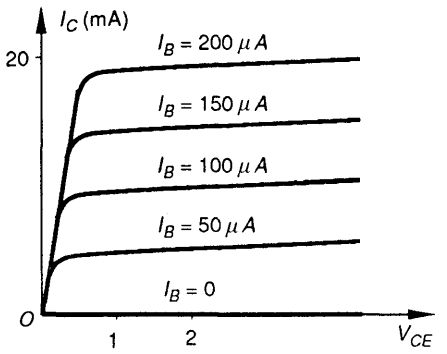


Fig. 9

Nous y observons une partie quasi horizontale correspondant au terme αI_B, la légère croissance étant due au terme $\frac{V_{CE}}{\rho'}$.

Pour les valeurs de V_{CE} inférieures à 1 volt, la tension V_{CB} devient quasiment nulle et la jonction collecteur-base n'est plus polarisée en inverse. Des porteurs, de même nature que ceux qui, émis par l'émetteur, chutent dans le collecteur après transit dans la base, sont injectés par le collecteur dans la base créant ainsi un mouvement de porteurs en sens inverse et provoquant une décroissance rapide du courant I_C.

REMARQUES

- α *étant de l'ordre de* 0,99, *le courant de fuite en émetteur commun*

$$I_{C_0E} = \frac{I_{C_0B}}{1-\alpha} = 100 I_{C_0B}$$

est beaucoup plus grand que I_{COB}. *Il est de l'ordre de* 100 nA

- $\beta = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ *est de l'ordre de* 100.

Remarquons de plus que, α *dépendant du dopage et des dimensions de la base, il est très difficile pour le constructeur de fixer sa valeur avec une précision supérieure à* 0,5 %. *Supposons que* α *passe de* 0,99 *à* 0,995. *Les valeurs correspondantes de* β *sont :* $\frac{0{,}99}{1-0{,}99} = 99$ *et* $\frac{0{,}995}{1-0{,}995} = 199$.

Il est donc possible d'observer, dans un même lot de composants, ***une très forte dispersion du coefficient*** β *qui est un des paramètres essentiels du transistor. Les dispositifs utilisant des transistors devront être prévus de telle sorte qu'ils fonctionnent correctement lorsque le coefficient* β *varie dans une large fourchette (par exemple entre* 100 *et* 250*).*

- $\rho' = \rho(1-\alpha) \approx \dfrac{\rho}{100}$, *ce qui explique que la croissance de* I_C *avec* V_{CE} *soit relativement sensible.*

4.2. CARACTÉRISTIQUE $I_C = f(I_B)$ À V_{CE} CONSTANTE

Elle peut être obtenue à partir du réseau de caractéristiques de la figure 9, en relevant les valeurs de I_C correspondant à chaque valeur de I_B sur la verticale $V_{CE} = \text{Cte}$.

Dès que V_{CE} est supérieure à un volt, la validité de l'équation :

$$I_C = \beta I_B + I_{C_0E} + \frac{V_{CE}}{\rho},$$

combinée au fait que les termes $I_{C_0E} + \frac{V_{CE}}{\rho}$ sont des termes correctifs, conduit à : $I_C \approx \beta I_B$ et à la caractéristique de la figure 10.

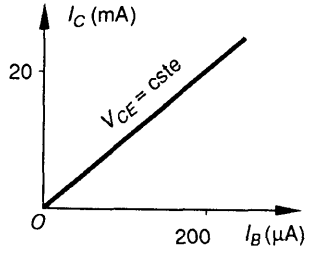


Fig. 10.

Notons que l'approximation $I_C = \beta I_B$ est d'autant plus justifiée que la dispersion du facteur β, dans un même lot de transistors, masque les corrections qui peuvent être apportées par les termes I_{C_0E} et $\frac{V_{CE}}{\rho}$.

4.3. CARACTÉRISTIQUE $V_{BE} = f(I_B)$ À V_{CE} CONSTANTE

Sachant qu'entre base et émetteur, on retrouve la structure d'une diode à jonctions, la caractéristique $V_{BE} = f(I_B)$ à l'allure décrite par la figure 11.

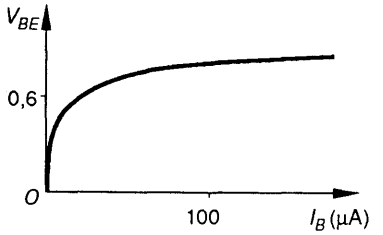


Fig. 11

Dès que V_{CE} est supérieure à un volt, cette caractéristique est pratiquement indépendante de V_{CE}.

REMARQUE

Nous avons vu, lors du chapitre précédent, que la relation entre I_B et V_{BE} peut être décrite par une équation de la forme :

$$I_B = I_{BS}\, e^{\frac{V_{BE}e}{\eta KT}}.$$

Comme nous pouvons écrire, avec une bonne approximation, $I_C = \beta I_B$, la relation entre I_C et V_{BE} est donnée par une équation de la forme :

$$I_C = I_S\, e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}$$

où $V_T = \frac{\eta KT}{e} = \eta\, 25$ mV *à* 300 K

avec $1 < \eta < 2$.

En pratique, pour un transistor au silicium, V_T est de l'ordre de **30 mV** *à* 300 K.

4.4. CARACTÉRISTIQUE $V_{BE} = f(V_{CE})$ À I_B CONSTANTE

Nous ne la tracerons pas, nous retiendrons seulement que dès que V_{CE} est supérieure à un volt, la tension V_{BE} est indépendante de V_{CE}.

5. RÉGIMES DE FONCTIONNEMENT DU TRANSISTOR

Considérons le schéma de la figure 12 et proposons-nous de déterminer les valeurs du courant I_C et de la tension V_{CE} en fonction des éléments du dispositif.

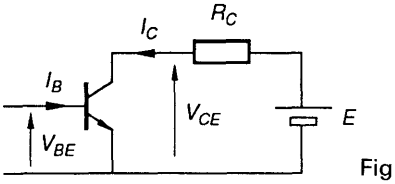


Fig. 12

Nous disposons pour cela de deux équations :

- l'une provenant du transistor, donnée par le réseau de caractéristiques :
  $I_C = f(V_{CE})$ à $I_B = \text{Cte}$;
- l'autre résultant de la loi d'Ohm :
  $E = R_C I_C + V_{CE}$.

Ce qui nous conduit à la construction graphique de la figure 13, en traçant, dans les axes $I_C = f(V_{CE})$, la droite représentative de l'équation $E = R_C I_C + V_{CE}$.

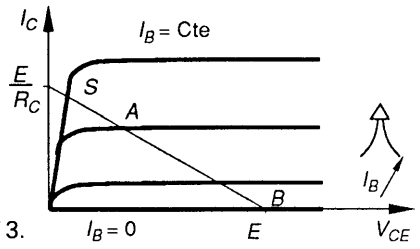


Fig. 13.

Cette droite est appelée ***droite de charge statique.*** Les valeurs de I_C et de V_{CE} sont les coordonnées du point d'intersection de la droite de charge statique et de la caractéristique $I_C = f(V_{CE})$ correspondant à la valeur de I_B imposée par le réseau d'entrée.

Nous pouvons y distinguer trois positions remarquables correspondant à trois fonctionnements particuliers du transistor.

- Le point de fonctionnement se trouve en *A*, dans la partie linéaire et horizontale des caractéristiques. Ce point correspond à un fonctionnement linéaire en *amplification.*
- Le point de fonctionnement se trouve en *S* dans la partie montante des caractéristiques. La tension V_{CE} est alors très faible (de l'ordre de quelques dixièmes de volt). Toute augmentation du courant I_B est pratiquement sans effet sur la valeur de I_C. On dit que le *transistor est saturé.* La tension V_{CE} étant très faible, le transistor se comporte, entre collecteur et émetteur, comme un *interrupteur fermé.* La tension V_{CE} est alors notée $V_{CE\,sat}$.
- Le point de fonctionnement se trouve en *B* (pratiquement sur l'axe des V_{CE}). Le courant I_C est alors très faible. *Le transistor est bloqué.* Il se comporte entre collecteur et émetteur comme un *interrupteur ouvert.*

6. FONCTIONNEMENT DU TRANSISTOR EN COMMUTATION

Les deux derniers régimes de fonctionnement, énoncés au paragraphe précédent, conduisent à utiliser le transistor comme un interrupteur commandé par la courant I_B. On dit alors que le transistor fonctionne en commutation.

6.1. TRANSISTOR SATURÉ

6.1.1. Condition de saturation

Soit I_B la valeur du courant de base fixée par le réseau d'entrée. Idéalisons la caractéristique $I_C = f(V_{CE})$, correspondant à ce courant I_B, comme indiqué à la figure 14.

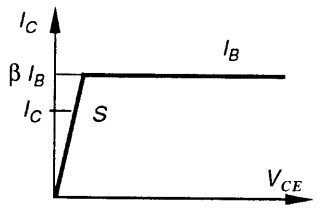


Fig. 14

Pour que le transistor soit saturé, (point de fonctionnement en *S*) il apparaît que son courant de collecteur doit être inférieur à βI_B soit :

$$I_C < \beta I_B$$

Application

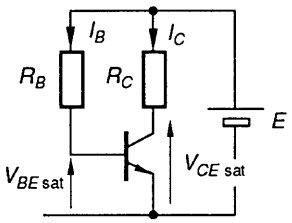


Fig. 15

Calculons les éléments du dispositif de la figure 15 afin d'obtenir la saturation du transistor. Nous supposerons que la tension d'alimentation est très supérieure à 0,6 volt, c'est-à-dire très grande par rapport à $V_{BE\,sat}$ et $V_{CE\,sat}$. A partir des équations :

$$I_B = \frac{E - V_{BE\,sat}}{R_B} \approx \frac{E}{R_B},$$

$$I_C = \frac{E - V_{CE\,sat}}{R_C} \approx \frac{E}{R_C},$$

la condition de saturation s'écrit $\frac{E}{R_B}\beta > \frac{E}{R_C}$ soit : $R_B < \beta R_C$.

Cette condition, devant être réalisée quelque soit le transistor prélevé dans un même lot, doit être vérifiée dans les conditions les plus défavorables, c'est-à-dire pour la plus petite valeur de β annoncée par le constructeur, soit

$$R_B < \beta_{min} R_C$$

6.1.2. État physique du transistor saturé

Considérons le schéma de la figure 12 et le graphe correspondant de la figure 13 et supposons que la saturation soit obtenue, à partir du fonctionnement linéaire (point A), en augmentant le courant I_B. Le point de fonctionnement monte le long de la droite de charge statique en suivant la remontée de la caractéristique correspondant à I_B. Le courant de collecteur $I_C = \beta I_B$ augmente et la tension $V_{CE} = E - R_C I_C$ diminue. Lorsque le point de fonctionnement arrive en S, la tension V_{CE} égale à $V_{CE\,sat}$ ne pouvant diminuer, le courant $I_C = \dfrac{E - V_{CE\,sat}}{R_C} \approx \dfrac{E}{R_C}$ ne peut plus augmenter. Le circuit extérieur refuse d'évacuer le surplus de charges injectées par l'émetteur (c'est en fait le circuit extérieur qui est saturé). A partir de là, toute nouvelle augmentation de I_B ne peut se traduire que par un accroissement de la charge stockée dans la base.

Les valeurs usuelles de $V_{BE\,sat}$ et $V_{CE\,sat}$ sont, pour un transistor à silicium, $V_{BE\,sat} = 0{,}8$ volt et $V_{CE\,sat} = 0{,}2$ volt.

La tension $V_{CB\,sat}$ est donc voisine de $-0{,}6$ volt et la *jonction base-collecteur est polarisée en direct*, ce qui autorise le passage, du collecteur vers la base, de porteurs de même nature que ceux qui, injectés par l'émetteur, diffusent de la base vers le collecteur; ce qui confirme que le courant I_C ne puisse plus augmenter.

6.2. TRANSISTOR BLOQUÉ

Considérons le schéma de la figure 12, sur lequel on ouvre le circuit d'entrée. La condition $I_B = 0$ conduit à $I_C = \beta I_B + I_{C_0E} = I_{C_0E}$.

Ce courant de l'ordre de 100 nA risque, dans certaines applications, d'être trop important pour que l'on puisse considérer le transistor comme un interrupteur ouvert, et d'occasionner des pertes de puissance trop importantes.

En polarisant *la jonction base-émetteur en inverse*, il est possible d'obtenir un faible courant I_B négatif et de ramener ainsi le courant I_C à une valeur voisine de I_{C_0B}, de l'ordre du nanoampère.

6.3. TEMPS DE COMMUTATION

Considérons le schéma de la figure 16, dans lequel la tension e varie suivant le graphe de la figure 17.*a*. Cette tension commande le déblocage du transistor à l'instant $t = 0$ et son blocage à l'instant $t = T_B$.

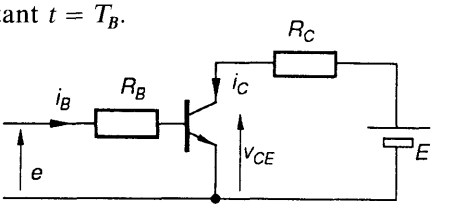


Fig. 16

Les variations correspondantes de i_B et de i_C sont données respectivement aux figures 17.*b* et 17.*c* où I_{B_1} augmente avec E_1, I_{B_2} augmente avec E_2 et $I_{CO} \approx \dfrac{E}{R_C}$.

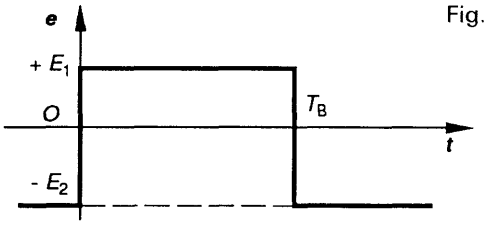


Fig. 17.*a*

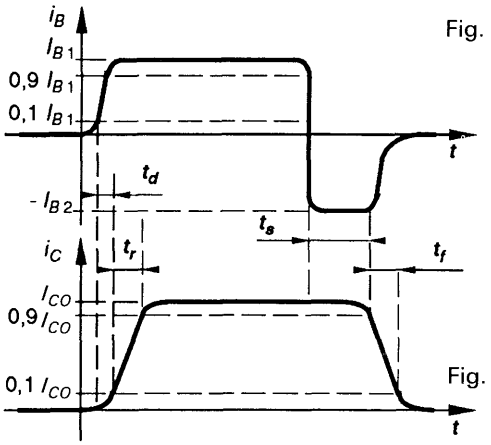


Fig. 17.*b*

Fig. 17.*c*

Nous y distinguons les temps caractéristiques suivants.

6.3.1. Le temps de retard à la croissance t_d

C'est le temps séparant l'instant où le courant i_B est égal à 10 % de sa valeur maximale de l'instant où i_C est égal à 10 % de sa valeur maximale (en

anglais *delay time*). Il correspond essentiellement au temps nécessaire à la zone de transition de la jonction base-émetteur, pour passer de sa structure correspondant à l'état bloqué à sa structure correspondant à l'état passant. Il est donc conditionné par l'apport des charges nécessaires à la diminution de la largeur de la zone de transition base-émetteur.

6.3.2. Le temps de montée t_r

C'est le temps séparant les instants où i_C vaut respectivement 10 % et 90 % de sa valeur maximum (en anglais *rise time*). C'est le temps nécessaire à l'établissement, sur la jonction base-collecteur, du gradient de concentration de charges correspondant au régime de conduction permanent. Il est directement lié à la largeur effective de la base.

Pratiquement le constructeur ne sépare pas t_r et t_d. Il indique $t_{on} = t_d + t_r$ pour des conditions de fonctionnement bien déterminées ainsi que ses variations lorsque un des paramètres (tension, courant ou température) varie.

D'après l'analyse qualitative précédente, nous pouvons déduire que t_{on} *augmente lorsque le rapport* $\frac{I_{CO}}{I_{B_1}}$ *augmente.*

6.3.3. Le temps de stockage t_s

C'est le temps qui sépare l'instant où le courant i_B vaut 90 % de sa valeur maximale, de l'instant où le courant i_C vaut 90 % de sa valeur maximale. La courbe donnant les variations de i_B est analogue à celle qui régit les variations du courant traversant une diode à l'instant du blocage. Nous y distinguons un courant de base négatif ($-I_{B_2}$) qui se prolonge tant que la charge stockée dans la base n'est pas éliminée par le courant de base $-I_{B_2}$ et par le courant de collecteur I_{CO}. La décroissance du courant i_C ne peut commencer que si une part suffisante de cette charge a été évacuée.

Nous avons établi que cette charge stockée est d'autant plus importante que le transistor est plus saturé, nous en déduisons que t_s *augmente lorsque* $\frac{I_{B_1}}{I_{CO}}$ *augmente.* D'autre part, cette charge est évacuée d'autant plus rapidement que I_{B_2} est plus grand : t_s *diminue lorsque* $\frac{I_{B_2}}{I_{B_1}}$ *augmente.*

6.3.4. Le temps de descente t_f

C'est le temps qui sépare les instants où i_C vaut respectivement 90 % et 10 % de sa valeur maximale (en anglais : *fall time*). Il provient du même phénomène que t_s (évacuation des charges stockées). La jonction émetteur-base et la jonction collecteur-base évoluent indépendamment sous l'action du courant base et du courant collecteur.

- Pour les faibles valeurs de I_{B_2}, la jonction collecteur-base se bloque la première.
- Pour les fortes valeurs de I_{B_2}, c'est la jonction base-émetteur qui se bloque la première.

Il existe une valeur optimale de I_{B_2} pour laquelle, les deux jonctions se bloquant simultanément, le temps de descente t_f est minimum. La figure 18 représente l'évolution de t_f en fonction de I_{B_2}.

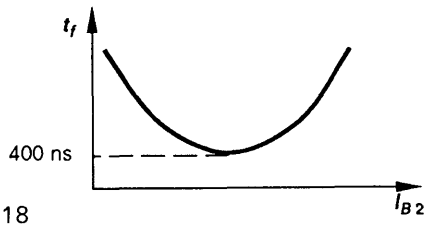


Fig. 18

6.3.5. Amélioration des temps de commutation

Cette amélioration consiste essentiellement à diminuer t_s qui limite la fréquence d'utilisation du transistor et t_f qui, nous le verrons, conditionne les pertes de puissance en commutation.

- Ces deux temps qui dépendent de la charge stockée sont d'autant plus grands que le transistor est plus saturé. Le dispositif de la figure 19 permet de limiter la saturation du transistor.

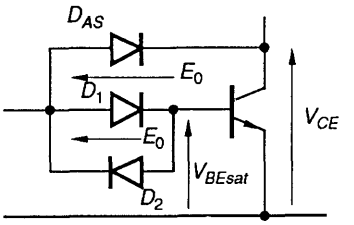


Fig. 19

Lorsque le transistor conduit, la diode D_1 et la diode d'antisaturation D_{AS} conduisent, la tension à leurs bornes restant voisine de leur tension de seuil E_0.

La tension collecteur-émetteur s'écrit :

$$V_{CE} = -E_0 + E_0 + V_{BE\,sat}$$
$$= V_{BE\,sat} \approx 0{,}8 \text{ volt} > V_{CE\,sat} \approx 0{,}2 \text{ volt}.$$

Le transistor n'est donc pas saturé.

En d'autres termes, le surplus de courant I_{B_1}, qui entraînerait la saturation, n'entre pas dans la base du transistor; il est dérivé par la diode D_1 et revient vers la masse par le circuit collecteur-émetteur.

La diode D_2 permet la circulation du courant $i_B = -I_{B_2}$ lors du blocage. Il est à noter que l'accroissement de la tension V_{CE} entraîne une dissipation de puissance dans le transistor pendant la phase de conduction.

• Le dispositif de la figure 20 permet d'accroître la valeur du courant inverse de base, à l'instant du blocage. Pendant la conduction du transistor, la tension e est égale à $+E_1$ et le condensateur se charge sous une tension u peu différente de $E_1\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)$.

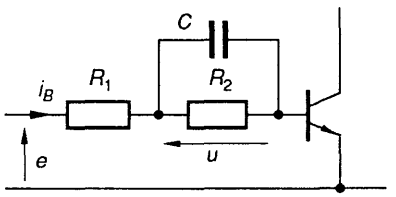


Fig. 20

A l'instant du blocage, la tension e passe à $-E_2$ et le condensateur maintient la tension à ses bornes égale à $E_1\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)$. Le courant i_B prend ainsi la valeur :

$$i_B = \frac{e - V_{BE} - u}{R_1} = -\frac{E_2 + \frac{E_1 R_2}{R_1+R_2} + V_{BE}}{R_1}$$
$$\approx -\left(\frac{E_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{E_1}{R_1}\right),$$

soit $$I_{B_2} \approx \frac{E_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_1}\frac{E_1}{R_1+R_2}$$

I_{B_2} est d'autant plus grand que R_1 est plus faible. Les composants R_1, R_2 et C peuvent être optimisés de telle sorte que les jonctions base-émetteur et base-collecteur se bloquent simultanément, de façon à obtenir la valeur minimale du temps de descente t_f.

6.4. ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE

Considérons le schéma de la figure 21.

L'énergie dissipée, dans la branche collecteur-émetteur, pendant le temps dt est égale à :

$$dW = v_{CE} i_C \, dt.$$

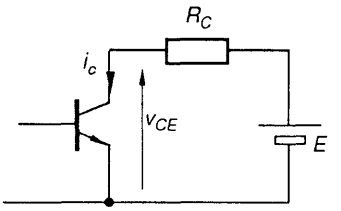


Fig. 21

• Lorsque le transistor est bloqué, le courant de fuite de collecteur, que nous noterons I_f est faible (de l'ordre de 10 nA), la tension v_{CE} est alors peu différente de E. L'énergie dissipée dans la branche collecteur-émetteur pendant le temps T_B s'écrit alors :

$$W_B = E I_f T_B.$$

• Lorsque le transistor est saturé, la tension $v_{CE} = V_{CE\,sat}$ est faible (de l'ordre de 0,2 volt), le courant i_C est alors peu différent de $I_0 = \frac{E}{R_C}$.

L'énergie dissipée dans la branche collecteur-émetteur pendant le temps T_C s'écrit alors :

$$W_C = I_0 V_{CE\,sat} T_C.$$

• Pendant les commutations, la tension v_{CE} et le courant i_C évoluent simultanément, et leurs variations sont fonction des éléments extérieurs. Nous distinguons les cas suivants :

a) Débit sur charge résistive

Considérons le dispositif de la figure 22 dans lequel le courant i_C varie comme l'indique le graphe idéalisé de la figure 23, avec $I_0 = \frac{E}{R_C}$.

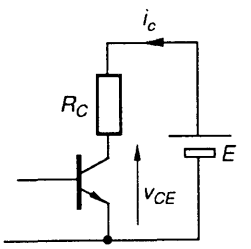


Fig. 22.

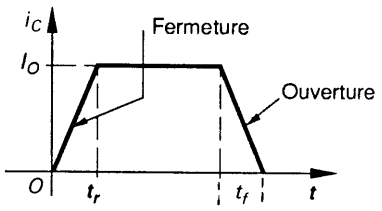


Fig. 23

Lors de la mise en conduction du transistor (fermeture), le courant i_C obéit à l'équation :

$$i_C = I_0 \frac{t}{t_r}.$$

L'expression de la tension v_{CE} est donc :

$$v_{CE} = E - R_C I_0 \frac{t}{t_r} = E\left(1 - \frac{t}{t_r}\right),$$

et l'énergie dissipée pendant la fermeture ($0 < t < t_r$) s'écrit

$$W_f = \int_0^{t_r} v_{CE} i_C \, dt$$

$$= \int_0^{t_r} E\left(1 - \frac{t}{t_r}\right) I_0 \frac{t}{t_r} \, dt,$$

$$W_f = EI_0 \left[\frac{t^2}{2t_r} - \frac{t^3}{3t_r^2}\right]_0^{t_r} = EI_0 \frac{t_r}{6}.$$

On montrerait de manière identique que l'énergie dissipée dans le transistor pendant l'ouverture s'écrit :

$$W_0 = EI_0 \frac{t_f}{6}.$$

b) Débit sur charge inductive avec diode de récupération

Considérons le dispositif de la figure 24.

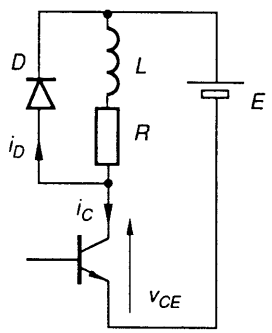


Fig. 24

La diode de récupération D permet, lors de l'ouverture, de réaliser un compromis entre le transistor qui veut interrompre le courant dans le circuit et l'inductance qui ne tolère aucune variation brutale de courant; la diode referme l'excès de courant que prolonge l'inductance. Nous la supposerons parfaite.

Lors de la fermeture, l'inductance freine la montée du courant i_C et les pertes de commutation sont faibles. Nous étudierons la puissance W_0 dissipée dans le transistor au moment de l'ouverture, en faisant les approximations suivantes :

- L'évolution du courant i_C est décrite par la courbe idéalisée de la figure 25.

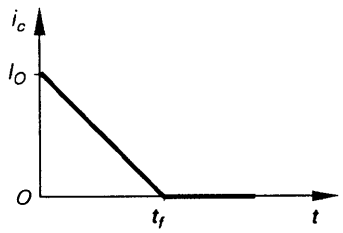


Fig. 25

- L'inductance L est suffisamment grande pour maintenir, pendant la commutation, le courant qui la traverse, constant et égal à I_0.

Pendant la commutation :

- L'expression du courant i_C est donnée par l'équation $i_C = I_0\left(1 - \frac{t}{t_f}\right)$ conformément au graphe de la figure 25.
- La diode étant conductrice, et supposée parfaite, la tension à ses bornes est nulle et la tension v_{CE} s'établit à $v_{CE} = E$.

L'énergie dissipée dans le circuit collecteur-émetteur s'écrit pour $0 < t < t_f$:

$$W_0 = \int_0^{t_f} v_{CE} i_C \, dt$$

$$= \int_0^{t_f} EI_0\left(1 - \frac{t}{t_f}\right) dt = EI_0\left[t - \frac{t^2}{2t_f}\right]_0^{t_f},$$

soit $$\boldsymbol{W_0 = EI_0 \frac{t_f}{2}}.$$

Cette énergie, relativement importante, provient du fait que la tension v_{CE} passe instantanément de $V_{CE\,sat}$ à E. Il apparaît ainsi simultanément dans la branche collecteur-émetteur, une tension et un courant important.

Afin de diminuer l'énergie dissipée à l'ouverture, on limite la vitesse de montée de la tension collecteur-émetteur en plaçant aux bornes du transistor un condensateur qui freine l'évolution de la tension à ses bornes (*fig.* 26).

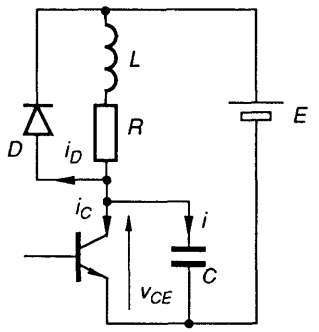


Fig. 26

En conservant les mêmes hypothèses :

• Le courant i_C s'écrit pendant la commutation :

$$i_C = I_0\left(1 - \frac{t}{t_f}\right).$$

• Le condensateur limite la vitesse de variation de la tension v_{CE}; la diode ne pouvant conduire tant que v_{CE} est inférieure à E reste bloquée après l'instant $t = 0$, si bien que la part du courant I_0 que le transistor ne canalise plus est prise par le condensateur et le courant i qui le traverse s'exprime par :

$$i = I_0 - i_C = I_0 - I_0\left(1 - \frac{t}{t_f}\right) = I_0\frac{t}{t_f}.$$

L'évolution de la tension v_{CE} est régie par l'équation différentielle :

$$i = I_0\frac{t}{t_f} = C\frac{\mathrm{d}v_{CE}}{\mathrm{d}t}.$$

Compte tenu de la condition initiale

$$v_{CE}(0^+) = v_{CE}(0^-) = V_{CE\,\mathrm{sat}} \approx 0,$$

la tension v_{CE} s'exprime par $v_{CE} = \dfrac{I_0}{C}\dfrac{t^2}{2t_f}$.

A l'instant $t = t_f$ sa valeur est $v_{CE}(t_f) = \dfrac{I_0 t_f}{2C} = V_0$.

Nous supposerons que le condensateur à une capacité suffisante pour que $V_0 = \dfrac{I_0 t_f}{2C} < E$. Dans ces conditions, la diode reste bloquée pour $0 < t < t_f$.

L'énergie dissipée dans la branche collecteur-émetteur pendant la commutation s'écrit :

$$W_0 = \int_0^{t_f} v_{CE} i_C \,\mathrm{d}t = \int_0^{t_f} \frac{I_0 t^2}{2Ct_f} I_0\left(1 - \frac{t}{t_f}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{I_0^2}{2Ct_f}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4t_f}\right]_0^{t_f},$$

soit $$W_0 = \frac{I_0^2 t_f^2}{24C} = \frac{I_0 V_0 t_f}{12C} < \frac{I_0 E t_f}{12C}.$$

En conséquence, la dissipation d'énergie dans le transistor, au moment de l'ouverture, est au moins 6 fois plus faible qu'en l'absence du condensateur.

REMARQUES

a) *La diode ne conduit pas pendant la phase de commutation mais sa présence est tout de même nécessaire car elle prend le relais du condensateur à l'instant où* $v_{CE} = E$ *(fig. 27).*

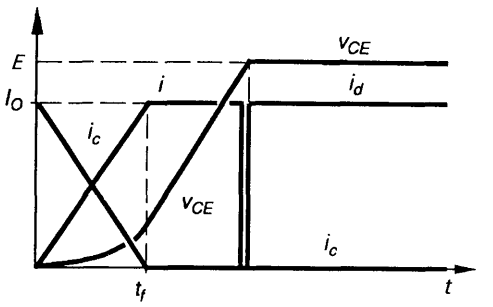


Fig. 27

Remarquons de plus, qu'après l'instant $t = t_f$, *le courant dans le condensateur est constant et égal à* I_0. *La tension* v_{CE} *évolue alors linéairement conformément à* $\dfrac{\mathrm{d}v_{CE}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{I_0}{C}$.

b) *Remarquons qu'au moment de la mise en conduction du transistor, le condensateur C est chargé sous la tension E, ce qui entraîne une importante pointe de courant dans le transistor.*

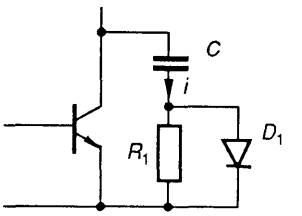


Fig. 28

On limite ce courant en montant en série avec le condensateur une résistance R_1 *shuntée par une diode* D_1 *(fig. 28) :*

— lors du blocage le courant i dans le condensateur est positif et la diode D_1, *supposée parfaite court-circuite la résistance* R_1 ;

— lors de la mise en conduction le courant i de décharge du condensateur est négatif, la diode D_1 *étant bloquée, la résistance* R_1 *limite la pointe de courant ; la constante de temps* $R_1 C$ *doit être telle que le condensateur soit complètement déchargé à la fin de la fermeture.*

6.5. LIMITATIONS

6.5.1. Limitation en température

La température maximale de jonction est de 175°C pour le silicium. Compte tenu de la température ambiante et des conditions de refroidissement, elle limite la puissance dissipable dans le transistor. Supposons que la commande de base soit telle qu'en régime de conduction la tension V_{CE} soit négligeable et qu'il en soit de même pour le courant résiduel I_f en régime de blocage.

La puissance dissipée dans le transistor apparaît alors aux instants de commutation. Soient W_0 l'énergie dissipée au cours de l'ouverture, et W_f l'énergie dissipée pendant la fermeture. La puissance moyenne sur une période est donc :

$$P = \frac{W_0 + W_f}{T} = f(W_0 + W_f),$$

d'autant plus importante que la fréquence d'utilisation est plus élevée.

6.5.2. Limitation en courant

Pendant la phase de saturation, les courants I_C et I_B doivent rester inférieurs à une valeur maximale précisée par le constructeur.

6.5.3. Limitation en tension

Pendant la phase de blocage, afin d'éviter le phénomène d'avalanche sur les jonctions base-émetteur et base-collecteur, le constructeur indique :

- la valeur maximum de la tension inverse applicable à la jonction base-émetteur : $V_{BE\,\mathrm{invmax}}$;
- la valeur maximum de la tension collecteur-émetteur : $V_{CE\,\mathrm{max}}$.

6.5.4. Aire de sécurité

Pendant les commutations, la tension v_{CE} et le courant i_C peuvent prendre fugitivement des valeurs très importantes, compte tenu des éléments extérieurs au transistor. Le constructeur indique, dans les axes $i_C = f(v_{CE})$, (*fig.* 29) une aire de sécurité, hors de laquelle le point de fonctionnement ne peut sortir que pendant un temps limité.

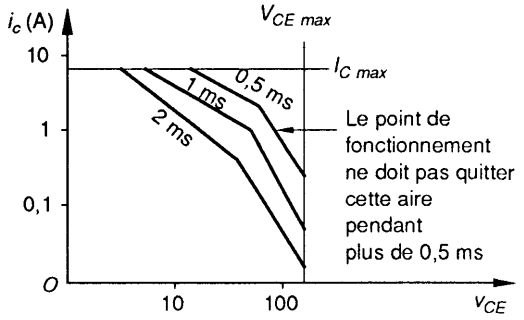


Fig. 29

Traçons, à titre d'exemple, le trajet du point de fonctionnement (*fig.* 30) lors de l'ouverture du transistor fonctionnant sur charge inductive.

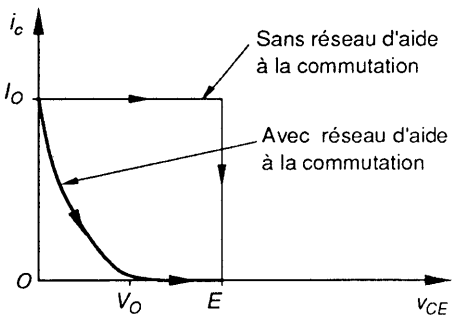


Fig. 30

En l'absence de réseau d'aide à la commutation (*fig.* 24), la tension v_{CE} passe instantanément de 0 à E, le point de fonctionnement décrivant une horizontale d'ordonnée I_0; puis le courant i_C décroît, la tension v_{CE} restant constante et égale à E.

Le point de fonctionnement décrit alors une verticale d'équation $v_{CE} = E$.

En présence du réseau d'aide à la commutation (*fig.* 26), la courbe décrite par le point de fonctionnement est donnée par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} i_C = I_0\left(1 - \dfrac{t}{t_f}\right) \\ v_{CE} = \dfrac{I_0}{C}\dfrac{t^2}{2t_f} \end{cases}$$

soit $$v_{CE} = \frac{I_0 t_f}{2C}\left(1 - \frac{i_C}{I_0}\right)^2 = V_0\left(1 - \frac{i_C}{I_0}\right)^2.$$

Puis lorsque le courant i_C s'annule, il décrit l'axe des v_{CE} de V_0 jusqu'à E. Le réseau d'aide à la commutation éloigne le point de fonctionnement des limites de l'aire de sécurité et autorise ainsi le transistor à couper des courants d'intensité plus élevée.

7. FONCTIONNEMENT DU TRANSISTOR EN AMPLIFICATION

7.1. AMPLIFICATEUR LINÉAIRE

Un amplificateur est décrit par le schéma de la figure 31.

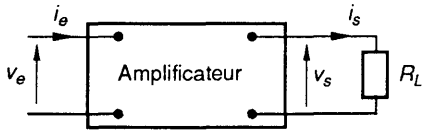


Fig. 31

C'est un quadripôle, attaqué par le signal d'entrée (v_e ou i_e) et fournissant, à une charge R_L, un signal de sortie (v_s ou i_s).

Un amplificateur linéaire doit posséder les propriétés suivantes :

- La forme du signal de sortie doit être identique à celle du signal d'entrée (*fig.* 32).

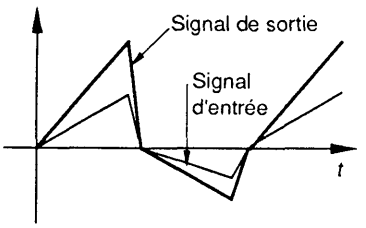


Fig. 32

- La puissance fournie à la charge par le signal de sortie doit être supérieure à la puissance fournie à l'amplificateur par le signal d'entrée.

Un amplificateur peut être caractérisé par :

- Sa résistance d'entrée R_e : c'est la résistance qu'il présente au signal d'entrée.
- Son générateur de Thévenin équivalent en sortie : il comprend le générateur de tension $A_0 v_e$ et la résistance R_S (*fig.* 33) :
  - A_0 est l'amplification de tension à vide;
  - R_S est la résistance de sortie.

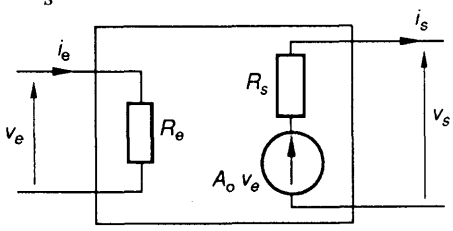


Fig. 33

Supposons que l'amplificateur contienne un transistor; ses grandeurs électriques i_B, i_C, v_{CE}, v_{BE} varient au rythme du signal d'entrée et le point de fonctionnement se déplace sur les caractéristiques. Lorsque le signal d'entrée est nul, ces grandeurs électriques prennent les valeurs I_B, I_C, V_{CE}, V_{BE} appelées *valeurs de polarisation*, la position alors occupée par le point de fonctionnement est appelée *point de repos.*

Suivant la position du point de repos, on distingue les régimes de fonctionnement ci-après.

7.2. AMPLIFICATION EN CLASSE A

Un transistor fonctionne en classe A s'il n'est jamais bloqué ni saturé.

7.2.1. Polarisation

Une source de tension continue fixe les grandeurs de polarisation I_B, I_C, V_{CE}, V_{BE} et impose ainsi la position du point de repos sur les caractéristiques.

Le montage de base est donné figure 34.

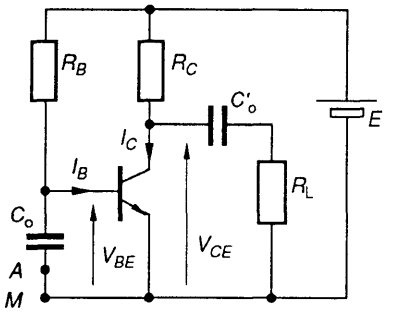


Fig. 34

Après une période transitoire pendant laquelle ils se chargent respectivement sous la tension V_{BE} et V_{CE}, les condensateurs C_0 et C'_0 ne laissent plus passer le courant continu.

R_L est la charge destinée à recevoir ultérieurement le signal (v_s, i_s).

Nous disposons, pour la détermination de I_B et V_{BE} des équations suivantes :

$$\begin{cases} E = R_B I_B + V_{BE} \\ V_{BE} = f(I_B) \end{cases}$$

caractéristique du transistor, indépendante de V_{CE}.

En pratique, la jonction émetteur-base étant polarisée en direct, la tension V_{BE} reste voisine de 0,6 volt pour un transistor au silicium et avec une bonne approximation on peut écrire

$$V_{BE} \approx 0{,}6 \text{ volt}, \quad I_B \approx \frac{E - 0{,}6 \text{ volt}}{R_B}.$$

Pour la détermination de I_C et V_{CE}, nous disposons des équations suivantes :

$$\begin{cases} E = R_C I_C + V_{CE} \\ I_C = f(V_{CE}) \end{cases}$$

caractéristique du transistor à

$$I_B = \frac{E - 0{,}6 \text{ volt}}{R_B}.$$

La résolution conduit au graphe de la figure 35; la droite d'équation $E = R_C I_C + V_{CE}$ est la droite de charge statique.

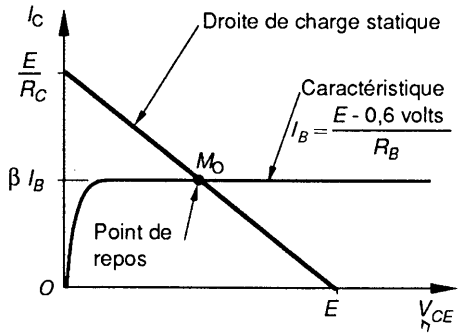


Fig. 35

En pratique $I_C \approx \beta I_B$, soit :

$$I_C = \beta \frac{E - 0{,}6 \text{ volt}}{R_B}, \quad V_{CE} = E - (E - 0{,}6)\frac{\beta R_C}{R_B}.$$

7.2.2. Attaque de l'amplificateur par un signal d'entrée

Déconnectons les points A et M de la figure 34 afin d'y intercaler un générateur de signal qui impose aux grandeurs électriques des petites variations autour de leur valeur de repos.

a) *Remarque préliminaire*

La variation de tension aux bornes d'une source de tension constante étant nulle, nous pouvons conclure qu'une source de tension constante se comporte comme un court-circuit vis-à-vis des petites variations.

Nous établirions de la même manière qu'une source de courant constant se comporte comme un circuit ouvert vis-à-vis des petites variations.

Soient i_b, i_c, v_{ce}, v_{be} les petites variations des grandeurs électriques. Les capacités C_0 et C'_0 sont suffisamment élevées pour que, compte tenu de la vitesse de variation du signal d'entrée, la tension aux bornes des condensateurs reste sensiblement constante. Les condensateurs se comportent alors comme des courts-circuits vis-à-vis des petites variations ce qui conduit, pour i_b, i_c, v_{be}, v_{ce}, au schéma équivalent de la figure 36.

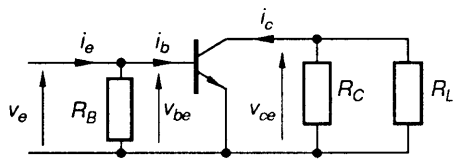


Fig. 36

b) *Attaque par un générateur de tension*

Le schéma correspondant à une telle attaque est donné à la figure 37.

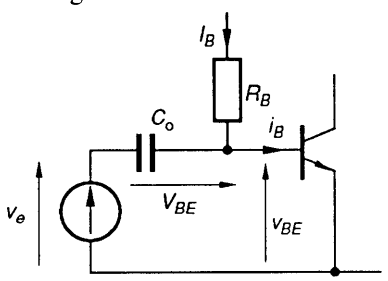


Fig. 37

La valeur instantanée de la tension base-émetteur résulte de la tension V_{BE} aux bornes du condensateur C_0 et de la tension v_e imposée par le générateur d'attaque soit : $v_{BE} = V_{BE} + v_e$.

Nous avons établi au paragraphe 4.3 que la valeur instantanée i_B du courant de base est donnée par :

$$i_B = I_{BS}\, e^{\frac{v_{BE}}{V_T}}$$

(où V_T est de l'ordre de 30 mV à 25 °C),

soit :

$$i_B = I_{BS}\, e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} \cdot e^{\frac{v_e}{V_T}} = I_B\, e^{\frac{v_e}{V_T}},$$

ou $I_B = I_{BS}\, e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}$ est le courant de polarisation de base.

Un développement en série de l'exponentielle conduit à :

$$i_B = I_B\left[1 + \frac{v_e}{V_T} + \frac{1}{2}\left(\frac{v_e}{V_T}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{v_e}{V_T}\right)^3 + \ldots\right].$$

Les petites variations i_b du courant de base s'expriment donc par :

$$i_b = I_B\left[\frac{v_e}{V_T} + \frac{1}{2}\left(\frac{v_e}{V_T}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{v_e}{V_T}\right)^3 + \ldots\right].$$

La relation entre i_b et v_e n'est donc pas linéaire et le courant i_b ne reproduit pas la forme du signal d'attaque v_e. Il en est donc de même pour les petites variations $i_c = \beta i_b$ et $v_{ce} = -\dfrac{R_C R_L}{R_C + R_L} i_c$ (voir *fig.* 36).

La forme de la tension aux bornes de la charge étant différente de celle du générateur d'attaque, on dit qu'il y a *distorsion.*

REMARQUE

Dans le cas où le signal d'attaque v_e est très inférieur à $V_T = 30$ mV, on peut limiter le développement précédent au premier ordre et écrire :

$$i_b = I_B \frac{v_e}{V_T}.$$

La relation entre i_b et v_e est alors linéaire et i_b à la même forme que v_e, il en est donc de même de $i_c = \beta i_b$ et de $v_{ce} = -\dfrac{R_C R_L}{R_C + R_L} i_c$.

Remarquons que le transistor présente aux petites variations i_b et v_e (fig. 36) la résistance

$$\frac{v_e}{i_b} = \frac{V_T}{I_B} = \frac{30 \text{ mV}}{I_B}.$$

En conclusion l'attaque d'un transistor à jonctions par un générateur de tension conduit à une distorsion du signal sauf si ce signal est suffisamment faible pour que la portion de caractéristique d'entrée,

$$I_B = f(V_{BE}) = I_{BS}\, e^{\frac{V_{BE}}{V_T}},$$

décrite par le point de fonctionnement puisse être assimilée à une droite.

c) *Attaque par un générateur de courant*

Le schéma équivalent pour les petits signaux est donné à la figure 38.

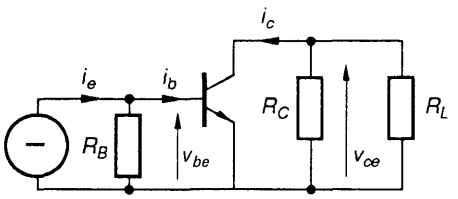


Fig. 38.

Nous venons d'établir que le transistor présente aux petites variations i_b et v_{be} la résistance $\dfrac{v_{be}}{i_b} = \dfrac{30 \text{ mV}}{I_B}$.

D'après l'étude de polarisation, la résistance R_B est donnée par : $R_B = \dfrac{E - 0{,}6 \text{ volt}}{I_B}$.

La tension de polarisation E étant de l'ordre d'une dizaine de volts, $E - 0{,}6$ volt est très grand par rapport à 30 mV. La résistance R_B est donc très grande par rapport à la résistance d'entrée du transistor et nous pouvons négliger son influence.

La forme du courant i_b de base est donc identique à celle du signal délivré par le générateur de courant i_e et la tension $v_{ce} = -\beta \dfrac{R_C R_L}{R_C + R_L} i_e$ reproduit sans distorsion la forme du signal d'entrée i_e.

L'attaque du transistor par un générateur de courant ne fait pas apparaître de distorsion.

REMARQUE

Pour les forts signaux, la tension v_{BE} est distordue; cet inconvénient est sans conséquences puisque cette tension n'intervient pas dans la relation entre i_e et v_{ce}.

7.2.3. Étude énergétique

Afin d'analyser l'évolution du point de fonctionnement autour du point de repos M_0, traçons, dans le système d'axes i_C, v_{CE}, un autre système d'axes i_c, v_{ce}, centré en M_0, dans lequel sont repérées les petites variations (*fig.* 39).

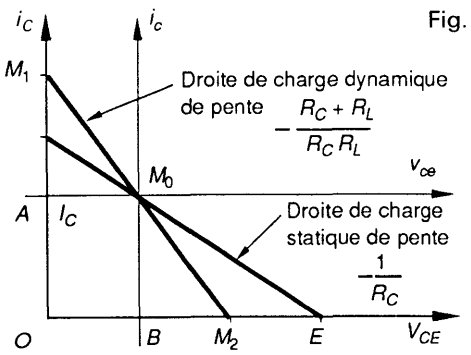


Fig. 39

La relation $v_{ce} = -\dfrac{R_C R_L}{R_C + R_L} i_c$ est décrite, dans ce système d'axes, par une droite passant par M_0, appelée droite de charge dynamique. Sa pente $\left(-\dfrac{R_C + R_L}{R_C R_L}\right)$ étant plus négative que celle de la

droite de charge statique $\left(-\frac{1}{R_C}\right)$, elle coupe l'axe des v_{CE} en un point M_2 d'abscisse inférieure à E.

Nous supposerons dans cette étude que :

- Tout le quadrant i_C, v_{CE} est descriptible par le point de fonctionnement en régime linéaire, c'est-à-dire que nous négligerons les valeurs de $V_{CE\,sat}$ et I_{C_0E}.
- Le transistor est attaqué par un générateur de courant sinusoïdal, en conséquence de quoi les grandeurs i_c et v_{ce} sont sinusoïdales.

Si le but du dispositif est d'obtenir un maximum de puissance utile dans la charge, l'excursion étant symétrique autour du point de repos M_0, il faut que le point M_0 soit le milieu du segment M_1M_2 découpé sur la droite de *charge dynamique* par les axes i_C, v_{CE}. Dans ces conditions nous avons :

$OB = BM_2 = V_{CE}$, tension collecteur-émetteur de polarisation,

$OA = AM_1 = I_C$, courant de collecteur de polarisation.

Les valeurs instantanées de v_{CE} et i_C s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} v_{CE} = V_{CE} + v_{ce} \\ i_C = I_C + i_c \end{cases}$$

avec $v_{ce} = V_{CEM} \cos \omega t$

et $i_c = -\frac{R_C + R_L}{R_C \cdot R_L} V_{CEM} \cos \omega t = -I_{CM} \cos \omega t$,

où V_{CEM} et I_{CM} liés par la relation

$$\frac{R_C + R_L}{R_C R_L} V_{CEM} = I_{CM},$$

sont respectivement les valeurs maximales des variations sinusoïdales v_{ce} et i_c.

Dans le cas d'une excursion maximale,

$$V_{CEM} = BM_2 = OB = V_{CE} < \frac{E}{2}.$$

a) Puissance fournie par le générateur de tension continue E

Cette puissance P_E s'exprime par :

$$P_E = \frac{1}{T}\int_0^T Ei'_C \, dt \qquad \left(\text{avec } T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T E(I_C - I'_{CM} \cos \omega t)\, dt = EI_C.$$

b) Puissance fournie à la charge R_L

Cette puissance P_u s'exprime par :

$$P_u = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{v_{ce}^2}{R_L} dt \qquad \left(\text{avec } T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_{CEM}^2}{R_L} \cos^2 \omega t \, dt = \frac{V_{CEM}^2}{2R_L}.$$

Sachant que $\frac{R_C R_L}{R_C + R_L} < R_L$, nous déduisons

$$\frac{V_{CEM}^2}{2R_L} < \frac{V_{CEM}^2(R_C + R_L)}{2R_C R_L} = \frac{V_{CEM} I_{CM}}{2}.$$

Dans le cas où l'excursion est maximale :

$V_{CEM} = V_{CE}$ et $I_{CM} = I_C$, soit :

$$P_u < \frac{V_{CE} I_C}{2} < \frac{EI_C}{4}.$$

c) Rendement

On définit le rendement par le rapport entre la puissance utile et la puissance fournie par la source de tension continue : $\eta = \frac{P_u}{P_E}$.

La puissance $P_E = EI_C$ est indépendante de la puissance utile P_u fournie à la charge. La puissance P_u étant inférieure à $\frac{EI_C}{4}$, le rendement ne peut dépasser 25 %.

d) Puissance dissipée dans le transistor entre collecteur et émetteur

Cette puissance P_d est donnée par :

$$P_d = \frac{1}{T}\int_0^T v_{CE} i_C \, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T (V_{CE} + V_{CEM} \cos \omega t)(I_C - I_{CM} \cos \omega t)\, dt$$

$$= V_{CE} I_C - \frac{V_{CEM} I_{CM}}{2}.$$

Cette puissance est maximale et vaut

$$P_{d\,max} = V_{CE} I_C,$$

dans le cas où V_{CEM} est nul, c'est-à-dire lorsque la charge ne reçoit aucun signal.

Sachant que la puissance utile est inférieure à $\frac{V_{CE} I_C}{2}$, nous retiendrons que le transistor doit être capable de dissiper une puissance au moins deux fois plus élevée que la puissance maximale fournie à la charge.

e) Bilan de l'étude énergétique

Si le but recherché est de fournir un maximum de puissance à la charge R_L, l'amplificateur fonctionnant en classe A est mal adapté; en effet :

– le rendement est faible : il ne peut être supérieur à 25 %;

– le générateur de tension continu fournit une puissance importante, et ce, même si la charge ne reçoit aucun signal;

– le transistor doit être capable de dissiper une puissance plus de deux fois supérieure à la puissance utile reçue par la charge.

Par contre un tel dispositif peut être utilisé si le but recherché est un fort gain en tension ou en courant sans chercher à fournir une puissance importante à l'étage suivant.

7.2.4. Stabilisation du point de repos

Considérons le schéma de polarisation de la figure 34, dans lequel le courant I_C est donné par $I_C = \beta I_B + I_{COE}$ et analysons les perturbations susceptibles de le faire varier.

a) Influence de la température

Supposons, par exemple que la température passe de 25 °C à 175 °C.

• Le courant inverse de la jonction base-collecteur double tous les 7 °C environ. S'il n'y avait pas d'impuretés à la surface de la jonction base-collecteur, le courant I_{COE} passerait de 1 nA à 25 °C à 3 300 nA à 175 °C. En fait à 25 °C, ce courant est masqué par le courant de fuite dû aux impuretés (il est alors de l'ordre de 100 nA). Pour une variation de température de 25 °C à 175 °C, le courant I_{CoE} augmente donc d'environ $\Delta I_{C_1} = 3$ µA.

• La tension base-émetteur diminue d'environ 2,2 mV par °C. Pour un transistor au silicium elle passe de 0,6 volt à 25 °C à 0,225 volt à 175 °C, soit une variation $\Delta V_{BE} = -0{,}375$ volt. Sachant que le courant I_B est donné par $I_B = \dfrac{E - V_{BE}}{R_B}$, il en résulte une variation de I_B de

$$\Delta I_B = -\frac{\Delta V_{BE}}{R_B} = -\frac{\Delta V_{BE}}{E - V_{BE}} I_B,$$

et une variation de I_C de $\Delta I_{C_2} = -\beta \dfrac{\Delta V_{BE}}{E - V_{BE}} I_B$.

• Le gain en courant β augmente. En effet, l'agitation thermique accroît le nombre de paires électron-trou dans la base, rendant moins probable les recombinaisons et provoquant ainsi un accroissement de α donc de β. Typiquement, pour un transistor au silicium, β passe de 55 à 25 °C à 100 à 175 °C. La variation correspondante de I_C est donc de $\Delta I_{C_3} = 45 I_B$.

Ordres de grandeur

La tension d'alimentation continue E étant de l'ordre d'une dizaine de volts, $-\beta \dfrac{\Delta V_{BE}}{E - V_{BE}}$ est de l'ordre de $55 \times \dfrac{0{,}375}{10} = 1{,}88$, très petit par rapport à 45. Les variations de la tension base-émetteur ont donc une influence négligeable par rapport aux variations de β.

Le courant I_C étant de l'ordre de 10 mA, le courant I_B est de l'ordre de 100 µA et ΔI_{C_3} de l'ordre de 4,5 mA est très grand par rapport à $\Delta I_{C_1} = 3$ µA. Ainsi, pour le dispositif étudié, ce sont les variations de β qui ont la plus forte influence (ce n'est pas toujours le cas).

b) Dispersion des caractéristiques

Nous avons vu qu'il était difficile pour le constructeur de garantir la valeur de β avec précision. Ainsi, dans un même lot, il n'est pas rare de rencontrer des transistors dont le gain β varie du simple au double, provoquant lors du remplacement d'un transistor un effet identique à celui provoqué par une élévation de température.

Conséquences

Revenons au graphe de la figure 39, sur lequel le point de fonctionnement se déplace autour du point de repos M_0 sur la droite de charge dynamique. Par suite d'une variation de température ou du remplacement du transistor, le point de repos se déplace sur la droite de charge statique entraînant avec lui les axes i_c et v_{ce} ainsi que la droite de charge dynamique. Il apparaît ainsi un risque de voir le point de fonctionnement aller en butée sur l'axe des i_C ou sur l'axe des v_{CE}. Il est donc nécessaire d'améliorer le montage de base de façon à stabiliser la position du point de repos M_0.

Conformément aux valeurs numériques de notre exemple, nous étudierons l'influence des variations de β sur le courant de collecteur I_C et nous chiffrerons la stabilisation par le facteur de stabilisation $S_\beta = I_B\left(\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}I_C}\right)$ où $\mathrm{d}I_C$ est la variation de I_C résultant de la variation $\mathrm{d}\beta$ de β.

Pour le montage de base, I_B est fixé indépendamment de β par

$$I_B = \frac{E - V_{BE}}{R_B} \quad \text{et} \quad dI_C = d\beta I_B,$$

soit $S = 1$.

c) *Stabilisation par résistance d'émetteur*

Un accroissement du gain β, provenant d'une élévation de température ou d'un changement de transistor, provoque un déplacement d'ensemble, vers le haut, des caractéristiques $I_C = f(V_{CE})$ à $I_B = \text{Cte}$, entraînant la montée du point de repos sur la droite de charge statique. Afin de ramener ce point de repos vers sa position initiale le dispositif doit réagir à une augmentation de β, par une diminution de I_B, ainsi la position du point de repos est stabilisée à la manière d'un piéton qui descendant les marches d'un escalier roulant, ascendant, reste sensiblement à la même place.

Considérons dès lors le schéma partiel de la figure 40.

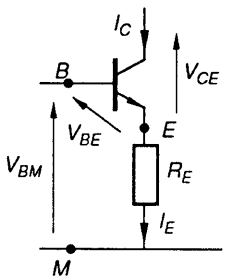


Fig. 40

Maintenir le courant I_C constant constitue une condition suffisante pour stabiliser le point de repos.

Le courant d'émetteur étant sensiblement égal à I_C, il vient $I_C = \frac{V_{BM} - V_{BE}}{R_E} \approx \frac{V_{BM} - 0{,}6}{R_E}$.

La stabilisation du point de repos peut donc être obtenue en maintenant la tension V_{BM} constante. Or un dispositif dans lequel la tension V_{BM} est constante est inutilisable. Si l'on considère en effet l'attaque de la base par un signal, toute tension constante se comportant, vis-à-vis des petites variations comme un court-circuit, le signal voit les points B et M en court-circuit, et le transistor est alors inefficient. Il faut donc réaliser un compromis entre la stabilisation du point de repos et l'attaque du transistor par un signal; ce qui conduit au schéma de la figure 41.

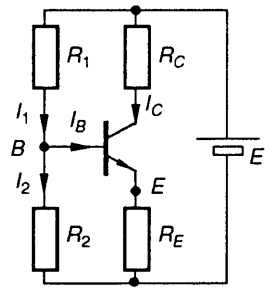


Fig. 41

Si les courants I_1 et I_2 sont grands par rapport au courant de base I_B, le potentiel du point B est indépendant de I_B. Si, par suite d'une perturbation, le courant I_C augmente, le potentiel du point E augmente entraînant une diminution de la tension V_{BE}. Le courant I_B diminue ce qui est bien le but recherché dans la stabilisation.

Par le calcul :

$$\begin{cases} I_C = \beta I_B \\ E = R_1 I_1 + R_2 I_2 = (R_1 + R_2) I_2 + R_1 I_B \\ R_2 I_2 = V_{BE} + R_E I_C \end{cases}$$

d'où il vient :

$$I_B = \frac{E - \dfrac{R_1 + R_2}{R_2} V_{BE}}{R_1 + \beta R_E \dfrac{R_1 + R_2}{R_2}},$$

$$I_C = \beta I_B = \frac{E - \dfrac{R_1 + R_2}{R_2} V_{BE}}{\dfrac{R_1}{\beta} + R_E \dfrac{R_1 + R_2}{R_2}},$$

$$\frac{dI_C}{d\beta} = \left(E - \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{BE}\right) \times \frac{R_1}{\left(R_1 + \beta R_E \dfrac{R_1 + R_2}{R_2}\right)^2}.$$

Le facteur de stabilisation S_β s'établit donc à $S_\beta = 1 + \beta \frac{R_E}{R_B}$, avec $R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Il est d'autant plus élevé que βR_E est grand par rapport à R_B. Cependant on ne peut pas diminuer R_B exagérément sinon le transistor ne serait plus alimenté par le signal.

7.3. AMPLIFICATEUR EN CLASSE B

Un transistor fonctionne en classe B si son point de repos dans le plan $i_C = f(v_{CE})$ se trouve sur l'axe des v_{CE}. L'excursion du point de fonctionnement autour du point de repos étant symétrique, il apparaît qu'un transistor ne peut à lui seul recopier la forme du signal. La figure 42 donne le schéma de base d'un amplificateur en classe B, utilisant deux transistors complémentaires (T_1 de type N-P-N, T_2 de type P-N-P). Ce dispositif est alimenté symétriquement par deux sources de tension constante E.

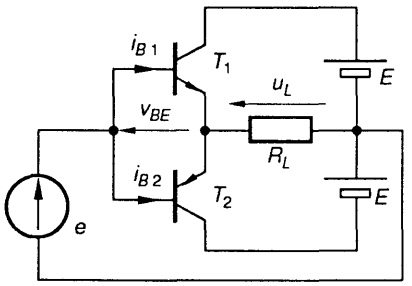


Fig. 42

Le signal d'attaque est constitué par un générateur de tension e que nous supposons sinusoïdale, d'expression $e = E_M \cos \omega t$ (*fig.* 43).

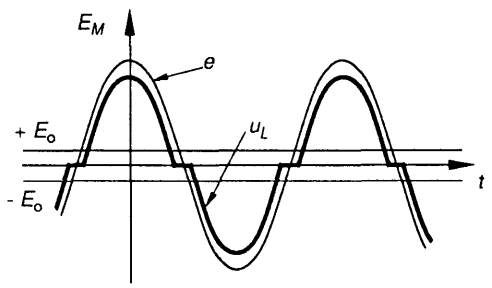


Fig. 43

Afin de déterminer l'évolution de la tension u_L, aux bornes de la charge R_L, nous idéaliserons les caractéristiques $i_B = f(v_{BE})$ des deux transistors conformément au graphe de la figure 44.

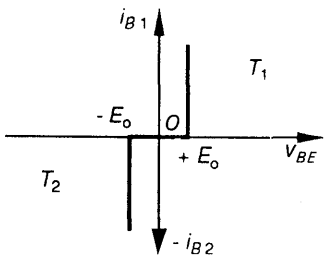


Fig. 44

- Le transistor T_1 est bloqué tant que la tension v_{BE} est inférieure à E_0 et, lorsqu'il conduit, la tension v_{BE} est sensiblement constante et égale à E_0.
- Le transistor T_2 est bloqué tant que v_{BE} est supérieure à $-E_0$ et, lorsqu'il conduit, la tension v_{BE} est sensiblement constante et égale à $-E_0$.

Compte tenu de $e = v_{BE} + u_L$ nous obtenons (*fig.* 43) les variations de u_L.

Nous y remarquons que, lorsque la tension e est comprise entre $-E_0$ et $+E_0$, aucun transistor ne conduit et la tension u_L est nulle.

En conséquence, la forme de la tension u_L aux bornes de la charge est différente de celle du signal e. Le défaut correspondant est appelé *distorsion de croisement* ou *distorsion à faible niveau* car il est d'autant plus sensible que E_M est plus faible.

7.3.1. Suppression de la distorsion de croisement

Pour supprimer la distorsion de croisement, il faut modifier le dispositif de telle sorte que le transistor T_1 conduise dès que la tension e est positive et que le transistor T_2 conduise dès que la tension e est négative.

a) Suppression par polarisation de la base

Complétons le schéma de base de la figure 42 conformément au schéma de la figure 45. Les diodes D_1 et D_2 sont choisies et les résistances R_1 et R_2 ajustées de telle sorte qu'en l'absence de signal :

- le potentiel du point A soit égal à celui du point B;
- la tension u_1 soit égale à E_0;
- la tension u_2 soit égale à $-E_0$.

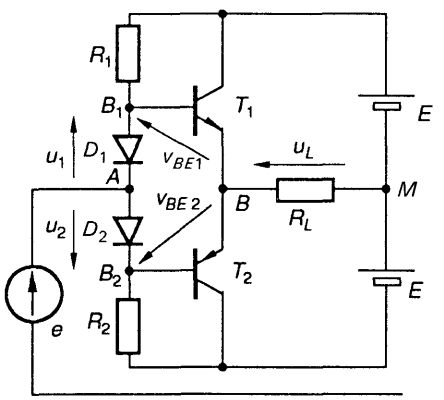


Fig. 45

Dans ces conditions, lorsque $u_L = 0$,

$$v_{BE_1} = u_1 + e = E_0 + e.$$

Dès que la tension e est positive, la tension v_{BE_1} devient supérieure à E_0 et le transistor T_1 conduit. De même, $v_{BE_2} = u_2 + e = -E_0 + e$. Dès que la tension e est négative, v_{BE_2} devient inférieure à $-E_0$ et le transistor T_2 conduit. La distorsion de croisement est ainsi éliminée.

REMARQUES

- *Si, par suite d'un mauvais choix de composants, la tension $u_1 - u_2$ devient supérieure à $2E_0$, il apparaît un très fort courant de base (fig. 44) dans l'un au moins des transistors; ceci peut aller jusqu'au cas le plus défavorable où les deux transistors sont simultanément saturés entraînant un court-circuit sur les deux alimentations continues $+E$ et $-E$.*
- *La tension interbases $v_{B_1B_2}$ est égale à $v_{B_1B_2} = v_{BE_1} - v_{BE_2} \approx 2E_0$. Supposons que la polarisation impose une tension $v_{B_1B_2}$ constante. Une élévation de température provoquant une diminution de la tension de seuil E_0 de 2,2 mV par °C, fait apparaître un fort courant de base sur les transistors, conduisant à un fort courant de collecteur. La dissipation thermique qui en résulte provoque une nouvelle élévation de température, etc. C'est l'*emballement thermique *pouvant aller jusqu'à la destruction des transistors.*

  La polarisation à l'aide des diodes D_1 et D_2 présente l'avantage suivant : lorsque la température augmente la tension $u_1 - u_2$ aux bornes des diodes diminue de la même quantité que la somme $2E_0$ des tensions de seuil, évitant ainsi le phénomène d'emballement thermique.

  Le dispositif peut être complété par deux petites résistances r_E (de quelques dizièmes d'ohms à quelques ohms) montées en série avec les émetteurs qui, faisant apparaître une chute de tension ohmique $r_E(i_{C_1} - i_{C_2})$ s'ajoutant à $2E_0$, limitent l'accroissement des courants de base.
- *Dans le cas idéal :*

$$e = -u_1 + v_{BE_1} + u_L = u_L, \quad \text{lorsque } T_1 \text{ conduit,}$$
$$e = -u_2 + v_{BE_2} + u_L = u_L, \quad \text{lorsque } T_2 \text{ conduit.}$$

Par l'intermédiaire, alternativement, de T_1 et de T_2, la tension u_L recopie la tension e du générateur de signal mais le courant qui parcourt la charge est fourni, non pas par le signal mais par les sources de tension continues E. Il est ainsi possible d'obtenir une forte puissance dans la charge R_L. Un tel dispositif est aussi appelé « Push-Pull », *soit « pousse tire ». Cette dénomination fait allusion au potentiel du point B (fig. 45) qui, suivant l'évolution du signal, comprime et étire alternativement les potentiels collecteur-émetteur des transistors T_1 et T_2.*

b) Suppression à l'aide d'un amplificateur de fort gain en tension

Considérons le dispositif de la figure 46, dans lequel A est un amplificateur qui possède les caractéristiques suivantes :

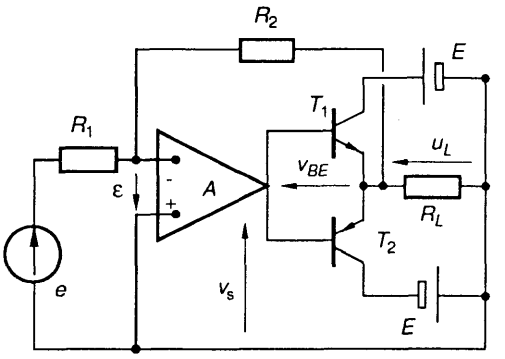


Fig. 46

- résistance d'entrée infinie : aucun courant ne circule vers les entrées + et −;
- résistance de sortie nulle;
- fort gain en tension : $v_s = \mu\varepsilon$, avec $\mu \gg 1$.

A partir des équations :

$$\begin{cases} \dfrac{e+\varepsilon}{R_1} = -\dfrac{\varepsilon + u_L}{R_2} \\ v_s = u_L + v_{BE} \\ v_s = \mu\varepsilon \end{cases}$$

il vient par élimination de ε et v_s,

$$v_{BE} = -\mu e \frac{R_2}{R_1 + R_2} - u_L\left(1 + \frac{\mu R_1}{R_1 + R_2}\right).$$

Ordre de grandeur : $R_1 = R_2 = 10\ \text{k}\Omega$, $\mu = 10^4$; l'équation précédente devient :

$$v_{BE} = -10^4\frac{e}{2} - u_L\left[1 + \frac{10^4}{2}\right] \approx -\frac{10^4}{2}(e + u_L).$$

Le transistor T_1 entre en conduction dès que la tension v_{BE} est égale à la tension de seuil E_0, c'est-à-dire dès que la tension e devient inférieure à $-\dfrac{2E_0}{10^4} = \dfrac{-E_0}{5\,000}$. De la même manière, le transistor T_2 entre en conduction dès que la tension e devient supérieure à $\dfrac{E_0}{5\,000}$. Cette valeur étant de l'ordre de 0,1 millivolt, on supprime ainsi le « temps mort » qui entraîne la distorsion de croisement (*fig.* 43).

L'équation générale peut être écrite sous la forme :

$$e = -\frac{v_{BE}}{\mu}\frac{R_1 + R_2}{R_2} - u_L\left[\frac{R_1 + R_2}{\mu R_2} + \frac{R_1}{R_2}\right].$$

A la limite, si le gain μ tend vers l'infini, il vient $u_L = -e\dfrac{R_2}{R_1}$. La tension u_L recopie la tension e,

au facteur multiplicatif $-\frac{R_2}{R_1}$ près, mais le courant qui parcourt la charge est fourni par les tensions d'alimentation continues E.

7.3.2. Étude énergétique

La figure 47 donne le schéma partiel de la « partie puissance » commune aux schémas des figures 45 et 46.

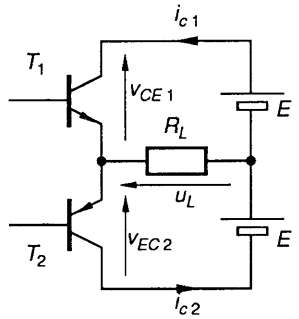


Fig. 47

La tension u_L, recopiant la tension e du générateur de signal s'écrit $u_L = E_M \cos \omega t$.

Les tensions v_{CE_1} et v_{EC_2} ne pouvant devenir négatives, la valeur maximale de E_M est égale à E.

Nous poserons $E_M = aE$ avec $0 < a < 1$.

a) Puissance fournie à la charge R_L

Cette puissance P_u est donnée par :

$$P_u = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{u_L^2}{R_L}\,\mathrm{d}t \left(\text{avec } T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{a^2E^2}{R_L}\cos^2 \omega t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2E^2}{2R_L}.$$

Elle est bien sûr maximale lorsque $a = 1$ et vaut alors $P_{u\max} = \frac{E^2}{2R_L}$.

b) Puissance fournie par un générateur de tension constante E

Le transistor T_1 conduit lorsque la tension u_L est positive, c'est-à-dire entre les instants $t_1 = -\frac{T}{4}$ et $t_2 = +\frac{T}{4}$; il est bloqué lorsque u_L est négative.

Lorsque le transistor T_1 conduit, le courant i_{C_1} s'écrit

$$i_{C_1} = \frac{u_L}{R_L} = \frac{aE}{R_L}\cos \omega t$$

La puissance P_E fournie par une source de tension continue s'exprime par :

$$P_E = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} Ei_{C_1}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} E\frac{aE\cos \omega t}{R_L}\,\mathrm{d}t = \frac{aE^2}{\pi R_L}.$$

c) Puissance dissipée dans un transistor

Cette puissance P_d peut être obtenue par le bilan de puissances : $2P_E = 2P_d + P_u$, soit $P_d = \frac{aE^2}{\pi R_L} - \frac{a^2E^2}{4R_L}$.

Cette puissance est maximale pour une valeur de a telle que $\frac{\mathrm{d}P_d}{\mathrm{d}a} = 0$, soit $a = \frac{2}{\pi} = 0{,}64$. Elle vaut alors $P_{d\max} = \frac{E^2}{\pi^2 R_L}$.

d) Rendement

Le rendement, qui est le rapport entre la puissance utile et la puissance fournie par les sources de tension constante est donné par :

$$\eta = \frac{P_u}{2P_E} = \frac{a\pi}{4}.$$

Il est maximal pour $a = 1$ et vaut alors $\eta = \frac{\pi}{4} \approx 78{,}5\,\%$.

e) Bilan de l'étude énergétique

Le montage « Push-Pull » est particulièrement bien adapté pour fournir une puissance importante à la charge R_L. En effet :

- son rendement est bon : il peut atteindre théoriquement 78,5 %;
- lorsque le signal d'entrée est nul, $a = 0$ et $P_E = 0$, les sources de tension continues ne fournissent pas de puissance;
- la puissance dissipée dans chaque transistor est faible; remarquons en effet :

$$P_{d\max} = \frac{E^2}{\pi^2 R_L} = \frac{2}{\pi^2}P_{u\max} \approx 0{,}2P_{u\max}.$$

Chaque transistor doit être capable de dissiper une puissance égale à 20 % de la puissance utile maximale.

Exemple de calcul

Soit à construire un amplificateur destiné à fournir une puissance de 100 W à une charge $R_L = 8\ \Omega$.

Les tensions d'alimentation E doivent être telles que $E^2 = 2R_L P_{u\max}$ soit $E = 40$ volts.

Chaque transistor doit être capable de dissiper une puissance $P = 0{,}2 \times 100 = 20$ watts. Il doit pouvoir supporter une tension V_{CE} égale à 80 volts et un courant I_C égal à $\frac{E}{R_L} = \frac{40}{8} = 5$ ampères.

7.3.3. Montage utilisant une seule source de tension

Il est possible de diminuer le coût du dispositif en alimentant le montage par une seule source de tension continue E. La figure 48 donne le schéma partiel de la « partie puissance ».

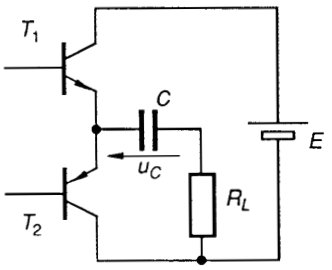


Fig. 48

Lorsque le transistor T_1 conduit, l'ensemble $R_L C$ est alimenté par la source de tension $+ E$.

Lorsque le transistor T_2 conduit, c'est le condensateur C qui sert de source d'alimentation pour la charge R_L.

Le dispositif est forcément limité du côté des basses fréquences, car le condensateur interdit l'alimentation de la charge R_L en continu. La capacité C doit être calculée de telle sorte que la tension aux bornes du condensateur reste sensiblement constante et égale à $\frac{E}{2}$, et ce, compte tenu de la fréquence minimale d'utilisation.

7.4. SCHÉMA ÉQUIVALENT DU TRANSISTOR POUR LES PETITES VARIATIONS

Regroupons sur un même graphe les caractéristiques du transistor et faisons apparaître, dans chaque quadrant, le point M_0 de polarisation (*fig.* 49).

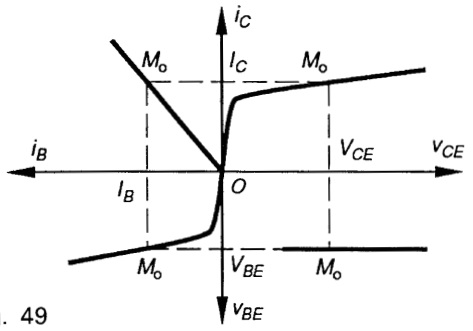


Fig. 49

Ces courbes sont les représentations graphiques résultant des équations :

$$\begin{cases} i_C = f(v_{CE}, i_B), \\ v_{BE} = f(v_{CE}, i_B). \end{cases}$$

Soient I_C, I_B, V_{BE}, V_{CE}, les grandeurs de polarisation et i_c, i_b, v_{be}, v_{ce}, les petites variations des grandeurs électriques i_C, i_B, v_{BE}, v_{CE}, autour de leurs valeurs de repos.

Nous assimilerons ces petites variations aux différentielles, soit : $i_c = \mathrm{d}i_C$, $i_b = \mathrm{d}i_B$, $v_{be} = \mathrm{d}v_{BE}$, $v_{ce} = \mathrm{d}v_{CE}$.

Effectuons, sur le système d'équations une différentielle totale. Il vient :

$$\mathrm{d}i_c = \left(\frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}}\right)_{i_B = \mathrm{Cte}} \mathrm{d}v_{CE} + \left(\frac{\partial i_C}{\partial i_B}\right)_{v_{CE} = \mathrm{Cte}} \mathrm{d}i_B,$$

$$\mathrm{d}v_{BE} = \left(\frac{\partial v_{BE}}{\partial v_{CE}}\right)_{i_B = \mathrm{Cte}} \mathrm{d}v_{CE} + \left(\frac{\partial v_{BE}}{\partial i_B}\right)_{v_{CE} = \mathrm{Cte}} \mathrm{d}i_B$$

Appliquons cette différentielle totale autour du point M_0. Il vient :

$$i_c = \left(\frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}}\right)_{\substack{i_B = \mathrm{Cte} \\ M_0}} \cdot v_{ce} + \left(\frac{\partial i_C}{\partial i_B}\right)_{\substack{v_{CE} = \mathrm{Cte} \\ M_0}} \cdot i_b,$$

$$v_{be} = \left(\frac{\partial v_{BE}}{\partial v_{CE}}\right)_{\substack{i_B = \mathrm{Cte} \\ M_0}} \cdot v_{ce} + \left(\frac{\partial v_{BE}}{\partial i_B}\right)_{\substack{v_{CE} = \mathrm{Cte} \\ M_0}} \cdot i_b.$$

$\left(\frac{\partial v_{BE}}{\partial i_B}\right)_{\substack{v_{CE} = \mathrm{Cte} \\ M_0}}$ est la valeur, autour du point M_0, de la dérivée partielle de v_{BE} par rapport à i_B, en maintenant v_{CE} constante. En d'autres termes, c'est la pente de la caractéristique $v_{BE} = f(i_B)$ autour du point M_0. Nous la noterons h_{11}.

$\left(\frac{\partial v_{BE}}{\partial v_{CE}}\right)_{\substack{i_B = \mathrm{Cte} \\ M_0}}$ est la valeur, autour du point M_0, de la dérivée partielle de v_{BE} par rapport à v_{CE}, en maintenant i_B constant. C'est la pente de la caractéristique $v_{BE} = f(v_{CE})$ à $i_B = \mathrm{Cte}$ autour du point M_0. Nous la noterons h_{12}.

$\left(\frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}}\right)_{\substack{i_B = \mathrm{Cte} \\ M_0}}$ est la pente de la caractéristique $i_C = f(v_{CE})$ à $i_B = \mathrm{Cte}$ autour du point M_0. Nous la noterons h_{22}.

$\left(\frac{\partial i_C}{\partial i_B}\right)_{\substack{v_{CE} = \mathrm{Cte} \\ M_0}}$ est la pente de la caractéristique $i_C = f(i_B)$ à $v_{CE} = \mathrm{Cte}$ autour du point M_0. Nous la noterons h_{21}.

Ces changements de variable conduisent à :

$$\begin{cases} v_{be} = h_{11} i_b + h_{12} v_{ce}, \\ i_c = h_{21} i_b + h_{22} v_{ce}, \end{cases}$$

les paramètres h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22} sont les paramètres hybrides du transistor.

Ordres de grandeur :

a) La caractéristique $i_B = f(v_{BE})$ n'est pas linéaire. Son équation est de la forme

$$i_B = I_{BS}\, e^{\frac{v_{BE}}{V_T}},$$

avec $V_T = 30$ mV, et ce quelque soit v_{CE}, soit :

$$\left(\frac{\partial v_{BE}}{\partial i_B}\right)_{v_{CE}=\text{Cte}} = \frac{dv_{BE}}{di_B}$$

et

$$\frac{di_B}{dv_{BE}} = \frac{I_{BS}}{V_T} e^{\frac{v_{BE}}{V_T}} = \frac{i_B}{V_T}$$

au point M_0,

$$h_{11} = \left(\frac{\partial v_{BE}}{\partial i_B}\right)_{\substack{v_{CE}=\text{Cte} \\ M_0}} = \left(\frac{V_T}{i_B}\right)_{M_0} = \frac{V_T}{I_B},$$

soit

$$\boldsymbol{h_{11} = \frac{30\ (\text{mV})}{I_B}}$$

b) La caractéristique $v_{BE} = f(v_{CE})$ à $i_B = \text{Cte}$ étant sensiblement horizontale, h_{12} est pratiquement nul : $\boldsymbol{h_{12} = 0}$.

c) La caractéristique $i_C = f(i_B)$ étant sensiblement une droite d'équation $i_C = \beta i_B$, il vient $h_{21} = \beta$. Les corrections qui peuvent être apportées à cette relation sont négligeables par rapport aux dispersions du paramètre β dans un même lot de transistor : $\boldsymbol{h_{21} = 30 \rightarrow 300}$.

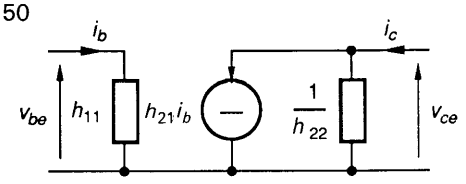
d) Dans sa partie linéaire, la caractéristique $i_C = f(v_{CE})$ est légèrement croissante et sa pente est d'autant plus forte que le courant I_C de polarisation est plus grand. L'ordre de grandeur de $1/h_{22}$ est de quelques dizaines de kiloohms à quelques centaines de kiloohms : $\boldsymbol{h_{22} = 10^{-4} \rightarrow 10^{-5}\ \Omega^{-1}}$.

A partir des relations :

$$\begin{cases} v_{be} = h_{11} i_b, \\ i_c = h_{21} i_b + h_{22} v_{ce} \end{cases}$$

nous pouvons déduire le schéma équivalent du transistor pour les petites variations (*fig.* 50).

Fig. 50



7.5. LES TROIS MONTAGES FONDAMENTAUX EN CLASSE A

7.5.1. Montage émetteur commun

Le schéma correspondant (*fig.* 51) est obtenu à partir du schéma de polarisation de la figure 41, en ajoutant les éléments suivants :

- Un générateur de force électromotrice e_g et de résistance interne R_g, destiné à provoquer des petites variations autour des valeurs de repos;
- Une charge R_L;
- Un condensateur dont la capacité C_E est suffisamment élevée pour que la tension à ses bornes reste sensiblement constante.
- Deux condensateurs C_0 et C'_0 dont le rôle est d'empêcher le courant continu de traverser le générateur et la charge.

Nous supposerons que les petites variations imposées par le signal sont sinusoïdales.

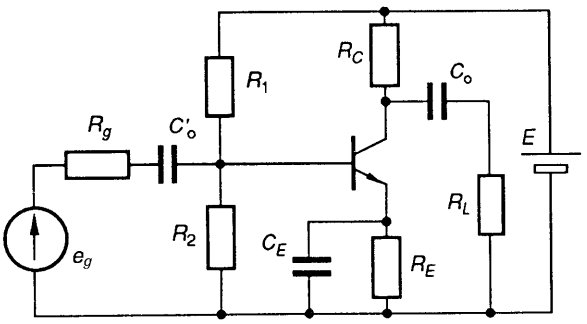


Fig. 51

a) ***Schéma équivalent pour les petites variations***

En posant $R_B = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, on obtient le schéma de la figure 52.

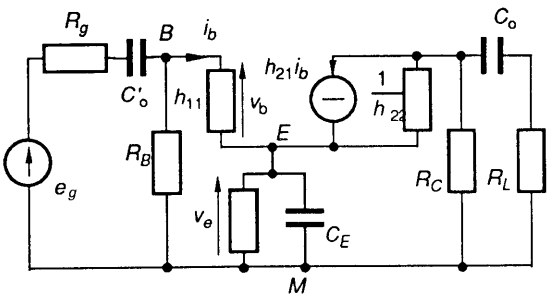


Fig. 52

b) Calcul des condensateurs

• La capacité C'_0 doit être telle que son impédance $\frac{1}{C'_0\omega}$ soit faible devant la résistance $R_g + R_e$ où R_e est la résistance que présente l'amplificateur entre les points B et M.

• La capacité C_0 doit être telle que son impédance $\frac{1}{C_0\omega}$ soit faible devant la résistance $R_L + R_S$ où R_S est la résistance de sortie de l'amplificateur.

• Afin de déterminer la capacité C_E, modifions le schéma entre les points B et M par application du théorème de Thévenin. En posant $R_0 = \frac{R_g R_B}{R_g + R_B}$, le schéma correspondant est donné figure 53.

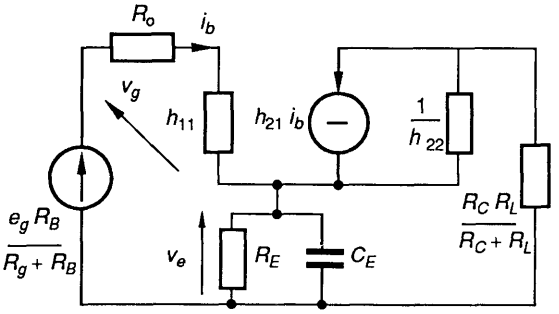


Fig. 53

La capacité C_E doit être telle que :

– l'impédance $\frac{1}{C_E\omega}$ soit faible devant la résistance R_E, soit :

$$\frac{1}{C_E\omega} \ll R_E$$

– la valeur efficace $V_{e\,\text{eff}}$ de la tension v_e soit négligeable devant la valeur efficace $V_{g\,\text{eff}}$ de la tension v_g. En négligeant le courant dans la résistance $\frac{1}{h_{22}}$, il vient :

$$V_{e\,\text{eff}} = \frac{h_{21}}{C_E\omega} I_{b\,\text{eff}} \qquad V_{g\,\text{eff}} = (R_0 + h_{11}) I_{b\,\text{eff}}$$

soit $$\frac{1}{C_E\omega} \ll \frac{R_0 + h_{11}}{h_{21}}.$$

Pour une attaque par un générateur de tension ($R_g = 0$), c'est la deuxième condition qui est la plus contraignante : $\frac{1}{C_E\omega} \ll \frac{h_{11}}{h_{21}}$. Sachant que $h_{11} = \frac{30\,\text{mV}}{I_B}$, il vient : $\frac{1}{C_E\omega} \ll \frac{30\,(\text{mV})}{h_{21} I_B} \approx \frac{30\,(\text{mV})}{I_C}$.

Ainsi la valeur à adopter pour C_E dépend du courant de polarisation I_C.

• Après le calcul des condensateurs le schéma se réduit à celui de la figure 54, avec $R'_C = \frac{R_C}{1 + h_{22} R_C}$.

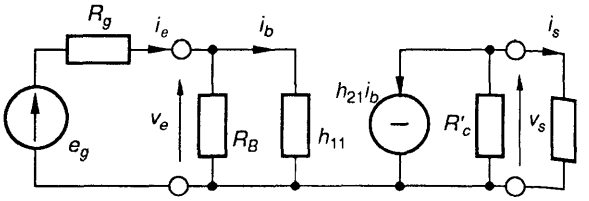


Fig. 54

c) Résistance d'entrée

C'est la résistance vue par le générateur :

$$R_e = \frac{h_{11} R_B}{h_{11} + R_B}.$$

Ordre de grandeur : R_B est en général grand devant h_{11}; soit $R_e = h_{11} = \frac{30\,(\text{mV})}{I_B}$.

Cette résistance est faible (de l'ordre du kΩ) et dépend du courant de polarisation de base.

d) Gain en tension

D'après les équations :

$$v_e = h_{11} i_b, \qquad v_s = -h_{21} \frac{R'_C R_L}{R'_C + R_L} i_b,$$

il vient : $A_V = \frac{v_s}{v_e} = -\frac{h_{21}}{h_{11}} \frac{R'_C R_L}{R'_C + R_L}$.

Les tensions d'entrée et de sortie sont en opposition de phase.

Ordre de grandeur : $\frac{1}{h_{22}}$ est en général grand devant R_C, soit $R'_C \approx R_C$.

Afin d'obtenir une valeur approchée, assimilons h_{21} à β (ce n'est qu'une approximation, car en toute rigueur, h_{21} dépend du courant de polarisation I_C) :

$$A_V = -h_{21} \frac{R'_C R_L}{R'_C + R_L} \frac{1}{h_{11}}$$

$$= \frac{-h_{21} I_B}{30\,(\text{mV})} \frac{R'_C R_L}{R'_C + R_L} \approx -\frac{R'_C R_L}{R'_C + R_L} \frac{I_C}{30\,(\text{mV})}.$$

Dans ces conditions, l'amplification en tension dépend du courant de polarisation I_C.

e) Gain en courant

D'après les équations :

$v_s = R_L i_s$

$v_e = R_e i_e$

il vient :

$$A_I = \frac{i_s}{i_e} = \frac{R_e}{R_L} A_V = \frac{-R_B}{h_{11} + R_B} \cdot \frac{R'_C}{R'_C + R_L} h_{21}.$$

Un ordre de grandeur de ce gain est $A_I = 100$.

f) Résistance de sortie

C'est la résistance du générateur de Thévenin équivalent. On la détermine à partir du schéma de la figure 55, sur lequel :

- la charge est déconnectée;
- la force électromotrice e_g est remplacée par un court-circuit.

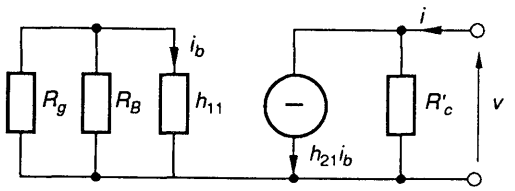


Fig. 55

De l'équation $i_b = 0$, il vient :

$$h_{21} i_b = 0 \quad \text{et} \quad R_S = \frac{v}{i} = R'_C.$$

La résistance de sortie est donc sensiblement égale à R_C. Son ordre de grandeur est de 1 kΩ.

g) Bilan

Le montage émetteur commun présente :

- un fort gain en tension de l'ordre de 100, réglable par I_C,
- une faible résistance d'entrée de l'ordre du kiloohm, réglable par I_B,
- un fort gain en courant de l'ordre de 100;
- une forte résistance de sortie dépendant de R_C.

7.5.2. Montage base commune

Le schéma correspondant est donné à la figure 56 :

• Le signal qui impose les petites variations attaque le dispositif par l'émetteur du transistor.

• La charge R_L est connectée au collecteur du transistor.

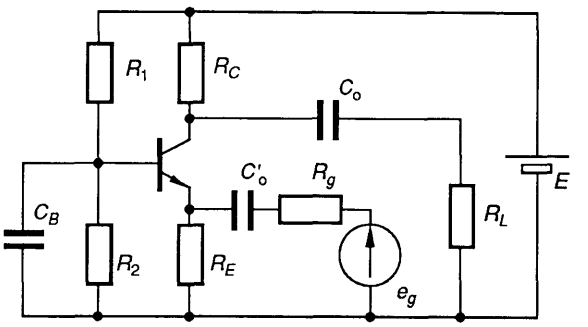


Fig. 56

a) Schéma équivalent pour les petites variations

En posant $R_B = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, on obtient le schéma de la figure 57.

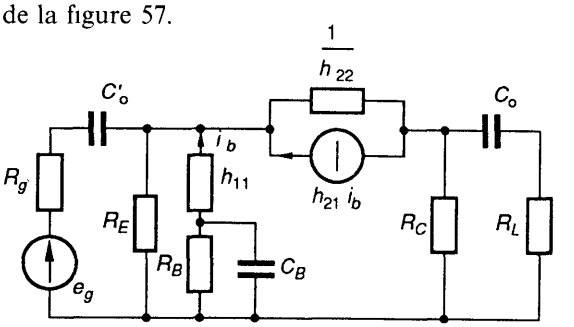


Fig. 57

b) Calcul des condensateurs

Nous les calculerons en supposant que les petites variations imposées par le signal sont sinusoïdales.

La capacité C'_O doit être telle que son impédance $\dfrac{1}{C'_0 \omega}$ soit négligeable devant la résistance $R_g + R_e$ où R_e est la résistance d'entrée de l'amplificateur.

La capacité C_0 doit être telle que son impédance $\dfrac{1}{C_0 \omega}$ soit négligeable devant la résistance $R_L + R_S$ où R_S est la résistance de sortie de l'amplificateur.

La capacité C_B doit être telle que son impédance $\dfrac{1}{C_B \omega}$ soit négligeable à la fois devant la résistance R_B et devant la résistance h_{11}.

La résistance R_B étant en général grande devant h_{11}, il suffit de réaliser $\dfrac{1}{C_B \omega} \ll h_{11} = \dfrac{30 \text{ mV}}{I_B}$.

Cette capacité dépend donc du courant de polarisation de la base.

Après le calcul des condensateurs, et par transformation du générateur de Norton $\left(h_{21} i_b, \frac{1}{h_{22}}\right)$ en son générateur de Thévenin équivalent, nous obtenons le schéma de la figure 58.

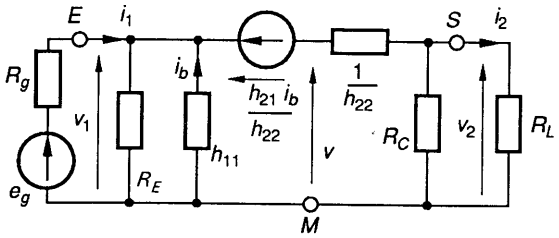


Fig. 58

*c) **Résistance d'entrée***

C'est la résistance vue par le générateur entre les points E et M.

Posons $R_{eq} = \frac{R_C R_L}{R_C + R_L}$ et transformons le générateur de Thévenin $\left(\frac{h_{21} i_b}{h_{22}}, \frac{1}{h_{22}} + R_{eq}\right)$ en son générateur de Norton équivalent. Nous obtenons le schéma de la figure 59.

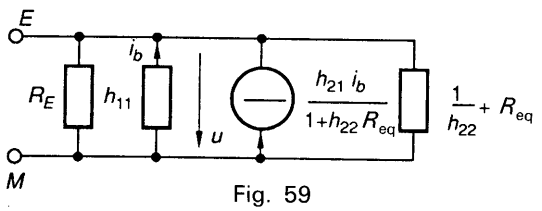


Fig. 59

La tension aux bornes du générateur de courant $\frac{h_{21} i_b}{1 + h_{22} R_{eq}}$ est égale à $u = h_{11} i_b$. Le générateur peut donc être remplacé par la résistance $\frac{h_{11}(1 + h_{22} R_{eq})}{h_{21}}$. La résistance d'entrée R_e résulte donc (*fig.* 60) de la mise en parallèle de quatre résistances.

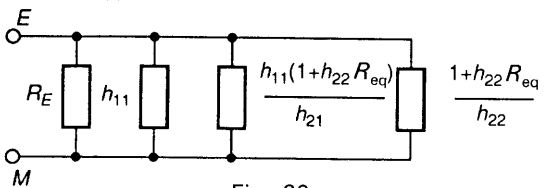


Fig. 60

Ordre de grandeur

h_{22} étant de l'ordre de $10^{-5}\ \Omega^{-1}$, $h_{22} R_{eq}$ est généralement faible devant 1, si bien que la résistance $\frac{h_{11}(1 + h_{22} R_{eq})}{h_{21}}$ est peu différente de $\frac{h_{11}}{h_{21}}$.

h_{21} étant de l'ordre de 100, la résistance $\frac{h_{11}}{h_{21}}$, de l'ordre d'une dizaine d'ohms, est faible à la fois devant h_{11}, R_E et $\frac{1 + h_{22} R_{eq}}{h_{22}}$.

La résistance d'entrée est donc peu différente de $\frac{h_{11}}{h_{21}} = \frac{30\ \text{mV}}{h_{21} I_B} \approx \frac{30\ \text{mV}}{I_C}$. Elle dépend donc du courant de polarisation I_C.

En toute rigueur, h_{21} n'est pas exactement égal à β. Il varie avec le courant de collecteur I_C et la formule $R_e = \frac{30\ \text{mV}}{I_C}$ ne donne qu'un ordre de grandeur de la résistance d'entrée.

*d) **Gain en tension***

A partir de la figure 58, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} v_2 = \dfrac{R_{eq}}{\dfrac{1}{h_{22}} + R_{eq}} v = \dfrac{h_{22} R_{eq}}{1 + h_{22} R_{eq}} v \\ v_1 = -h_{11} i_b \\ v + \dfrac{h_{21} i_b}{h_{22}} = v_1 \end{cases}$$

soit $v_2 = \frac{h_{22} R_{eq}}{1 + h_{22} R_{eq}} \left(1 + \frac{h_{21}}{h_{11} h_{22}}\right) v_1$.

Le gain en tension s'écrit donc

$$A_V = \frac{h_{22} R_{eq}}{1 + h_{22} R_{eq}} \left(1 + \frac{h_{21}}{h_{11} h_{22}}\right).$$

Les tensions d'entrée et de sortie sont en phase.

Ordre de grandeur

$h_{22} \cdot R_{eq}$ est petit devant 1, et h_{21}, de l'ordre de 100, est grand devant $h_{11} h_{22}$, de l'ordre de 10^{-2}, soit :

$$A_V \approx \frac{h_{21} R_{eq}}{h_{11}} \approx R_{eq} \frac{h_{21} I_B}{30\ \text{mV}} \approx \frac{R_{eq} I_C}{30\ \text{mV}}.$$

Le gain en tension dépend donc du courant I_C de polarisation.

*e) **Gain en courant***

Sachant que :

$$\begin{cases} v_1 = R_e i_1 \\ v_2 = R_L i_2 \end{cases}$$

il vient $A_I = \frac{i_2}{i_1} = \frac{R_e}{R_L} A_V$.

Ordre de grandeur

Sachant que :

$$\begin{cases} A_V \approx \dfrac{h_{21} R_{eq}}{h_{11}} \\ R_e \approx \dfrac{h_{11}}{h_{21}} \end{cases}$$

il vient :

$$A_I \approx \frac{h_{21}}{h_{11}} \frac{R_L R_C}{R_L + R_C} \cdot \frac{h_{11}}{h_{21}} \cdot \frac{1}{R_L} \approx \frac{R_C}{R_L + R_C}.$$

Le gain en courant est donc inférieur à 1 et ne dépend que du rapport entre la résistance de collecteur et la résistance de charge.

f) Résistance de sortie

Pour la déterminer traçons le schéma de la figure 61, obtenu à partir du schéma de la figure 58, en remplaçant le générateur e_g par un court-circuit et en déconnectant la résistance de charge R_L.

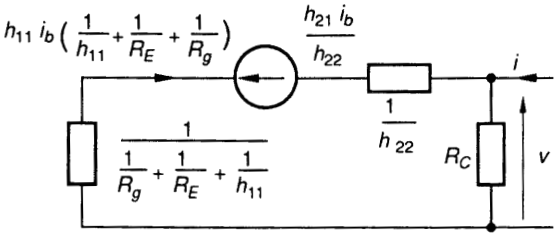


Fig. 61

Le générateur de tension $\frac{h_{21} i_b}{h_{22}}$, traversé par le courant $h_{11} i_b \left(\frac{1}{h_{11}} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_g}\right)$, est équivalent à la résistance $\frac{h_{21}}{h_{22} h_{11}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{h_{11}} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_g}}$, de l'ordre de grandeur $\frac{h_{21}}{h_{22}}$.

Ordre de grandeur

Sur le schéma de la figure 61, il apparaît, en parallèle sur R_C, une résistance de l'ordre de $\frac{h_{21}}{h_{22}} \approx 10^7\ \Omega$, très grande devant R_C.

La résistance de sortie est donc pratiquement égale à R_C.

g) Bilan

Le montage base commune présente :

- une faible résistance d'entrée de l'ordre d'une dizaine d'ohms, réglable par I_B,
- un fort gain en tension de l'ordre de 100, réglable par I_C,
- un gain en courant inférieur à 1, qui dépend du rapport des résistances R_C et R_L,
- une forte impédance de sortie, réglable par R_C.

7.5.3. Montage collecteur commun

Le schéma correspondant est donné à la figure 62.

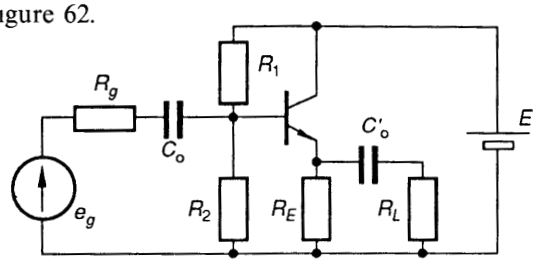


Fig. 62

a) Calcul des condensateurs

La capacité C_0 doit être telle que son impédance $\frac{1}{C_0 \omega}$ soit faible devant $R_g + R_e$ où R_e est la résistance d'entrée de l'amplificateur.

La capacité C'_0 doit être telle que son impédance $\frac{1}{C'_0 \omega}$ soit faible devant $R_L + R_s$ où R_s est la résistance de sortie de l'amplificateur.

b) Schéma équivalent pour les petites variations

Après le calcul des condensateurs et en posant : $R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, on obtient le schéma de la figure 63.

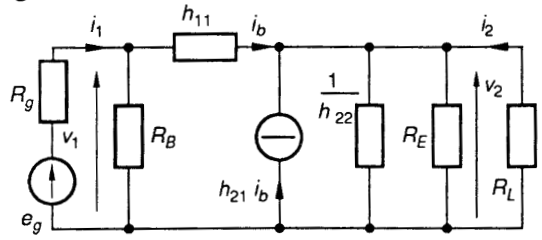


Fig. 63

Posons $R'_E = \frac{R_E}{1 + h_{22} R_E} \approx R_E$.

c) *Résistance d'entrée*

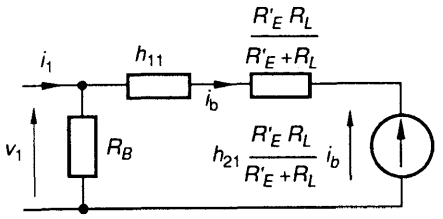


Fig. 64

C'est la résistance vue par le générateur. Elle correspond au schéma de la figure 64 obtenu à partir du schéma de la figure 63 en remplaçant le générateur de Norton $\left(h_{21} i_b, \frac{R'_E R_L}{R'_E + R_L}\right)$ en son générateur de Thévenin équivalent. Le générateur de tension $h_{21} \frac{R'_E R_L}{R'_E + R_L} i_b$, parcouru par le courant i_b, est équivalent à la résistance $h_{21} \frac{R'_E R_L}{R'_E + R_L}$.

Ordre de grandeur

On obtient, en définitive, pour la résistance d'entrée le schéma de la figure 65.

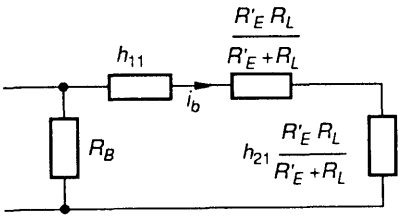


Fig. 65

h_{21} étant grand par rapport à 1 et $\frac{h_{21} R'_E R_L}{R'_E + R_L}$ étant grande par rapport à h_{11}, la résistance d'entrée résulte de la mise en parallèle de la résistance R_B et de la résistance $h_{21} \frac{R'_E R_L}{R'_E + R_L}$. Elle est très grande, de l'ordre de plusieurs centaines de kiloohms, voire de plusieurs mégohms.

d) *Gain en tension*

A partir du schéma de la figure 63, nous écrivons les équations :

$$\begin{cases} v_2 = \dfrac{R'_E R_L}{R'_E + R_L}(h_{21} + 1) i_b \\ v_1 = \left[h_{11} + (h_{21} + 1) \dfrac{R'_E R_L}{R'_E + R_L} \right] i_b, \end{cases}$$

soit $$A_V = \frac{(h_{21} + 1) \frac{R'_E R_L}{R'_E + R_L}}{h_{11} + (h_{21} + 1) \frac{R'_E R_L}{R'_E + R_L}}.$$

Les tensions d'entrée et de sortie sont en phase.

Ordre de grandeur

h_{21} est grand devant 1. Le gain en tension est inférieur à 1, mais est d'autant plus voisin de l'unité que $h_{21} \frac{R'_E R_L}{R'_E + R_L}$ est grand devant h_{11}.

e) *Gain en courant*

Il peut être déterminé à partir de la formule générale $A_I = A_V \frac{R_e}{R_L}$.

Ordre de grandeur

A_V est de l'ordre de l'unité,

R_e est de l'ordre de $h_{21} \frac{R'_E R_L}{R'_E + R_L}$,

A_I est donc de l'ordre de grandeur de $\frac{h_{21} R'_E}{R'_E + R_L}$.

Ce gain en courant est grand, de l'ordre de 100.

f) *Résistance de sortie*

Pour la déterminer traçons le schéma de la figure 66 obtenu à partir du schéma de la figure 63, en remplaçant le générateur e_g par un court-circuit et en déconnectant la résistance R_L.

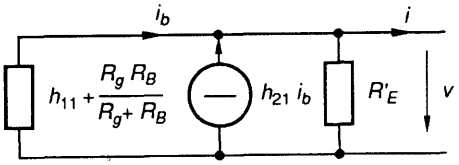


Fig. 66

La tension, aux bornes du générateur de courant $h_{21} i_b$, est égale à $v = \left(h_{11} + \frac{R_g R_B}{R_g + R_B} \right) i_b$.

Nous pouvons donc le remplacer par la résistance $\left(h_{11} + \frac{R_g R_B}{R_g + R_B} \right) \frac{1}{h_{21}}$.

Nous obtenons ainsi pour la résistance de sortie le schéma de la figure 67.

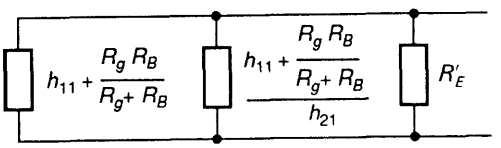


Fig. 67

Ordre de grandeur

h_{21} étant grand par rapport à 1, la résistance $h_{11} + \dfrac{R_g R_B}{R_g + R_B}$ a une influence négligeable par rapport à la résistance $\left(h_{11} + \dfrac{R_g R_B}{R_g + R_B}\right)\dfrac{1}{h_{21}}$, dont l'ordre de grandeur $\left(\dfrac{h_{11}}{h_{21}}\right)$ est faible devant R_E. La résistance de sortie est donc de l'ordre de

$$\frac{h_{11}}{h_{21}} \approx \frac{30\,\text{mV}}{h_{21} I_B} \approx \frac{30\,\text{mV}}{I_C}.$$

Elle est faible et dépend du courant de polarisation I_C.

g) Bilan

Le montage collecteur commun possède les propriétés suivantes :

- forte résistance d'entrée, de l'ordre de plusieurs centaines de kiloohms;
- gain en tension voisin de 1;
- fort gain en courant;
- faible résistance de sortie, réglable par I_C.

Le montage collecteur commun se rapproche ainsi d'un dispositif idéal appelé *suiveur* qui possède les caractéristiques suivantes :

- résistance d'entrée infinie,
- gain en tension égal à 1,
- résistance de sortie nulle.

7.6. RÉPONSE EN FRÉQUENCE D'UN AMPLIFICATEUR À TRANSISTOR BIPOLAIRE

Nous étudierons à titre d'exemple, l'évolution de la fonction de transfert en tension du montage émetteur commun dont le schéma est rappelé à la figure 68.

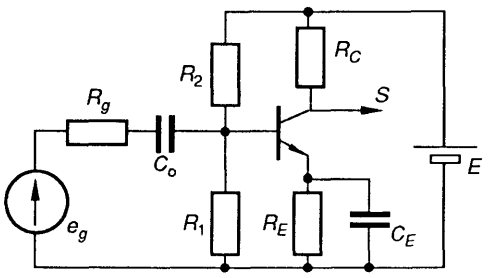


Fig. 68

7.6.1. Étude aux fréquences moyennes

Nous appellerons fréquences moyennes, les fréquences pour lesquelles :

- Les capacités C_0 et C_E se comportent comme des court-circuits.
- Les capacités qui apparaissent sur les jonctions du transistor ont une influence négligeable.

Le schéma équivalent pour les petites variations est donné à la figure 69.

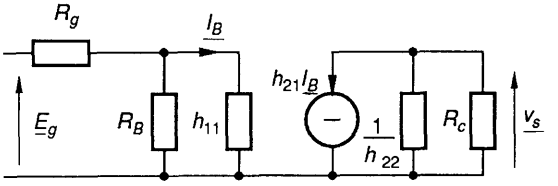


Fig. 69

Nous supposerons :

$$R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \gg h_{11}$$

$$\frac{1}{h_{22}} \gg R_C.$$

Dans ces conditions, la fonction de transfert $\underline{T_0} = \dfrac{\underline{V_s}}{\underline{E_g}}$, s'écrit : $\underline{T_0} = \dfrac{-\boldsymbol{h_{21} R_C}}{\boldsymbol{h_{11} + R_g}}$.

7.6.2. Étude aux basses fréquences

a) Influence du condensateur de liaison C_0

Nous supposerons que pour les fréquences d'étude :

- la capacité C_E est suffisamment élevée pour se comporter comme un court-circuit;
- les capacités parasites du transistor ont une influence négligeable.

Le schéma équivalent correspondant est donné à la figure 70.

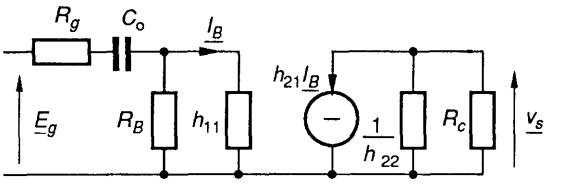


Fig. 70

Avec les mêmes approximations $\left(R_B \gg h_{11}, \dfrac{1}{h_{22}} \gg R_C\right)$, il vient :

$$\underline{T} = \frac{\underline{V_S}}{\underline{E_g}} = -\frac{h_{21} R_C}{h_{11} + R_g + \dfrac{1}{jC_0\omega}}$$

$$= -\frac{h_{21} R_C}{h_{11} + R_g} \cdot \frac{jC_0\omega(R_g + h_{11})}{1 + jC_0\omega(R_g + h_{11})},$$

$$\underline{T} = \underline{T_0} \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}} \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{1}{C_0(R_g + h_{11})}.$$

Le diagramme de Bode correspondant est donné à la figure 71.

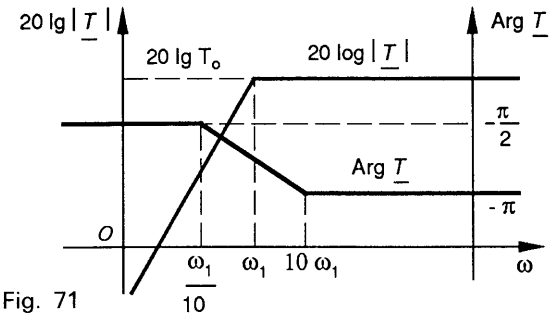


Fig. 71

Pour qu'un signal sinusoïdal soit transmis dans les mêmes conditions qu'aux fréquences moyennes, (amplification T_0, déphasage de π) il est nécessaire que sa pulsation ω soit supérieure à $10\omega_1$, soit :

$$\omega > \frac{10}{C_0(R_g + h_{11})}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{C_0\omega} < \frac{R_g + h_{11}}{10}.$$

Ce qui correspond bien au résultat établi lors du calcul de la capacité C_0.

b) Influence du condensateur de découplage C_E

Nous supposerons que pour les fréquences d'étude :

- la capacité C_0 est suffisamment élevée pour se comporter comme un court-circuit;
- les capacités parasites du transistor ont une influence négligeable.

Le schéma équivalent correspondant est donné à la figure 72.

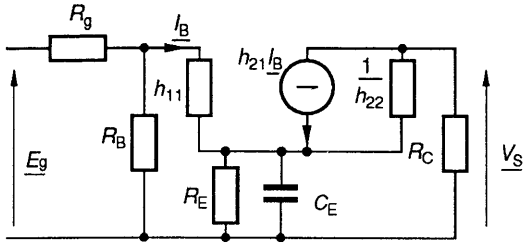


Fig. 72

Par application du théorème de Thévenin en entrée et par transformation du schéma de Norton $\left(h_{21}\underline{I_B}, \dfrac{1}{h_{22}}\right)$ en son schéma de Thévenin équivalent, nous obtenons le schéma de la figure 73.

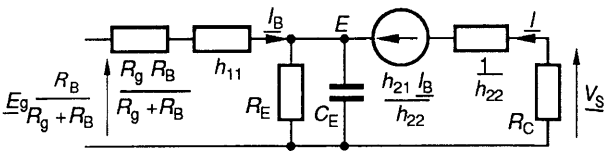


Fig. 73

La loi des nœuds appliquée au point E conduit à :

$$\underline{I_B} + \underline{I} = \left[\frac{h_{21}\underline{I_B}}{h_{22}} - \left(R_C + \frac{1}{h_{22}}\right)\underline{I}\right] \frac{1 + jR_E C_E\omega}{R_E},$$

où :

$$\underline{I_B}\left[\frac{h_{21}}{h_{22}} \frac{1 + jR_E C_E\omega}{R_E} - 1\right]$$

$$= \underline{I}\left[1 + \frac{R_C + \dfrac{1}{h_{22}}}{R_E}(1 + jR_E C_E\omega)\right].$$

Dans la mesure où $\dfrac{1}{h_{22}} \gg R_C, \dfrac{1}{h_{22}} \gg R_E, h_{21} \gg 1$, cette équation se réduit à : $\underline{I} = h_{21}\underline{I_B}$.

Il vient alors :

$$\begin{cases} \underline{V_S} = -R_C h_{21} \underline{I_B} \\ \underline{E_g} \dfrac{R_B}{R_g + R_B} = \left(h_{11} + R_0 + \dfrac{R_E h_{21}}{1 + jR_E C_E\omega}\right)\underline{I_B}, \end{cases}$$

avec $R_0 = \dfrac{R_g R_B}{R_g + R_B}$.

soit

$$\underline{T} = \frac{\underline{V_S}}{\underline{E_g}} = -\frac{R_B}{R_g + R_B} \times \frac{h_{21} R_C (1 + jR_E C_E\omega)}{h_{21} R_E + (h_{11} + R_0)(1 + jR_E C_E\omega)}$$

$$\underline{T} = -\frac{R_B}{R_g + R_B} \times \frac{h_{21} R_C}{h_{11} + R_0 + h_{21} R_E} \times \frac{1 + jR_E C_E\omega}{1 + j\dfrac{R_E C_E\omega(h_{11} + R_0)}{h_{11} + R_0 + h_{21} R_E}}$$

$$\underline{T} = \underline{T'_0} \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega'_2}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}$$

avec : $\underline{T}'_0 = -\dfrac{R_B}{R_g + R_B} \cdot \dfrac{h_{21} R_C}{h_{11} + R_0 + h_{21} R_E}$,

$\omega'_2 = \dfrac{1}{R_E C_E}$, $\omega_2 = \dfrac{h_{11} + R_0 + h_{21} R_E}{R_E C_E (h_{11} + R_0)} > \omega'_2$.

Le diagramme de Bode correspondant est donné à la figure 74.

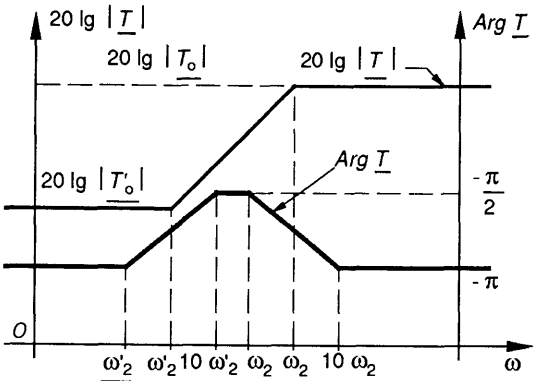


Fig. 74

Remarquons que, pour les fréquences très supérieures a ω'_2, $\underline{T}$ devient peu différent de

$$\underline{T} \approx \underline{T}'_0 \frac{\omega_2}{\omega'_2} = -\frac{R_B}{R_g + R_B} \times \frac{h_{21} R_C}{h_{11} + R_0 + h_{21} R_E} \times \frac{h_{11} + R_0 + h_{21} R_E}{h_{11} + R_0}$$

$$= -\frac{R_B}{R_g + R_B} \times \frac{h_{21} R_C}{h_{11} + \dfrac{R_g R_B}{R_g + R_B}} = -\frac{h_{21} R_C R_B}{h_{11} R_g + h_{11} R_B + R_g R_B}$$

Compte tenu de l'approximation $R_B \gg h_{11}$, il vient $\underline{T} \approx -\dfrac{h_{21} R_C}{h_{11} + R_g}$ qui est bien la transmittance aux fréquences moyennes.

Pour qu'un signal sinusoïdal soit transmis dans les mêmes conditions qu'aux fréquences moyennes (amplification T_0, déphasage de π), il est nécessaire que sa pulsation soit supérieure à $10\omega_2$, soit $\omega > 10 \dfrac{h_{11} + R_0 + h_{21} R_E}{R_E C_E (h_{11} + R_0)}$, où :

$$\frac{1}{C_E \omega} < \frac{1}{10} \cdot \frac{R_E (h_{11} + R_0)}{(h_{11} + R_0 + h_{21} R_E)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{R_E \dfrac{h_{11} + R_0}{h_{21}}}{R_E + \dfrac{h_{11} + R_0}{h_{21}}}.$$

L'impédance de la capacité C_E doit donc être faible par rapport à la résistance résultant de la mise en parallèle de la résistance R_E et de la résistance $\dfrac{h_{11} + R_0}{h_{21}}$; ce qui correspond aux résultats établis lors du calcul de la capacité C_E.

7.6.3. Étude aux hautes fréquences

Nous supposerons que, pour les fréquences envisagées, les condensateurs C_0 et C_E se comportent comme des courts-circuits.

a) Schéma équivalent du transistor aux hautes fréquences

Pour les fréquences élevées, plusieurs modifications doivent être apportées au schéma de la figure 50.

• Il faut distinguer, entre base et émetteur, le comportement de la jonction proprement dite, de celui des semi-conducteurs qui conduisent le courant jusqu'à la jonction. Pour cela, il apparaît entre base (B) et émetteur (E) un point B' inaccessible physiquement (*fig.* 75) :

– la résistance $r_{bb'}$ est la résistance des semi-conducteurs; elle est de l'ordre d'une centaine d'ohms;

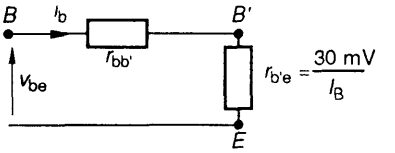


Fig. 75

– la résistance $r_{b'e}$ est la résistance dynamique de la jonction proprement dite, que nous avons établie à $r_{b'e} = \dfrac{30 \text{ mV}}{I_B}$.

• Il apparaît dans la base une charge stockée Q_S dont les variations ne peuvent être instantanées et qui va donc altérer le comportement du transistor pour les fréquences élevées. Les dimensions de la base étant faibles, les recombinaisons y sont rares et la concentration p des charges en excès varie linéairement lorsqu'on se déplace de l'émetteur vers la base (*fig.* 76).

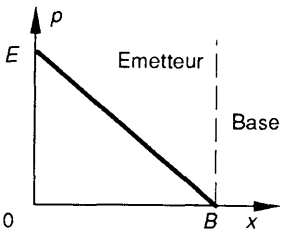


Fig. 76

La surface OBE est proportionnelle à la charge stockée. Le courant de base I_B est proportionnel (voir diffusion) au gradient de concentration

$\left(\frac{dp}{dx}\right)$ au voisinage de la base. Imaginons que l'on double le courant I_B, la concentration $\frac{dp}{dx}$ est multipliée par deux ainsi que la pente de la droite EB. La surface EOB double et la charge Q_S fait de même.

La charge stockée est donc proportionnelle au courant I_B soit :

$$Q_S = \tau I_B.$$

Compte tenu de la relation $I_B = I_{BS}\, e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}$, avec $V_T = 30$ mV, il vient :

$$Q_S = \tau I_{BS}\, e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}.$$

La charge Q_S dépendant de la tension base-émetteur tout se passe, du point de vue des petites variations, comme si cette charge était emmagasinée par la capacité dynamique $C_e = \frac{dQ_S}{dV_{BE}} = \tau \frac{I_{BS}}{V_T} e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}$, soit $C_e = \frac{\tau I_B}{V_T}$. Le schéma de la figure 75 doit être modifié comme l'indique la figure 77.

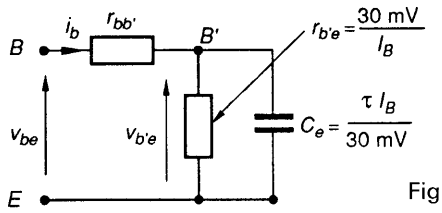


Fig. 77

Remarquons que la constante de temps $r_{b'e}C_e$ est indépendante de I_B. Elle s'écrit $r_{b'e}C_e = \tau$.

La capacité C_e est de l'ordre de 100 picofarads.

• Le générateur de courant $h_{21}i_b$, de la figure 50, traduit les variations du courant collecteur de court-circuit en fonction des variations i_b du courant de base. Pour les hautes fréquences, la charge stockée interdit la transmission immédiate, vers le collecteur, de l'information «courant i_b». Le courant collecteur I_c est proportionnel au gradient de concentration des porteurs au voisinage du collecteur (voir diffusion). De ce fait il est proportionnel, tout comme le courant de base, à la charge stockée Q_S. Ses variations i_c sont donc proportionnelles à la charge qui apparaît sur la capacité de la figure 77. Cette charge est elle-même proportionnelle à la tension $v_{b'e}$.

Soit : $i_c = g_m v_{b'e}$.

Comme en basse fréquence, ce générateur doit être complété par une résistance en parallèle r_{ce} qui traduit la pente des caractéristiques. Nous obtenons ainsi le schéma de la figure 78.

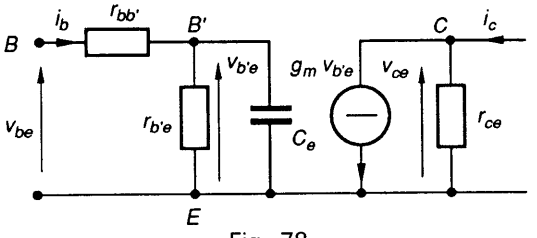


Fig. 78

• La jonction base-collecteur est polarisée en inverse. Il y apparaît donc une capacité due à la charge d'espace dans la zone de transition dépourvue de porteurs mobiles. Cette capacité C_c, de l'ordre 3 picofarads, varie comme $(V_{CB})^{-1/2}$.

• La largeur de la zone de transition de la jonction collecteur-base dépend de la tension collecteur-base et modifie les dimensions de la base effective. La répartition de la charge stockée s'en trouve ainsi modifiée, provoquant des variations du courant de base. Afin de tenir compte de l'influence des petites variations de v_{ce} sur les petites variations de i_b, il faut placer entre les points B' et C une résistance $r_{b'c}$ de l'ordre de 5 mégohoms.

Nous obtenons en définitive le schéma de la figure 79, appelé *schéma de Giacoletto.*

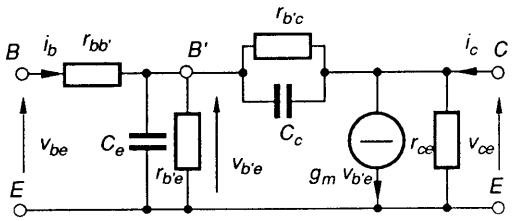


Fig. 79

b) Relations avec les paramètres hybrides

Pour les basses fréquences, les condensateurs se comportent comme des circuits ouverts. De plus, nous négligerons l'influence de la résistance $r_{b'c}$. Nous obtenons le schéma de la figure 80.

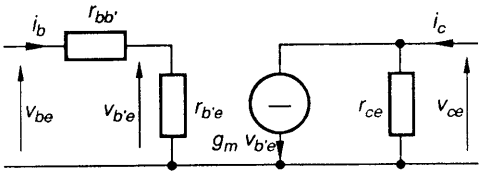


Fig. 80

Nous pouvons y écrire :

$$\begin{cases} v_{be} = (r_{bb'} + r_{b'e})i_b \\ i_c = \dfrac{v_{ce}}{r_{ce}} + g_m v_{b'e} = g_m r_{b'e} i_b + \dfrac{v_{ce}}{r_{ce}} \end{cases}$$

par identification avec :

$$\begin{cases} v_{be} = h_{11} i_b, \\ i_c = h_{21} i_b + h_{22} v_{ce}, \end{cases}$$

il vient :

$$h_{11} = r_{bb'} + r_{b'e},$$
$$h_{21} = g_m r_{b'e},$$
$$h_{22} = \frac{1}{r_{ce}}.$$

c) *Fréquences particulières*

Calculons le gain en courant en court-circuit et, pour cela, relions les points C et E du montage de la figure 79. La résistance $r_{b'c}$ et la capacité C_c viennent en parallèle sur la résistance $r_{b'e}$ et sur la capacité C_e.

Sachant que $r_{b'e} \ll r_{b'c}$ et $C_c \ll C_e$, nous obtenons le schéma de la figure 81.

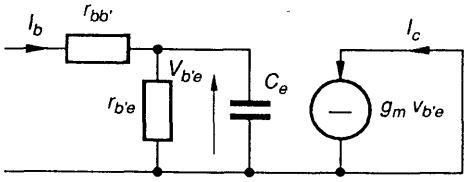


Fig. 81.

En régime sinusoïdal permanent, il vient :

$$\underline{T}_{iC} = \frac{\underline{I}_C}{\underline{I}_B} = \frac{g_m r_{b'e}}{1 + \mathrm{j} r_{b'e} C_e \omega} = \frac{h_{21}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_\beta}}$$

avec $$\omega_\beta = \frac{1}{r_{b'e} C_e}.$$

La fréquence $f_\beta = \dfrac{1}{2\pi r_{b'e} C_e}$ est la *fréquence de coupure du gain en courant en court-circuit* $\underline{T}_{iC}$.

Remarquons qu'elle est égale à $\omega_\beta = \dfrac{1}{\tau}$ et qu'elle est ainsi indépendante des conditions d'utilisation du transistor. Le constructeur indique la *fréquence de transition* f_T; c'est la fréquence pour laquelle le module de $\underline{T}_{iC}$ est égal à 1 soit :

$$\frac{h_{21}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{f_T}{f_\beta}\right)^2}} = 1 \quad \text{ou} \quad h_{21}^2 = 1 + \left(\frac{f_T}{f_\beta}\right)^2.$$

Sachant que h_{21} est grand devant 1 il vient

$$f_T = h_{21} f_\beta.$$

d) *Réponse du montage émetteur commun aux hautes fréquences*

Par application du schéma équivalent de la figure 79 au schéma de la figure 68, nous obtenons pour les petites variations le schéma de la figure 82.

Rappelons que la résistance $r_{ce} = \dfrac{1}{h_{22}}$ est très grande devant la résistance R_C; nous pouvons donc négliger son influence.

Il vient alors :

$$\underline{V}_{b'e} = \underline{Z}_{b'c} \underline{I} + R_C(\underline{I} - g_m \underline{V}_{b'e})$$

avec $$\underline{Z}_{b'c} = \frac{r_{b'c}}{1 + \mathrm{j} r_{b'c} C_c \omega},$$

$$\underline{I}[R_C + \underline{Z}_{b'c}] = \underline{V}_{b'e} g_m \left[R_C + \frac{1}{g_m}\right].$$

Si nous n'envisageons que les fréquences inférieures à $\dfrac{1}{10 r_{b'c} C_c}$ de l'ordre de 100 MHz, l'impédance $|\underline{Z}_{b'c}|$ est très élevée par rapport à R_C et $\dfrac{1}{g_m}$.

Le courant $|\underline{I}|$ est alors négligeable par rapport à $g_m |\underline{V}_{b'e}|$ et nous pouvons écrire :

$$\underline{I} \approx \frac{1 + R_C g_m}{\underline{Z}_{b'c}} \underline{V}_{b'e}.$$

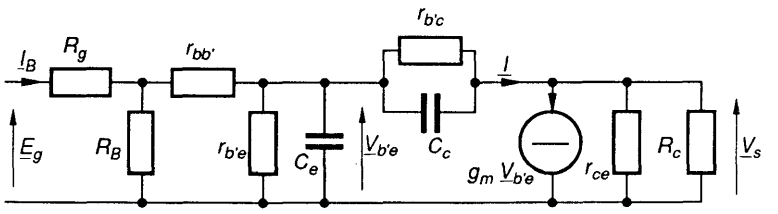


Fig. 82

Tout se passe comme si le courant $\underline{I}$ était prélevé sur l'entrée par l'impédance $\frac{\underline{Z}_{b'c}}{1 + R_C g_m}$, ce qui conduit au schéma équivalent de la figure 83, avec

$$C = C_e + (1 + R_C g_m)C_c$$

et

$$r = \frac{r_{b'e} r_{b'c}}{r_{b'c} + r_{b'e}(1 + R_C g_m)}$$

(la résistance R_B grande devant $h_{11} = r_{bb'} + r_{b'e}$ a une influence négligeable).

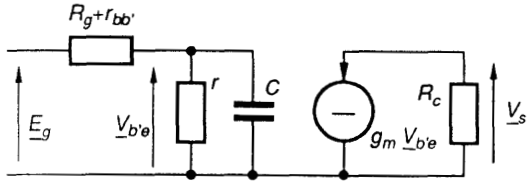


Fig. 83

La fonction de transfert en tension $\underline{T}$ s'écrit :

$$\underline{T} = \frac{\underline{V}_S}{\underline{E}_g} = \frac{-g_m R_C r}{(R_g + r_{bb'})(1 + jrC\omega) + r}$$

$$= -\frac{g_m R_C r}{r + R_g + r_{bb'}} \times \frac{1}{1 + \frac{jrC\omega(R_g + r_{bb'})}{R_g + r + r_{bb'}}}.$$

La résistance r résultant de la mise en parallèle de $r_{b'e}$ et $\frac{r_{b'c}}{1 + R_C g_m}$ est peu différente de $r_{b'e}$. Il en résulte que :

$$-\frac{g_m R_C r}{R_g + r + r_{bb'}} \approx -\frac{g_m r_{b'e} R_C}{R_g + r_{b'e} + r_{bb'}}$$

$$= -\frac{h_{21} R_C}{R_g + h_{11}} = \underline{T}_0.$$

On retrouve ainsi la fonction de transfert en tension aux fréquences moyennes.

Il apparaît une pulsation de coupure haute :

$$\omega_3 = \frac{R_g + r_{b'e} + r_{bb'}}{R_g + r_{bb'}} \times \frac{1}{r_{b'e} C}.$$

Le diagramme de Bode correspondant est donné à la figure 84.

Pour qu'un signal sinusoïdal soit transmis dans les mêmes conditions qu'aux fréquences moyennes, il est nécessaire que sa pulsation soit inférieure à $\frac{\omega_3}{10}$.

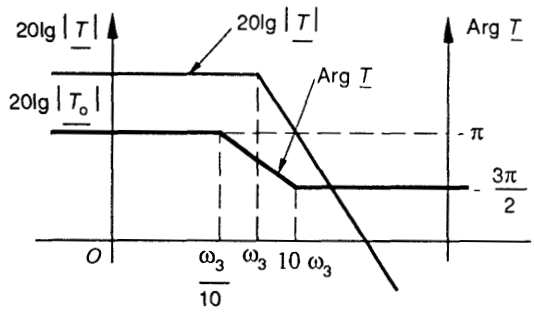


Fig. 84

Remarquons que la pulsation de coupure ω_3 peut être écrite :

$$\omega_3 = \frac{R_g + r_{b'e} + r_{bb'}}{R_g + r_{bb'}} \times \frac{1}{r_{b'e} C_e \left[1 + \frac{C_c}{C_e}(1 + R_C g_m)\right]}.$$

Si la résistance de charge R_C est telle que $R_C g_m \gg 1$, la fréquence de coupure haute s'écrit

$$f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{R_g + r_{b'e} + r_{bb'}}{R_g + r_{bb'}} \cdot f_\beta \cdot \frac{1}{1 + \frac{C_c}{C_e} R_C \frac{h_{21}}{r_{b'e}}}$$

$$= \frac{R_g + r_{b'e} + r_{bb'}}{R_g + r_{bb'}} \cdot f_\beta \cdot \frac{1}{1 + 2\pi R_C C_c f_T}.$$

Elle augmente lorsque la résistance R_g du générateur diminue.

De même, elle augmente lorsque la résistance de charge diminue, alors que la fonction de transfert aux fréquences moyennes $T_0 = -\frac{h_{21} R_C}{h_{11} + R_g}$ augmente lorsque R_C augmente et lorsque R_g diminue.

Afin de juger de la qualité du montage, on définit le produit gain bande par $|T_0| f_3$.

Soit :

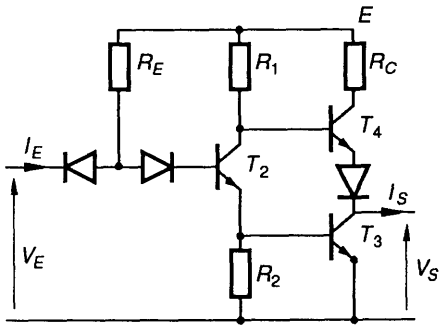
$$|T_0| f_3 = \frac{h_{21} R_C f_\beta}{R_g + r_{bb'}} \cdot \frac{1}{1 + 2\pi R_C C_{b'c} f_T}$$

$$= \frac{f_T}{1 + 2\pi R_C C_{b'c} f_T} \frac{R_C}{R_g + r_{bb'}}.$$

Il augmente avec R_C et diminue avec R_g.

EXERCICES

1.
Le schéma d'un inverseur T.T.L. est donné sur la figure.



On donne : $E = 5$ volts,

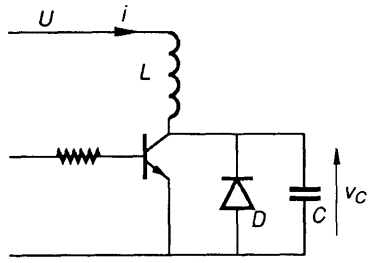
$R_1 = 1{,}4$ kΩ, $R_2 = 1$ kΩ, $R_C = 100$ Ω, $R_E = 4$ kΩ.

Les transistors sont identiques et la valeur minimale du coefficient β est $\beta_{min} = 100$. Les courants de base sont négligeables devant les courants collecteurs. La tension collecteur-émetteur de saturation est $V_{CEsat} = 0{,}2$ V.
La tension aux bornes d'une diode conductrice est 0,6 V. Elle est bloquée dès que cette tension devient inférieure à 0,5 V.
La tension base émetteur d'un transistor saturé est 0,7 V. Il est bloqué dès que cette tension devient inférieure à 0,5 V.
1° *a*) Montrer que si $V_E = 0$, les transistors T_2 et T_3 sont bloqués et que le transistor T_4 est saturé. Quelle est alors la valeur de la tension de sortie V_S? Quel est le signe de I_S? Calculer la résistance de sortie R_S.
b) Quel est le signe de I_E? Jusqu'à quelle valeur maximale de V_E, la porte reste-t-elle dans cette état?
2° *a*) Montrer que si $2 \text{ V} < V_E < 5$ V, les transistors T_2 et T_3 sont saturés et que le transistor T_4 est bloqué. Quelle est alors la valeur de la tension de sortie V_S? Quel est le signe de I_S?
b) Est-il possible que, lors de la transition de la sortie de l'état haut vers l'état bas les transistors T_3 et T_4 conduisent simultanément? Expliquer le rôle de la résistance R_C. Quel inconvénient présente-elle lorsque la charge possède une capacité C_L?

Étude d'un circuit de balayage ligne

2.
Le circuit de la figure est utilisé pour produire le balayage ligne d'un téléviseur. Le courant i dans l'enroulement d'inductance L oscille entre deux valeurs $+ I_M$ et $- I_M$. La montée en courant de $- I_M$ à $+ I_M$ est lente et dure 54 µs. La descente est rapide et dure 10 µs. La période du balayage est de 64 µs. On négligera la résistance de l'enroulement.

1° Étude du circuit.
A l'instant $t = 0$ le circuit est supposé au repos, condensateur déchargé. A $t = 0$ on alimente le circuit en même temps que l'on sature le transistor.
Calculer le courant $i(t)$ dans l'enroulement.
A l'instant $t = T_0$ le courant atteint une valeur I_0 et l'on bloque le transistor.



Calculer l'inductance L pour $U = 12$ volts et $I_0 = 5$ A afin d'obtenir $T_0 = 27$ µs.
2° Déterminer l'évolution du circuit quand le transitor est bloqué. Pour simplifier le calcul on peut prendre une nouvelle origine des temps à l'instant de blocage. Déterminer les équations différentielles de $i(t)$ et $v_c(t)$. Montrer que l'allure de $i(t)$ et $v_c(t)$ est sinusoïdale de période T. Mettre $i(t)$ sous la forme :

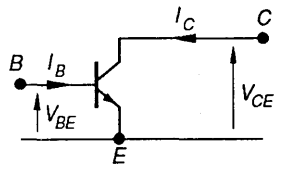
$$i(t) = I_M \cos\left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi\right).$$

Déterminer les valeurs des constantes I_M et φ en fonction des données du problème. Montrer que $\tan \varphi$ peut s'exprimer uniquement en fonction de T_0 et T.
b) On adopte pour T la valeur 20 µs.
Montrer que dans ces conditions φ peut s'exprimer simplement en fonction des différents paramètres comme U, L, T_0 ou I_0. On conservera cette approximation dans toute la suite.
c) Déterminer de la même façon l'évolution de la tension v_c aux bornes du condensateur. Soit V_M la valeur maximale de v_c; montrer que le rapport $\frac{V_M}{U}$ peut s'exprimer uniquement en fonction de T_0 et T.
d) Calculer les valeurs de C, I_M, V_M et φ en fonction des données numériques.
Tracer les courbes $i(t)$ et $v_c(t)$ jusqu'à l'instant T_1 où la diode se met à conduire. Exprimer T_1 en fonction de φ et T. Calculer la valeur du courant $i(T_1)$.
Échelle des courbes : 2 cm pour 10 µs et 1 cm pour 1 A, 1 cm pour 10 V.
3° On prend comme origine des temps l'instant où la diode s'est mise à conduire. Calculer $i(t)$ et déterminer l'instant T_2 où le courant s'annule.
Montrer que si l'on remet en conduction le transistor T, dans un intervalle de temps que l'on déterminera, le courant pourra repasser à un instant T_3 par I_0 et qu'en recommençant le cycle on peut fournir un signal périodique. On calculera la période exacte de ce signal en fonction de L, C, T, I_0, U.

3.
1° On décrit le fonctionnement du transistor de la figure 1, en petits signaux sinusoïdaux, par ses paramètres admittance :

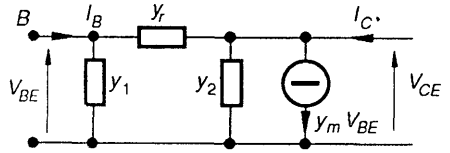
$$\begin{cases} \underline{I_B} = \underline{Y_{11}}\,\underline{V_{BE}} + \underline{Y_{12}}\,\underline{V_{CE}} \\ \underline{I_C} = \underline{Y_{21}}\,\underline{V_{BE}} + \underline{Y_{22}}\,\underline{V_{CE}} \end{cases}.$$

Fig. 1.



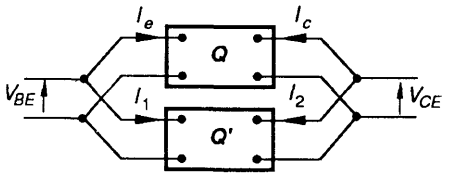
a) On se propose de représenter le transistor par le modèle en *II* de la figure 2.
Calculer les paramètres admittance $\underline{Y}_{ij}$, en fonction des admittances $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_r$, $\underline{Y}_m$.

Fig. 2.



b) La présence de l'admittance $\underline{Y}_r$ entraîne une interdépendance entre le courant d'entrée et la tension de sortie. Pour supprimer cet effet, on place en parallèle sur le transistor, représenté par le quadripôle Q, un second quadripôle Q' (*fig.* 3). Le quadripôle Q' est réalisé par un

Fig. 3.

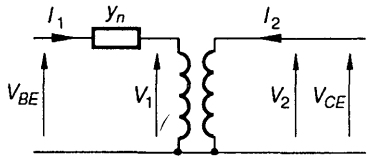


transformateur supposé parfait, ainsi que d'une admittance $\underline{Y}_n$ en série au primaire (*fig.* 4).
On rappelle les équations du transformateur parfait :

$$\begin{cases} \underline{V}_2 = -m\underline{V}_1, \\ \underline{I}_2 = \dfrac{\underline{I}_1}{m}, \end{cases}$$

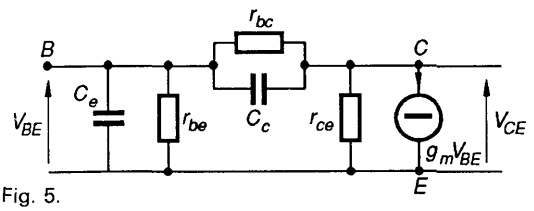
où $m = \dfrac{n_2}{n_1}$ est le rapport des nombres de spires primaires et secondaires.

Fig. 4.



Calculer les paramètres admittance $\underline{Y}'_{ij}$ du quadripôle Q'.
En déduire les paramètres admittance $\underline{Y}''_{ij}$ du transistor muni du quadripôle de neutrodynage Q'.
Quelle condition faut-il réaliser pour que le paramètre $\underline{Y}''_{12}$ soit nul?
Cette condition étant réalisée, quels sont, en fonction de $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_n$ et $\underline{Y}_m$, les paramètres admittance du transistor neutrodyné?
c) Le modèle de la figure 2 correspond au schéma de Giacoletto rappelé à la figure 5.

Fig. 5.



Montrer que l'admittance de neutrodynage $\underline{Y}_n$ peut être réalisée par l'association d'une résistance R_n et d'une capacité C_n en parallèle.
Calculer R_n et C_n en fonction de C_c, r_{bc} et du rapport de transformation m.
d) *Application numérique :*
$m = 10$, $C_c = 0{,}5$ pF, $r_{bc} = 10$ MΩ, fréquence de travail $f = 5$ MHz.
Calculer les éléments R_n et C_n ainsi que les éléments C'_n et r_n du schéma série équivalent. Quelle est la structure qui semble la plus judicieuse?
e) Le transistor étant ainsi neutrodyné, comment se modifie le schéma de la figure 5.
Application numérique :
$r_{be} = 2$ kΩ, $C_c = 10$ pF, $r_{ce} = 100$ kΩ, $g_m = 100$ mA/V.

2° Le transistor (*fig.* 6) est chargé par :
- Un circuit résonnant constitué par la mise en parallèle d'une inductance L, d'une résistance R_B, d'une capacité C_1.
- Une impédance (R_2, C_2) symbolisant l'impédance d'entrée de l'étage suivant.

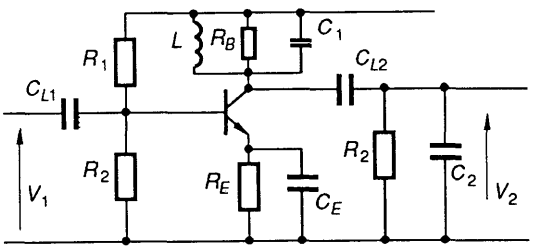


Fig. 6.

A la fréquence de travail, les capacités C_{L_1}, C_{L_2} et C_E peuvent être considérées comme des courts-circuits.
Le transistor est représenté par le modèle de la figure 7.

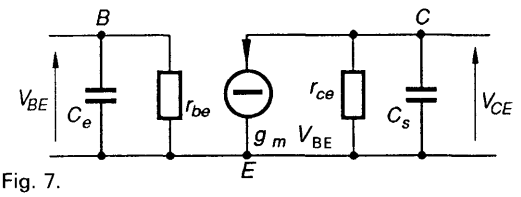


Fig. 7.

La résistance $R_{eq} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ est supposée très grande devant r_{be}.
a) Représenter le schéma équivalent de l'étage. Le réduire à la forme la plus simple en faisant apparaître un circuit R, L, C en sortie. Donner l'expression de R, L et C en fonction de r_{ce}, R_2, R_B, C_1, C_2, C_S et L.
b) Montrer que la fonction de transfert en tension se met sous la forme :

$$\underline{A} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{-A_0}{1 + jQ_0\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

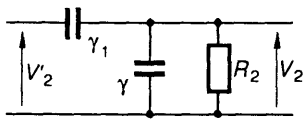
Donner les expressions de A_0, Q_0 et ω_0.
c) Montrer qu'il s'agit d'un étage sélectif dont on précisera l'amplification maximale, la fréquence centrale f_0, et la bande passante à 3 dB.
d) On donne
$g_m = 100$ mA/V; $r_{ce} = 50$ kΩ; $C_S = 0{,}5$ pF; $R_2 = 2$ kΩ; $C_2 = 15$ pF; $C_S = 0{,}5$ pF; $L = 10^{-6}$ H; $R_B = 3$ kΩ.

La fréquence centrale f_0 étant de 5 MHz, calculer la capacité C_1, l'amplification maximale et la bande passante à 3 db.

On désire obtenir une bande passante de 100 KHz. Pour ce faire, on réalise une adpatation d'impédance entre l'impédance (R_2, C_2) et le transistor.

3° *a*) On utilise, dans ce but, le circuit de la figure 8.

Fig. 8.



Calculer l'admittance d'entrée $\underline{Y}_e$ de ce circuit et l'écrire sous la forme $\underline{Y}_e = G_e + jB_e$.

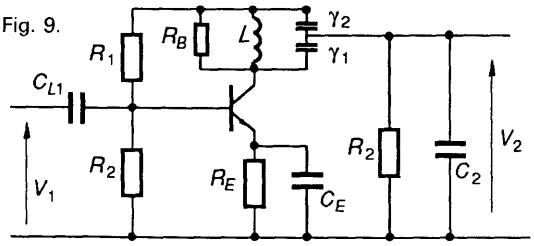
Exprimer G_e et B_e en fonction de R_2, γ_1, γ et ω.

En déduire les expressions de la résistance d'entrée R_e et de la capacité d'entrée C_e en fonction de R_2, γ_1, γ et ω. Que deviennent ces expressions lorsque $R_2\gamma\omega \gg 1$.

Calculer alors la fonction de transfert en tension $\underline{V}_2/\underline{V}'_2$ en fonction de γ_1 et γ.

b) L'adaptation d'impédance est réalisée en pratiquant une prise capacitive (*fig.* 9).

Fig. 9.



Représenter le schéma équivalent de l'étage.

On suppose : $R_2(C_2 + \gamma_2)\omega \gg 1$,

En posant $\mu = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2 + C_2}$,

calculer la résistance R_e et la capacité C_e de la charge ramenée au niveau du collecteur en fonction de R_2, γ_2, C_2 et μ.

Mettre en évidence un circuit RLC en parallèle sur le circuit collecteur.

Exprimer R, L et C en fonction de r_{ce}, R_e, R_B, C_S, C_e et L.

En déduire $\dfrac{\underline{V}'_2}{\underline{V}_1}$ puis $\dfrac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}$. Calculer l'amplification maximale en fonction de R_2, R_B et μ (on supposera $r_{ce} \gg R_B$).

Pour quelle valeur de μ cette amplification est-elle, elle-même, maximale? Effectuer l'application numérique.

On choisit en fait $\mu = 0{,}5$. Calculer numériquement les capacités γ_1 et γ_2 ainsi que la nouvelle bande passante.

Quelle doit être la valeur de la résistance totale R sur le collecteur pour obtenir une bande passante de 100 kHz? En déduire la valeur de la résistance à placer en parallèle sur la résistance R_2 pour obtenir la bande passante souhaitée.

4.

On étudie l'étage amplificateur de la figure 1, comprenant deux transistors complémentaires au silicium.

On dispose des courbes caractéristiques des transistors (*fig.* 5) : elles sont identiques pour chacun; seul le signe des grandeurs concernées est changé selon qu'il s'agit du transistor NPN ou du PNP.

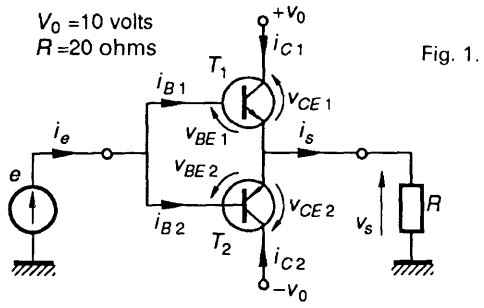


Fig. 1.

On admet que :

- la caractéristique $I_B(V_{BE})$ est indépendante de la tension collecteur-émetteur V_{CE} en fonctionnement normal;
- le courant résiduel de collecteur I_{CE_0} est négligeable.

On donne : $V_0 = 10$ V; $R = 20\ \Omega$ (voir *fig.* 1).

L'étage est excité par un générateur parfait de tension sinusoïdale : $e(t) = E \sin \omega t$.

1° Analyse du fonctionnement

a) Décrire rapidement le fonctionnement de l'étage pour chacune des alternances de $e(t)$ dans les deux cas suivants : $E \leqslant 0{,}5$ V, $E > 0{,}5$ V.

Quelle est la classe de fonctionnement de chacun des transistors?

b) Dans le réseau $I_C(V_{CE})$, tracer, en la justifiant, la droite de charge du transistor (T_1); y placer le point de repos Q_1 de (T_1).

Quelles sont les coordonnées (I_{C_2}, V_{CE_2}) du point de repos Q_2 de (T_2)?

c) Dans le plan $I_C(I_B)$, tracer la courbe de transfert en courant de (T_1) en fonctionnement.

Déduire du graphique les valeurs du courant collecteur i_{C_1}, puis de la tension de sortie v_S et de la tension d'entrée e pour les valeurs suivantes de la tension base-émetteur v_{BE} :

$v_{BE}(V)$	0	0,2	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9

Pour quelle valeur de v_{BE} le transistor est-il saturé?

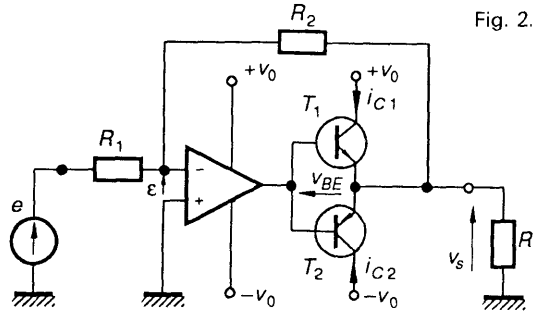
Quelle est la valeur correspondante de e?

d) Tracer, à partir des résultats précédents, la courbe de transfert en tension $v_S = f(e)$ de l'étage pour e variant de -10 V à $+10$ V.

Indiquer la valeur de crête de $e(t)$ au seuil de conduction des transistors.

2° Amélioration de l'étage (*fig.* 2).

Fig. 2.



On adjoint au montage précédent un amplificateur et on soumet l'ensemble à une réaction par R_2 et R_1. La charge est constituée par la résistance R; la tension d'entrée est $e(t)$.

On admet que l'amplificateur, dans son domaine linéaire et pour la bande de fréquences considérées, présente :

- une impédance d'entrée infinie,
- une impédance de sortie nulle,
- une amplification en tension $A = -10^4$.

Il peut donc être représenté par le schéma de la figure 3.

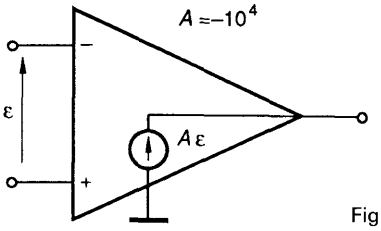


Fig. 3.

a) Calculer e en fonction de v_S, v_{BE} et A.

On donne $R_1 = R_2 = 100$ kΩ. A quelle valeur, le seuil de conduction est-il abaissé dans ce montage?

b) Montrer que pour $|e| > 10$ mV, on a $v_S \approx -e$. Conclure.

c) Quelle est l'amplification en puissance du montage de la figure 2?

3° Puissances mises en jeu

On s'intéresse au montage amélioré de la figure 2 qui permet d'admettre que, si $e(t)$ est sinusoïdal d'amplitude donnée E, $v_S(t) = -e(t)$ est parfaitement sinusoïdal et de même amplitude.

On pose : $E = k \cdot V_0$

de sorte que $e(t) = k \cdot V_0 \cdot \sin \omega t$

et $v_S(t) = -k \cdot V_0 \cdot \sin \omega t$.

On admet, dans cette partie, que k peut varier de 0 à 1.

a) Donner les représentations graphiques de $i_{C_1}(t)$ et $i_{C_2}(t)$, puis de $v_{CE_1}(t)$ et $v_{CE_2}(t)$ dans quatre figures utilisant la même échelle pour les abscisses.

Exprimer, en fonction de k, les valeurs extrêmes atteintes.

b) Calculer en fonction de k, V_0 et R, les puissances moyennes :

- P_R dissipée par R,
- $P_{V_0^+}$ et $P_{V_0^-}$ fournie par chaque source d'alimentation des transistors,
- P_{T_1} et P_{T_2} dissipée dans chaque transistor (on néglige la dissipation dans la jonction base-émetteur).

Exprimer le rendement η de l'ensemble des deux transistors.

c) On fait varier l'amplitude $k \cdot V_0$ de $e(t)$.

Pour quelle valeur k_0 de k la puissance dissipée P_{T_1} est-elle maximale? Que valent alors P_{T_1}, P_R et η?

4° Distorsion harmonique en signaux forts

a) Étude préliminaire

- On applique à l'entrée du montage de la figure 1, une tension continue $e = 11$ V. Que pensez-vous du fonctionnement du transistor (T_1)?
- On applique à l'entrée du montage de la figure 2, une tension continue $e = -11$ V. Les tensions de saturation de l'amplificateur sont $+V_0$ et $-V_0$. Que pensez-vous du fonctionnement de l'amplificateur et du fonctionnement du transistor (T_1)?

b) Pour un signal $e(t)$ sinusoïdal à l'entrée et d'amplitude suffisante, on observe à l'oscillographe la courbe $v_S(t)$ représentée à la figure 4.

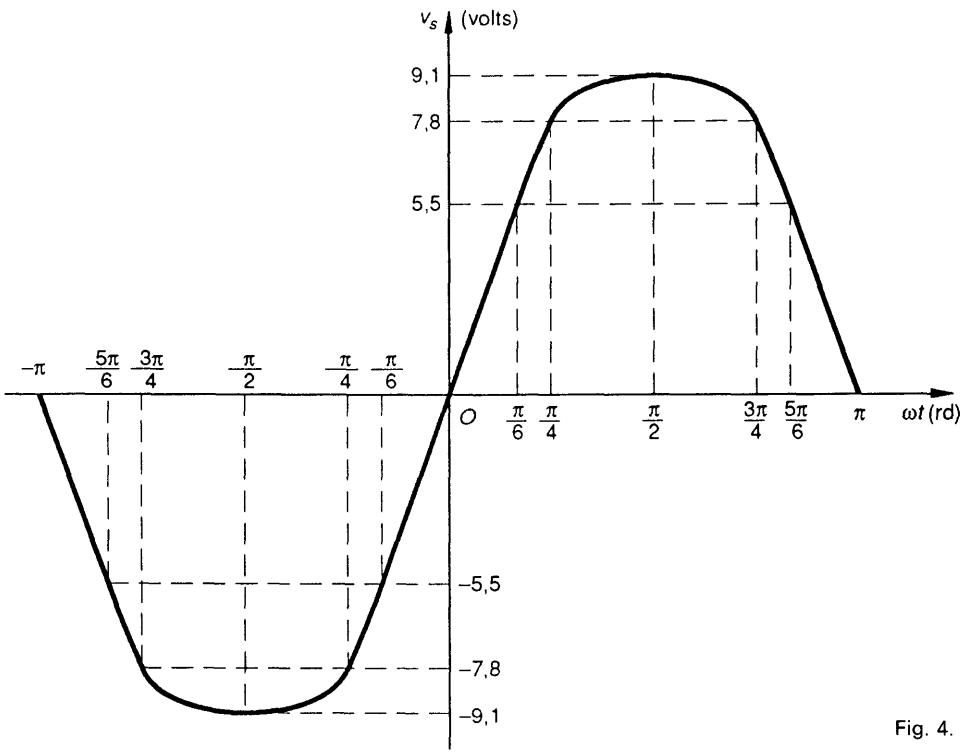


Fig. 4.

Justifier que la décomposition en série de Fourier de $v_S(t)$ peut s'écrire :

$$v_S(t) = V_1 \sin \omega t + V_3 \sin 3\omega t + V_5 \sin 5\omega t,$$

en admettant que les termes harmoniques d'ordre supérieur à cinq ont des amplitudes négligeables par rapport à celles des harmoniques précédents.

c) En procédant par identification aux valeurs remarquables de $v_S(t)$ $\left(\text{pour } \omega t = \frac{\pi}{6},\ \omega t = \frac{\pi}{4} \text{ et } \omega t = \frac{\pi}{2}\right)$, calculer numériquement V_1, V_3 et V_5.

En déduire le taux de distorsion de $v_S(t)$.

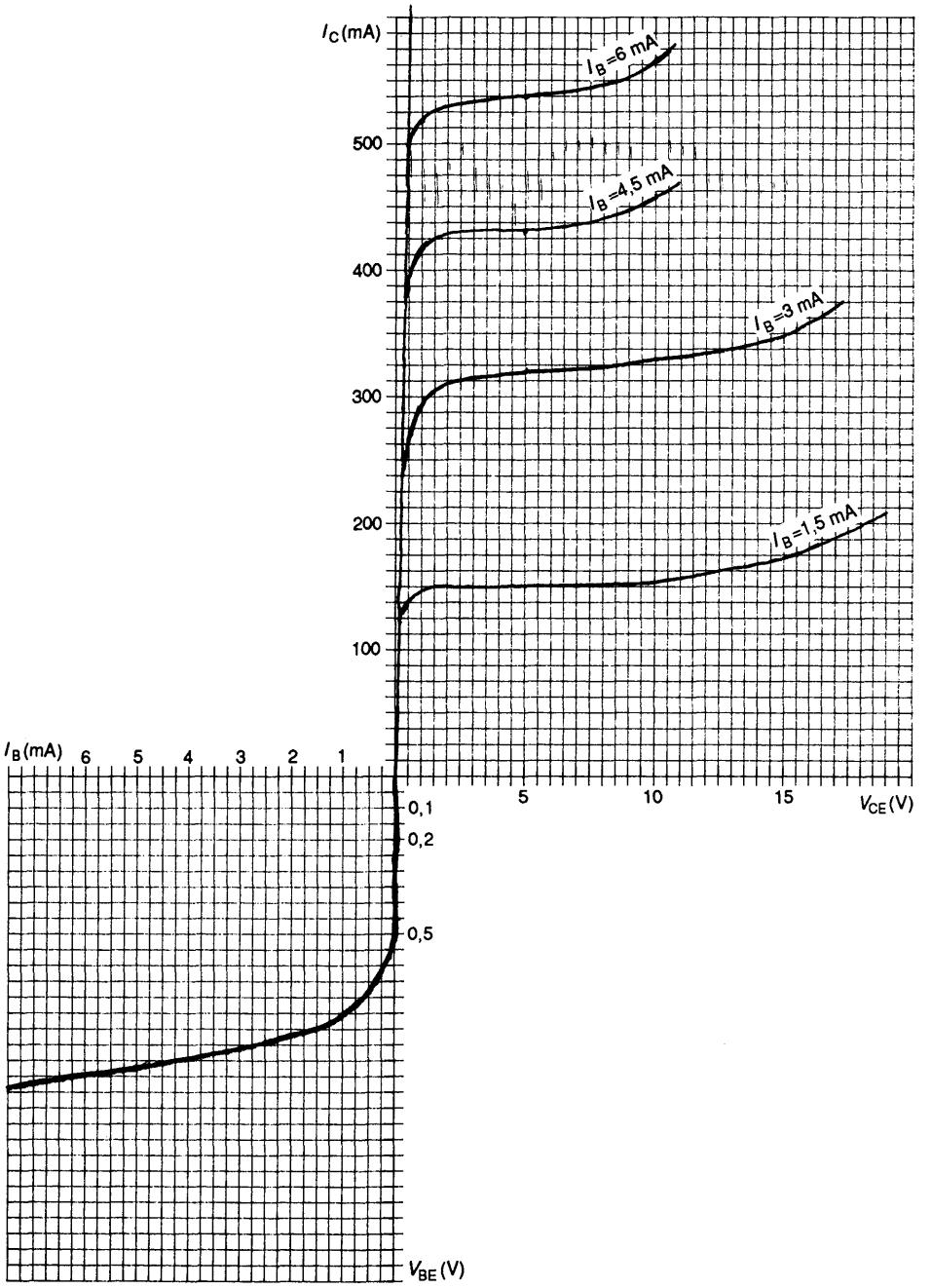


Fig. 5.

4 le transistor à effet de champ

1. DESCRIPTION DU TRANSISTOR À EFFET DE CHAMP À JONCTIONS (J.FET ou TEC)

Cette famille de transistor est décrite sous le vocable J.FET (abréviation de *jonction field effect transistor*) ou de TEC (abréviation de transistor à effet de champ).

La structure interne d'un TEC à canal N est décrite à la figure 1.

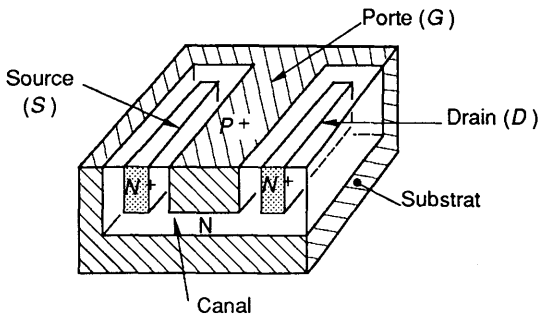
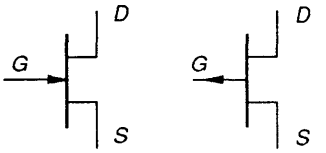


Fig. 1

- **La porte,** constituée d'un semi-conducteur de type P, fortement dopé (notation P^+) est reliée au substrat.
- L'espace entre porte et substrat délimite une zone, appelée **canal,** constituée d'un semi-conducteur de type N.
- Deux zones de type N, fortement dopées, (notation N^+) sont placées de part et d'autre du canal. Elles sont appelées respectivement **source** et **drain.**
- Des contacts métalliques, permettant l'accès au J.FET, sont fixées respectivement sur la source S, le drain D et la porte G (en anglais *gate*). Le fort dopage N^+ de la source et du drain permet d'améliorer les contacts électriques.

Le composant obtenu en permutant les semi-conducteurs de type P et de type N est un J.FET à canal P. Les symboles correspondants sont donnés à la figure 2. La flèche qui repère la porte indique le sens passant de la jonction porte-canal si elle était polarisée en direct.



J-FET canal N J-FET canal P Fig. 2

2. FONCTIONNEMENT DU J.FET

En fonctionnement normal, **la jonction porte canal est polarisée en inverse,** ce qui correspond au dispositif de la figure 3.

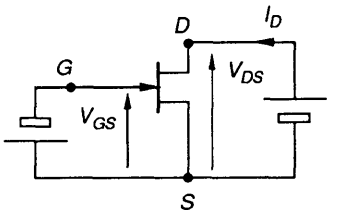


Fig. 3

Compte tenu des générateurs de tension extérieurs, la jonction porte-canal est plus fortement polarisée en inverse du côté du drain que du côté de la source.

La structure interne correspondante est donnée à la figure 4.

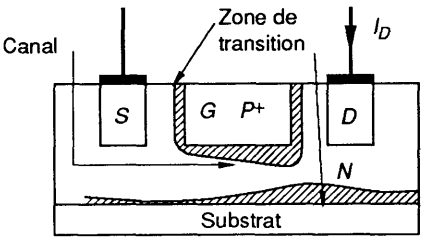


Fig. 4

Les porteurs mobiles, qui sont à l'origine du courant de drain I_D, empruntent le canal pour se déplacer de la source vers le drain.

Nous avons vu, lors de l'étude de la jonction *P-N*, qu'il apparaît au voisinage de la jonction une zone de transition dépourvue de porteurs mobiles qui pénètre d'autant plus profondément à l'intérieur d'un des semi-conducteurs, qu'il est moins dopé par rapport à l'autre. La porte étant fortement dopée, la zone de transition envahit le canal, et ce d'autant plus que la tension inverse appliquée à la jonction porte-canal est plus grande. Cette zone de transition est donc plus large du côté du drain que du côté de la source.

Lors de leur déplacement de la source vers le drain, les porteurs mobiles (ici les électrons) ne peuvent emprunter que la partie conductrice du canal. La zone de transition, dépourvue de porteurs mobiles, diminue l'espace utilisable par les électrons et modifie la résistance du canal.

A la limite, si la tension V_{GS} est suffisamment négative, la zone de transition envahit tout le canal, ne laissant aucun passage disponible pour les porteurs mobiles et annulant ainsi le courant I_D.

En conclusion.

Dans un premier temps nous dirons que le J.FET est une résistance variable qui dépend des tensions V_{GS} et V_{DS}.

3. MISE EN ÉQUATIONS

Afin d'établir les équations du J.FET, nous idéaliserons le canal conformément au schéma de la figure 5.

Les potentiels sont mesurés par rapport au plan *yz* de la source.

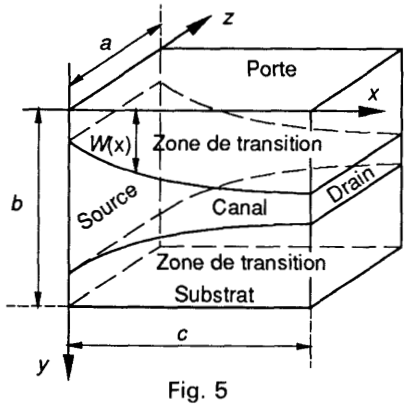


Fig. 5

Nous supposerons que le potentiel est constant et égal à V_{GS} sur tout le plan *xz* de la porte et sur tout le plan du substrat.

Nous supposerons de plus que le potentiel est constant sur toute section verticale du canal utilisable par les porteurs mobiles.

La largeur $W(x)$ de la zone de transition au point d'abscisse x dépend de la tension inverse $V_{GS} - V_S(x)$ appliquée à la jonction porte-canal au point d'abscisse x. Afin de préciser cette relation, considérons à la figure 6 une tranche de zone de transition de largeur $W(x)$ et d'épaisseur dx.

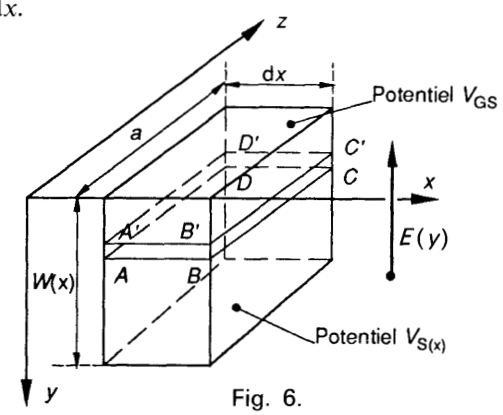


Fig. 6.

Par symétrie, le vecteur champ électrique, en tout point de ce volume est perpendiculaire au plan *xz*, orienté vers les potentiels décroissants, (c'est-à-dire vers le haut) et sa valeur $E(y)$ ne dépend que de la profondeur y. Soit N_D la concentration en atomes donneurs du semi conducteur *N* du canal et soit ε sa permittivité; la zone de transition (donc aussi le volume $aW(x)\,\mathrm{d}x$) possède N_D charges de valeur $+e$ par unité de volume.

Par application du Théorème de Gauss au parallélépipède $ABCDA'B'C'D'$ de surface $a\,\mathrm{d}x$ et de hauteur dy, nous écrivons :

$$a\,\mathrm{d}x\,E(y) - a\,\mathrm{d}x\,E(y + \mathrm{d}y) = \frac{N_D\,e\,a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\varepsilon}$$

soit

$$\mathrm{d}E(y) = -\frac{N_D\,e}{\varepsilon}\,\mathrm{d}y.$$

Le champ électrique est nul sur le plan *xz* de la porte car le potentiel est constant et égal à V_{GS} dans tout le semi conducteur *P* de la porte.

L'intégration de l'équation $\mathrm{d}E(y) = -\frac{N_D\,e}{\varepsilon}\,\mathrm{d}y$

conduit à $E(y) = -\frac{N_D\,e}{\varepsilon}\,y.$

Par intégration, le long d'une verticale, de l'équation $dV = -E(y)\,dy$, il vient

$$V_S(x) - V_{GS} = \int_0^{W(x)} -E(y)\,dy = \int_0^{W(x)} \frac{N_D e}{\varepsilon} y\,dy = \frac{N_D e}{2\varepsilon} W^2(x)$$

soit

$$W(x) = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{N_D e}[V_S(x) - V_{GS}]}.$$

Revenons au schéma de la figure 5. Pour aller de la source vers le drain, les porteurs mobiles empruntent un conducteur dont la section

$$S = a[b - 2W(x)]$$

dépend de l'abscisse x.

Nous avons établi, dans le chapitre semi conducteurs (paragraphe 6) que la conductivité d'un semi conducteur de type N s'écrit $\sigma = eN_D\mu_n$ où μ_n est la mobilité des électrons.

Pour un déplacement dx suivant l'axe des x, la variation $dV_S(x)$ du potentiel s'écrit :

$$dV_S(x) = \frac{1}{\sigma}\frac{dx}{S} I_D = \frac{1}{eN_D\mu_n a[b - 2W(x)]} I_D\,dx.$$

Soit V_{DS} le potentiel du drain par rapport à la source. L'intégration, de la source vers le drain, de l'équation précédente

$$I_D\,dx = eN_D\mu_n a \left[b - 2\sqrt{\frac{2\varepsilon}{eN_D}(V_S(x) - V_{GS})}\right] dV_S(x)$$

conduit à :

$$c\,.\,I_D = eN_D\mu_n a\left[bV_S(x) - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{eN_D}}(V_S(x) - V_{GS})^{3/2}\right]_0^{V_{DS}}$$

$$I_D = \frac{2eN_D\mu_n a}{c}\left[\frac{b}{2}V_{DS} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{eN_D}}(-V_{GS})^{3/2} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{eN_D}}(V_{DS} - V_{GS})^{3/2}\right].$$

Cette équation qui exprime la relation entre le courant de drain I_D et les tensions V_{GS} et V_{DS} appliquées au J.FET (*fig.* 3) est inexploitable sous cette forme. Nous allons cependant en tirer des conséquences ayant des applications pratiques.

Remarquons que, V_{GS} étant négatif et V_{DS} positif, les expressions $(-V_{GS})^{3/2}$ et $(V_{DS} - V_{GS})^{3/2}$ ne posent pas de problèmes mathématiques.

Étudions les variations du courant I_D, en fonction de la tension V_{DS}, lorsque la tension V_{GS} est constante et égale à zéro. Nous prévoyons, qualitativement, que pour les fortes valeurs de V_{DS}, la zone de transition pénètre de plus en plus profondément à l'intérieur du canal. Une augmentation de V_{DS} se traduit alors par une élévation de la résistance du canal, contrariant ainsi l'augmentation de I_D. Il est dès lors probable que la relation $I_D = f(V_{DS})$ présente un maximum pour une valeur donnée de V_{DS}. Afin de le vérifier mathématiquement, dérivons I_D par rapport à V_{DS} en maintenant V_{GS} constant et égal à zéro.

$$\frac{dI_D}{dV_{DS}} = \frac{2eN_D\mu_n a}{c}\left[\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{2\varepsilon}{eN_D}}(V_{DS})^{1/2}\right]$$

$\frac{dI_D}{dV_{DS}}$ s'annule pour $V_{DS} = \frac{eN_D}{8\varepsilon} b^2$.

Nous appellerons *tension de pincement*, V_p, cette valeur de V_{DS} : $\left(V_p = \frac{eN_D b^2}{8\varepsilon}\right)$.

Le courant I_D, passe ainsi par un maximum que l'on appelle I_{DSS} (courant de saturation de drain à $V_{GS} = 0$) et qui s'exprime par :

$$I_{DSS} = \frac{2eN_D\mu_n a}{c}\left[\frac{b}{2}\frac{eN_D b^2}{8\varepsilon} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{eN_D}}\left(\frac{eN_D}{8\varepsilon}\right)^{3/2} b^3\right],$$

ou bien en remarquant que $\sqrt{\frac{2\varepsilon}{eN_D}} = \frac{b}{2\sqrt{V_p}}$:

$$I_{DSS} = \frac{2eN_D\mu_n ab}{c}\left[\frac{V_p}{2} - \frac{2}{6}\frac{1}{\sqrt{V_p}}(V_p)^{3/2}\right] = \frac{eN_D\mu_n ab}{c}\frac{V_p}{3}$$

Remarquons en passant que $\frac{eN_D\mu_n ab}{c}$ est la conductance que présenterait le canal s'il n'était pas encombré par les zones de transition.

4. CARACTÉRISTIQUES DU J.FET

Le transistor à effet de champ est relié aux circuits extérieurs par trois connexions (porte, source, drain).

Afin de pouvoir considérer le J.FET comme un quadripôle, il faut mettre une de ces connexions en commun entre l'entrée et la sortie (*fig.* 7).

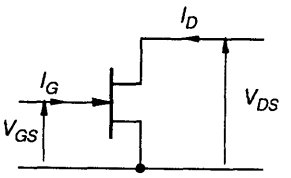


Fig. 7.

L'utilisation la plus commune du J.FET étant le montage source commune, nous établirons les caractéristiques pour ce type de montage (*fig.* 7),

. I_G et V_{GS} sont les grandeurs d'entrées,

. I_D et V_{DS} sont les grandeurs de sorties.

Le fonctionnement d'un quadripôle est décrit par deux équations entre les grandeurs d'entrées I_G et V_{GS} et les grandeurs de sorties I_D et V_{DS}.

Sachant que le courant I_D dépend des tensions V_{GS} et V_{DS}, ces équations sont établies sous la forme :

$$\begin{cases} I_G = f(V_{GS}, V_{DS}) \\ I_D = f(V_{GS}, V_{DS}) \end{cases}$$

4.1. CARACTÉRISTIQUE $I_D = f(V_{DS})$ À TENSION V_{GS} CONSTANTE

4.1.1. Caractéristique $I_D = f(V_{DS})$ à $V_{GS} = 0$

Il a été montré au paragraphe 3 que cette caractéristique, image de l'équation

$$I_D = \frac{2eN_D\mu_n a}{c}\left[\frac{b}{2}V_{DS} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{eN_D}}(V_{DS})^{3/2}\right],$$

passe par un maximum

$$I_D = I_{DSS} = \frac{eN_D\mu_n ab}{c}\frac{V_p}{3}$$

pour $V_{DS} = V_p = \dfrac{eN_D}{8\varepsilon}\, b^2$.

Pour les valeurs de V_{DS} supérieures à V_p, une correction doit être apportée à la théorie précédente.

En effet, lorsque V_{DS} augmente, $W(x)$ augmente, limitant la largeur $b - 2W(x)$ du canal emprunté par les porteurs mobiles. Il apparaît ainsi une zone de très faible section μ (*fig.* 8). La résistance de cette partie du canal est donc très élevée et la quasi totalité de la tension V_{DS} se trouve appliquée à une portion de canal de longueur l et de largeur μ. Nous avons montré, d'après l'équation $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$, que le champ électrique en un point est d'autant plus intense que le potentiel varie rapidement sur une faible distance.

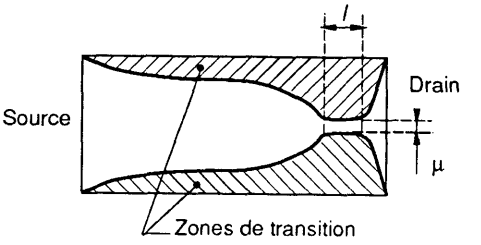


Fig. 8.

Le champ électrique $\vec{E}$ est ainsi très intense dans la zone d'étranglement. D'après la relation $V_n = \mu_n E$, les électrons devraient y atteindre des vitesses très élevées. En pratique cette vitesse est limitée et la relation $V_n = \mu_n E$ n'est valable que pour des champs électriques dont l'intensité ne dépasse pas 10^3 V/cm. Pour des intensités de champ plus élevées, la mobilité μ_n est inversement proportionnelle à E.

En fait, lorsque la tension V_{DS} devient supérieure à la tension de pincement V_p, la longueur l de la zone d'étranglement augmente mais sa largeur μ ainsi que le courant I_D restent constants.

La figure 9 donne l'allure de la caractéristique

$$I_D = f(V_{DS}) \quad \text{à} \quad V_{GS} = 0.$$

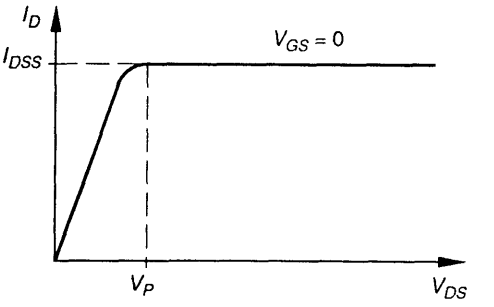


Fig. 9.

Les formules établies au paragraphe 3, ne sont donc valables que pour les valeurs de V_{DS} inférieures à la tension de pincement V_p. Cependant l'expression de I_{DSS} correspond à la valeur constante du courant I_D pour les valeurs de V_{DS} supérieures à V_p.

4.1.2. Caractéristique $I_D = f(V_{DS})$ à $V_{GS} < 0$

L'équation générale de cette caractéristique est (voir paragraphe 2) :

$$I_D = \frac{eN_D\mu_n ab}{3c}\left[3V_{DS} + 2\sqrt{\frac{8\varepsilon}{eN_Db^2}}(-V_{GS})^{3/2} - 2\sqrt{\frac{8\varepsilon}{eN_Db^2}}(V_{DS}-V_{GS})^{3/2}\right]$$

Soit en utilisant les expressions

$$I_{DSS} = \frac{eN_D\mu_n ab}{c}\frac{V_p}{3} \quad \text{et} \quad V_p = \frac{eN_Db^2}{8\varepsilon}$$

$$I_D = I_{DSS}\left[\frac{3V_{DS}}{V_p} + 2\left(-\frac{V_{GS}}{V_p}\right)^{3/2} - 2\left(\frac{V_{DS}-V_{GS}}{V_p}\right)^{3/2}\right].$$

Afin de déterminer un éventuel maximum de la caractéristique $I_D = f(V_{DS})$ dérivons I_D par rapport à V_{DS} en maintenant V_{GS} constant :

$$\frac{dI_D}{dV_{DS}} = I_{DSS}\left[\frac{3}{V_p} - 3\frac{(V_{DS}-V_{GS})^{1/2}}{V_p^{3/2}}\right] = \frac{3I_{DSS}}{V_p}\left[1 - \left(\frac{V_{DS}-V_{GS}}{V_p}\right)^{1/2}\right].$$

$\frac{dI_D}{dV_{DS}}$ s'annule pour

$$V_{DS} - V_{GS} = V_p \quad \text{soit} \quad V_{DS} = V_p + V_{GS}$$

La valeur maximale de I_D s'établit ainsi à :

$$I_{DM} = I_{DSS}\left[3 + 3\frac{V_{GS}}{V_p} + 2\left(\frac{-V_{GS}}{V_p}\right)^{3/2} - 2\right] = I_{DSS}\left[1 + 3\frac{V_{GS}}{V_p} + 2\left(\frac{-V_{GS}}{V_p}\right)^{3/2}\right].$$

REMARQUES

- *La tension V_{GS} étant négative, le maximum de la caractéristique est atteint pour une valeur de V_{DS} inférieure à V_p. Par remplacement de V_{GS} par $V_{DS} - V_p$, dans l'équation de I_{DM}, nous obtenons le lieu des maximums :*

$$I_{DM} = I_{DSS}\left[1 + \frac{3V_{DS}}{V_p} - 3 + 2\left(\frac{V_p - V_{DS}}{V_p}\right)^{3/2}\right]$$

$$I_{DM} = I_{DSS}\left[-2 + \frac{3V_{DS}}{V_p} + 2\left(1 - \frac{V_{DS}}{V_p}\right)^{3/2}\right]$$

que l'on peut approximer (voir figure 10) par $I_D = I_{DSS}\frac{V_{DS}^2}{V_p^2}$.

- *Lorsque la tension V_{DS} devient supérieure à $V_p + V_{GS}$, les expressions précédentes ne sont plus valables par suite de la forte intensité du champ électrique que fait apparaître le pincement du canal. Le courant de drain I_D reste alors constant et égal à* $I_{DSS}\left[1 + 3\frac{V_{GS}}{V_p} + 2\left(-\frac{V_{GS}}{V_p}\right)^{3/2}\right]$.

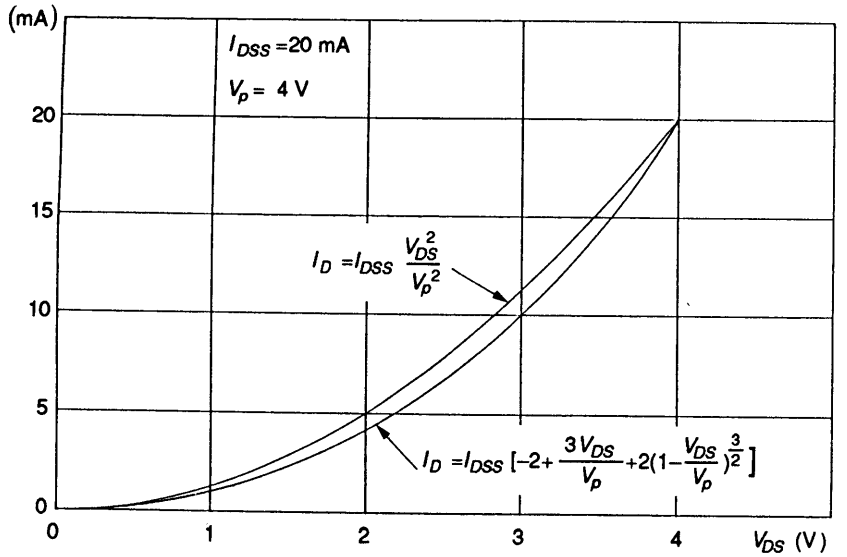


Fig. 10.

• *La tension V_{GS} étant négative, pour les valeurs de V_{GS} supérieures à $-V_p$, la quantité*

$$\frac{3V_{GS}}{V_p} + 2\left(-\frac{V_{GS}}{V_p}\right)^{3/2}$$

est négative. Le courant de drain se stabilise donc à une valeur inférieure à I_{DSS}.

• *Lorsque la tension V_{GS} est égale à $-V_p$, le courant de drain maximum*

$$I_{DM} = I_{DSS}\left[1 + 3\frac{V_{GS}}{V_p} + 2\left(-\frac{V_{GS}}{V_p}\right)^{3/2}\right]$$

est nul.

La caractéristique $I_D = f(V_{DS})$ à $V_{GS} = -V_p$ se réduit donc à la droite $I_D = 0$. Pour cette valeur de V_{GS}, le canal se trouve complètement pincé interdisant ainsi le passage des électrons mobiles à l'origine du courant I_D. Partant de là, tout accroissement du module de la tension V_{GS} ne peut que pincer plus fortement le canal et toutes les caractéristiques $I_D = f(V_{DS})$ pour $V_{GS} < -V_p$ sont confondues avec la droite $I_D = 0$.

Cette valeur de $V_{GS} = -V_p$ est appelée tension de seuil (en anglais thresold*). Elle est notée V_{GSoff} ou V_{GSth}.*

• *Notons que les paramètres de l'équation $I_D = f(V_{DS}, V_{GS})$ s'expriment uniquement en fonction de I_{DSS} et de $V_{GSoff} = -V_p$:*

$$I_D = I_{DSS}\left[-3\frac{V_{DS}}{V_{GSoff}} + 2\left(\frac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^{3/2} - 2\left(\frac{V_{GS} - V_{DS}}{V_{GSoff}}\right)^{3/2}\right].$$

I_{DSS} *(courant de saturation de drain à $V_{GS} = 0$) et* ***V_{GSoff}*** *(tension de seuil) constituent deux* ***paramètres essentiels du J.FET****. Ils sont toujours indiqués par le constructeur.*

• *Pour les valeurs de V_{DS} très inférieures à $-V_{GSoff}$, l'équation de I_D*

$$I_D = I_{DSS}\left[-3\frac{V_{DS}}{V_{GSoff}} + 2\left(\frac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^{3/2} - 2\left(\frac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{V_{DS}}{V_{GS}}\right)^{3/2}\right]$$

peut être approximée en effectuant un développement limité au premier ordre :

$$\left(1 - \frac{V_{DS}}{V_{GS}}\right)^{3/2} \approx 1 - \frac{3}{2}\frac{V_{DS}}{V_{GS}};$$

soit

$$I_D \approx -3V_{DS}\frac{I_{DSS}}{V_{GSoff}}\left[1 - \left(\frac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^{1/2}\right].$$

Le transistor à effet de champ apparaît ainsi entre drain et source comme une résistance :

$$R_{DS} = \frac{R_{DSON}}{1 - \left(\frac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^{1/2}}$$

avec $$R_{DSON} = \frac{-V_{GSoff}}{3I_{DSS}}$$

Certains constructeurs utilisent la formule approchée :

$$R_{DS} = \frac{R_{DSON}}{1 - \frac{V_{GS}}{V_{GSoff}}},$$

avec $$R_{DSON} = \frac{-KV_{GSoff}}{I_{DSS}}$$

dans laquelle K varie entre 0,5 et 0,9 selon le type de transistor.

Cette approximation est justifiée dans la mesure où la formule théorique a été établie à partir d'un schéma idéalisé du canal et sans tenir compte de la résistance des semi conducteurs qui conduisent au canal.

La figure 11 donne les variations de R_{DS} en fonction de V_{GS} suivant la formule utilisée. Dans tous les cas R_{DS} tend vers l'infini lorsque V_{GS} se rapproche de V_{GSoff}.

Pour $V_{GS} = 0$, la résistance R_{DS} est minimale et vaut R_{DSON}. Cette résistance R_{DSON} est un paramètre important pour l'utilisation du J.FET en commutation. Elle est de l'ordre de quelques centaines d'ohms et peut être ramenée à des valeurs de l'ordre de cinq à dix ohms pour les J.FET de commutation.

En définitive, les caractéristiques $I_D = f(V_{DS})$ à V_{GS} constant, ont l'allure décrite à la figure 12 dans laquelle les graduations sont données à titre indicatif.

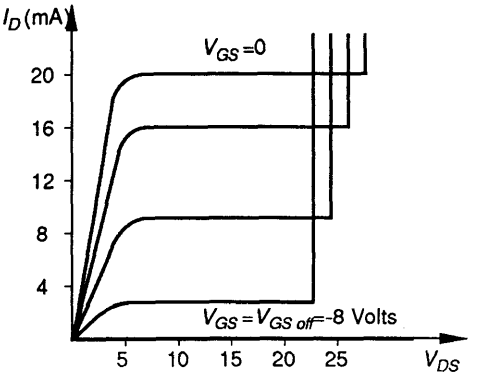


Fig. 12.

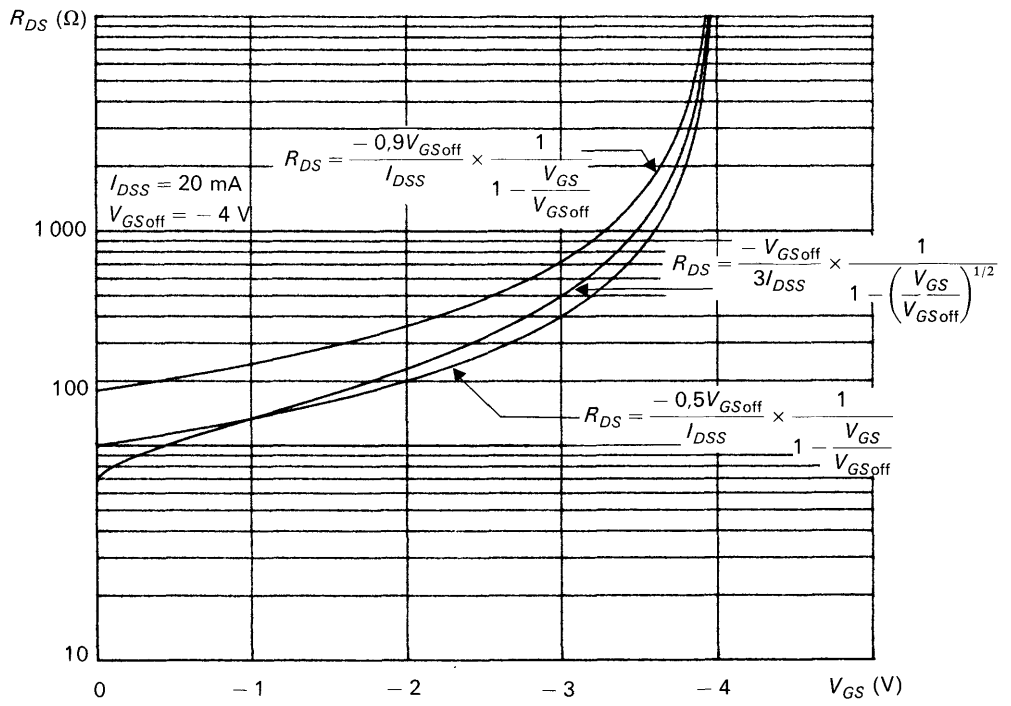


Fig. 11.

Nous y remarquons en outre que pour les fortes valeurs de V_{DS}, le courant de drain croît très rapidement et ce par suite du phénomène d'avalanche sur la jonction de porte.

L'avalanche apparaît pour des valeurs de V_{DS} plus faibles lorsque la jonction porte-canal est polarisée en inverse, ceci étant dû au fait que la tension inverse de porte s'ajoute à la tension de drain, accroissant ainsi la tension inverse effective sur la jonction porte-canal.

4.2. CARACTÉRISTIQUE $I_D = f(V_{GS})$ À V_{DS} = Cte

Cette caractéristique peut être déduite de la famille de caractéristiques $I_D = f(V_{DS})$ à V_{GS} constante, en traçant sur le graphe (*fig.* 12) une verticale correspondant à la valeur de V_{DS} maintenue constante et en relevant, pour chaque valeur de V_{GS}, la valeur de I_D, ordonnée du point d'intersection de cette verticale avec la caractéristique $I_D = f(V_{DS})$ tracée pour cette valeur de V_{GS}.

Pour les valeurs de V_{DS} supérieures à V_p, les caractéristiques $I_D = f(V_{DS})$ sont pratiquement horizontales si bien que la caractéristique $I_D = f(V_{GS})$, à V_{DS} constante, est indépendante de la valeur de V_{DS} lorsque celle-ci dépasse la tension de pincement V_p. Son équation a été établie dans le paragraphe précédent par :

$$I_D = I_{DM} = I_{DSS}\left[1 + 3\frac{V_{GS}}{V_p} + 2\left(-\frac{V_{GS}}{V_p}\right)^{3/2}\right]$$

soit

$$I_D = I_{DSS}\left[1 - 3\frac{V_{GS}}{V_{GSoff}} + 2\left(\frac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^{3/2}\right].$$

Cette courbe passe par le point d'ordonnée $I_D = I_{DSS}$ pour $V_{GS} = 0$ et par le point d'abscisse $V_{GS} = V_{GSoff}$ pour $I_D = 0$.

Cette expression de I_D en fonction de V_{GS} n'est pas d'un maniement aisé, aussi préfère-t-on l'approximer par l'équation :

$$I_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^2.$$

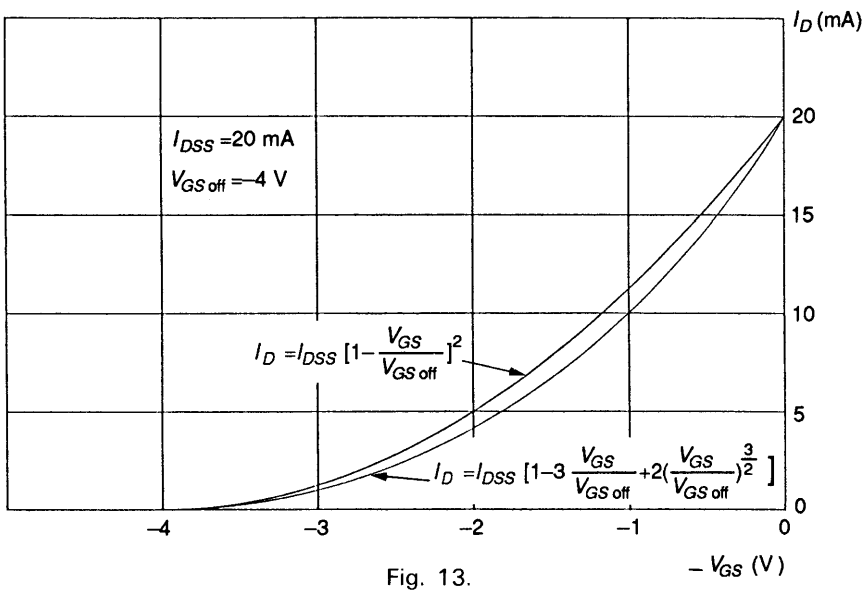


Fig. 13.

La figure 13 donne les variations de I_D en fonction de V_{GS} suivant la formule utilisée. Le faible écart observé entre les deux courbes justifie pleinement l'approximation parabolique.

4.3. CARACTÉRISTIQUE $I_G = f(V_{GS}, V_{DS})$

La jonction porte-canal étant polarisée en inverse, le courant de porte I_G est de l'ordre de 25 picoampères à quelques nanoampères suivant le type du transistor. Cette valeur étant toujours très faible, nous considérerons, sous réserve de corrections, que la caractéristique

$$I_G = f(V_{GS}, V_{DS})$$

se réduit à $I_G = 0$.

5. J.FET À CANAL *P*

Le J.FET à canal P est obtenu en inversant les semi conducteurs de type P et N ce qui entraîne, pour la polarisation, des tensions d'alimentation de signes opposés et des réseaux de caractéristiques inverses. Ce type de J.FET est très peu utilisé. En effet :

– la mobilité des trous étant plus faible que la mobilité des électrons, la résistance du canal est plus élevée ce qui conduit à un courant I_{DSS} moins important, pour une même valeur de V_{GSoff} $\left(V_{GSoff} = \frac{eN_D b^2}{8\varepsilon}\right.$ est indépendant de $\left.\mu_n\right)$;

– la tension d'alimentation du réseau drain source des J.FET canal N est positive comme la tension d'alimentation du réseau collecteur émetteur des transistors bipolaires NPN qui sont employés dans la plupart des dispositifs électroniques. Il est ainsi plus facile de les associer.

La principale raison d'être des J.FET à canal P est leur complémentarité avec les J.FET à canal N.

6. INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE

6.1. VARIATION DE V_{GSoff}

Nous avons vu, dans le chapitre semi conducteur (paragraphe 9.2), qu'en l'absence de polarisation extérieure, il apparaît sur une jonction P-N une barrière de potentiel V_0 de l'ordre de 0,65 volts. En l'absence de tension V_{GS}, le potentiel de la porte (de type P) par rapport à la source (de type N) s'établit donc à $-V_0$. L'application d'une tension V_{GS} négative fait passer cette barrière de potentiel à $V_{GS} - V_0$. Le pincement du canal apparaît lorsque la barrière de potentiel effective $V_{GS} - V_0$ atteint la valeur $V_{GSoff} - V_0$. Une élévation de température provoque une diminution de V_0 de 2,2 millivolts par degré. Le pincement du canal dépendant de la barrière de potentiel effective, se produit pour une tension V_{GSoff} ayant elle aussi diminué de 2,2 mV/°C.

En conclusion :

La tension de seuil V_{GSoff} diminue de 2,2 millivolts par degré.

6.2. VARIATION DE I_{DSS}

Au paragraphe 3, l'expression de I_{DSS} a été établie à :

$$I_{DSS} = \frac{2aeN_D\mu_n}{c}\left[\frac{b}{2}\frac{eN_Db^2}{8\mathcal{E}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{eN_D}}\left(\frac{eN_D}{8\mathcal{E}}\right)^{3/2}b^3\right].$$

Le seul paramètre susceptible de varier avec la température est la mobilité μ_n des électrons qui diminue lorsque la température augmente.

En conclusion

Le courant de saturation I_{DSS} diminue lorsque la température augmente.

Ce résultat était prévisible dans la mesure où le canal est un semi conducteur dopé dont la résistance augmente avec la température. Profitons-en pour signaler un avantage du J.FET sur le transistor bipolaire. Si, par suite de perturbations, il apparaît un point chaud dans le canal, la résistance y devient localement plus élevée, ce qui tend à redistribuer le courant loin du point chaud et ainsi à le faire disparaître. Par contre, un point chaud sur la jonction base-collecteur d'un transistor bipolaire y fait apparaître localement un excès de porteurs minoritaires qui en franchissant la jonction peuvent provoquer un phénomène d'avalanche.

Dans le même ordre d'idée, la mise en parallèle de plusieurs J.FET pose moins de problèmes que la mise en parallèle des transistors bipolaires. En effet, si d'aventure un des J.FET canalisait plus de courant que les autres, la température de son canal s'élèverait le rendant moins conducteur et ramenant ainsi l'ensemble vers un état d'équilibre.

6.3. POINT À DÉRIVE NULLE

Lorsque la température augmente, les variations de I_{DSS} et de V_{GSoff} provoquent une modification de la caractéristique $I_D = f(V_{GS})$.

L'examen de cette caractéristique (*fig.* 14) conduit à penser qu'il existe un point invariant avec la température. On peut montrer que ce « point à dérive nulle » est défini par :

$$I_D = I_{DSS}\left(\frac{2}{3V_{GSoff}}\right)^2 \text{ où } V_{GSoff} \text{ est en volts.}$$

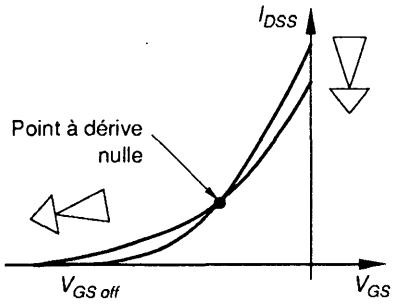


Fig. 14.

7. CAPACITÉS DU J.FET

Nous avons vu, dans le chapitre semi conducteurs (paragraphe 9.7.1), qu'une jonction polarisée en inverse présente une capacité qui varie en raison inverse de la racine carrée de la tension appliquée. Une capacité de cette sorte apparaît donc entre la source et le canal. Sa détermination précise n'est pas aisée car elle dépend de la différence de potentiel porte-canal. Or le potentiel varie le long du canal et sa répartition dépend des tensions V_{GS} et V_{DS}. Afin de simplifier l'étude, on symbolise la capacité porte-canal par deux capacités C_{GS} et C_{GD} placées respectivement entre la source et la porte et entre la porte et le drain (*fig.* 15).

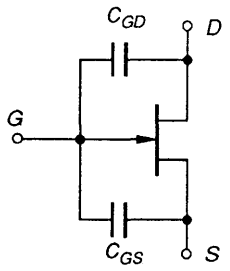


Fig. 15.

Il s'agit de capacités dynamiques (valables pour des petites variations autour des valeurs de polarisation) qui dépendent des tensions de polarisation V_{GS} et V_{DS}.

Les capacités C_{GS} et C_{GD} sont de l'ordre de 10 pF. Il faut noter, en outre, l'existence d'une capacité répartie dans le canal, C_{DS}, qui est beaucoup plus faible que les précédentes (de l'ordre de 0,1 pF).

Le constructeur indique :

• C_{iSS}, capacité mesurée entre porte et source pour des petites variations de V_{GS} (généralement autour de zéro), et pour une tension V_{DS} fixe indiquée. Vis-à-vis des petits signaux, la tension V_{DS} constante se comporte comme un court-circuit et la capacité C_{iSS} résulte de la mise en parallèle des capacités C_{GD} et C_{GS} soit :

$$C_{iSS} = C_{GS} + C_{GD}.$$

• C_{rSS}, capacité mesurée entre source et drain pour des petites variations de V_{DS} et pour une tension V_{GS} fixée (généralement zéro). La tension V_{GS} constante se comportant, vis-à-vis des petits signaux, comme un court-circuit, la capacité C_{rSS} résulte de la mise en parallèle des capacités C_{GD} et C_{DS}. La capacité C_{DS} étant négligeable devant C_{GD} on a sensiblement

$$C_{rSS} = C_{GD}$$

8. UTILISATION DU J-FET EN AMPLIFICATION

8.1. SCHÉMA ÉQUIVALENT POUR LES PETITES VARIATIONS

Les caractéristiques du J.FET (*fig.* 16) sont rappelées à la figure 17.

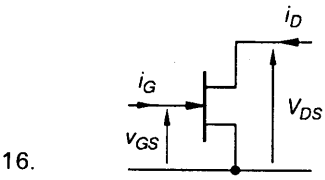


Fig. 16.

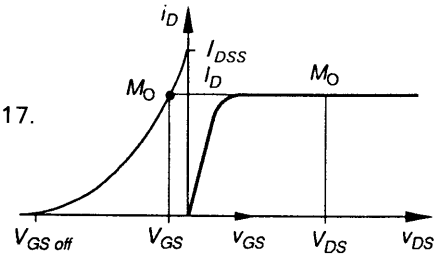


Fig. 17.

Supposons que l'on provoque de petites variations sinusoïdales (v_{gs}) de la tension v_{GS} autour de sa valeur de repos V_{GS}. Le point de fonctionnement se déplace autour du point M_0 et si les petites variations sont suffisamment faibles, la portion de caractéristique $i_D = f(v_{GS})$, décrite par le point de fonctionnement, est assimilable à une droite, et les petites variations i_d de i_D, autour de I_D, sont sinusoïdales.

Afin d'établir les relations existant entre les petites variations, nous les assimilerons à des différentielles.

Soit : $i_d = \mathrm{d}i_D$, $v_{gs} = \mathrm{d}v_{GS}$,
$i_g = \mathrm{d}i_G$, $v_{ds} = \mathrm{d}v_{DS}$.

A partir des équations $\begin{cases} i_D = f(v_{DS}, v_{GS}) \\ i_G = f(v_{DS}, v_{GS}) \end{cases}$, il vient, en effectuant une différentielle totale :

$$i_d = \mathrm{d}i_D = \left(\frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}}\right)_{v_{GS}=\mathrm{Cte}} \mathrm{d}v_{DS} + \left(\frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}}\right)_{v_{DS}=\mathrm{Cte}} \mathrm{d}v_{GS}$$

$$i_g = \mathrm{d}i_G = \left(\frac{\partial i_G}{\partial v_{DS}}\right)_{v_{GS}=\mathrm{Cte}} \mathrm{d}v_{DS} + \left(\frac{\partial i_G}{\partial v_{GS}}\right)_{v_{DS}=\mathrm{Cte}} \mathrm{d}v_{GS}$$

Le courant i_G étant pratiquement nul (quelques nanoampères au maximum) la deuxième équation se réduit à : $i_g = 0$

$\left(\frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}}\right)_{v_{GS}=\mathrm{Cte}}$ est la pente de la caractéristique $i_D = f(v_{DS})$.

Nous appellerons g_{ds} sa valeur autour du point de repos M_0. Soit $g_{ds} = \left(\frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}}\right)_{v_{GS}=V_{GS}}$.

$\left(\frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}}\right)_{v_{DS}=\mathrm{Cte}}$ est la pente de la caractéristique $i_D = f(v_{GS})$.

Nous appellerons g_m sa valeur autour du point de repos M_0. Soit : $g_m = \left(\frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}}\right)_{v_{DS}=V_{DS}}$.

Les relations entre les petites variations deviennent : $\begin{cases} i_d = g_m v_{gs} + g_{ds} v_{ds} \\ i_g = 0 \end{cases}$

Le schéma traduisant ces relations est donné à la figure 18. C'est le schéma équivalent du J.FET pour les petites variations.

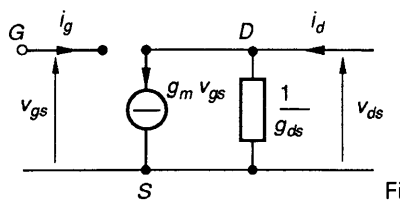


Fig. 18.

Ordre grandeur

g_m est de l'ordre de 0,1 à 10 mA/V.
$1/g_{ds}$ est de l'ordre de 100 kΩ à 1 MΩ.

REMARQUES

• *L'expression mathématique de g_m peut être obtenue à partir de l'approximation parabolique*

$$i_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{v_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^2.$$

$$\text{Soit } g_m = \left(\frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}}\right)_{v_{DS}=\text{Cte}} = \frac{-2I_{DSS}}{V_{GSoff}}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)$$

$$= \frac{-2I_{DSS}}{V_{GSoff}}\sqrt{\frac{I_D}{I_{DSS}}}$$

$$g_m = g_{mo}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right) = g_{mo}\sqrt{\frac{I_D}{I_{DSS}}}$$

avec $$g_{mo} = \frac{-2I_{DSS}}{V_{GSoff}}.$$

• *Pour les fréquences élevées il faut tenir compte des capacités parasites C_{GS}, C_{GD} et C_{DS}. Le schéma équivalent correspondant est donné à la figure 19.*

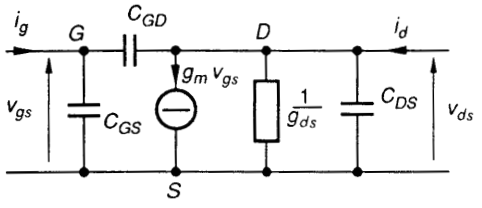


Fig. 19.

8.2. POLARISATION

La polarisation consiste à fixer la position du point de repos M_0 sur les caractéristiques.

8.2.1. Polarisation par une tension fixe

Considérons le schéma de la figure 20.

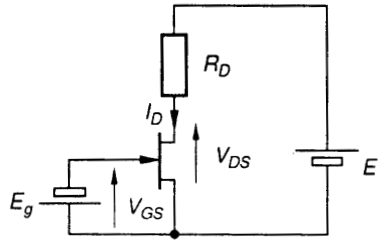


Fig. 20.

Les trois équations.

$$\begin{cases} V_{GS} = -E_g \\ E = R_D I_D + V_{DS} \\ I_D = f(V_{GS}) \end{cases}$$ [caractéristique que l'on peut approximer par $I_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^2$]

permettent de déterminer les trois grandeurs I_D, V_{DS}, V_{GS}.

La position du point de repos peut être réglée par la source de tension E_g.

8.2.2. Polarisation automatique par résistance de source

Considérons le schéma de la figure 21.

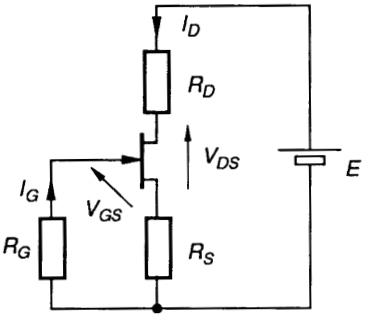


Fig. 21.

La résistance R_G est de l'ordre du mégohm.

Le courant I_G étant de l'ordre de 100 picoampères, la chute de tension $R_G I_G$, de l'ordre de 100 microvolts, est négligeable.

Les trois équations :

$$\begin{cases} V_{GS} = -R_G I_G - R_S I_D \approx -R_S I_D \\ E = (R_S + R_D) I_D + V_{DS} \\ I_D = f(V_{GS}) = I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^2 \end{cases}$$

permettent de déterminer les trois grandeurs I_D, V_{DS}, V_{GS}.

La résolution graphique du système des trois équations est donnée à la figure 22.

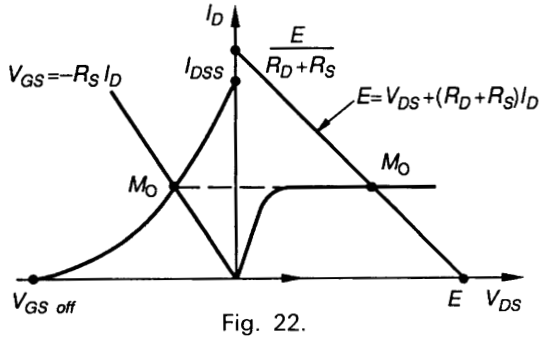


Fig. 22.

8.2.3. Avantage de la polarisation automatique

Supposons que, par suite de la dispersion des caractéristiques dans un même lot de J.FET, la courbe $I_D = f(V_{GS})$ passe de (C_1) à (C_2) (*fig.* 23).

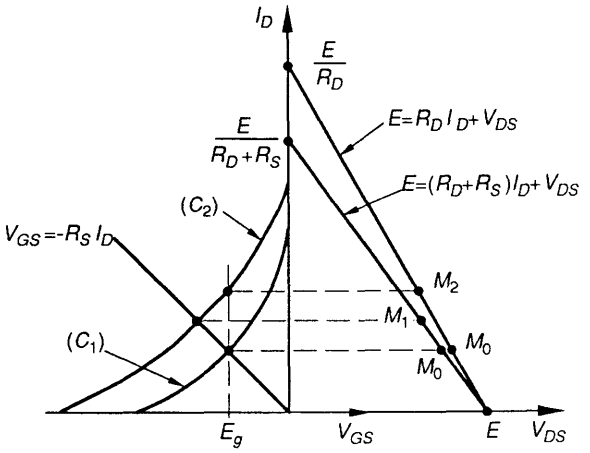


Fig. 23

Dans les axes $I_D = f(V_{DS})$, le point de repos situé initialement en M_0 passe en :

- M_1 si la polarisation est réalisée par une résistance de source R_S.
- M_2 si la polarisation est réalisée par une source de tension constante E_g.

Il apparaît que pour une même dispersion de la caractéristique $I_D = f(V_{GS})$, le déplacement du point de repos est moins important pour la polarisation par résistance de source que pour la polarisation par une tension constante.

En outre la polarisation automatique ne nécessite qu'une seule tension d'alimentation.

8.3. MONTAGE SOURCE COMMUNE

Le schéma correspondant est donné à la figure 24.

La polarisation est assurée par la source de tension E et par les résistances R_D, R_G et R_S.

Le dispositif est attaqué par un générateur de petits signaux de force électromotrice e_g et de résistance interne R_g. Il alimente la charge R_L.

Les condensateurs C_0 et C'_0 empêchent le courant continu de traverser la charge et le générateur, et de perturber ainsi la polarisation. Ils doivent se comporter comme des court-circuits vis-à-vis des petits signaux.

Le condensateur C_S possède une capacité suffisante pour que la tension à ses bornes reste pratiquement constante.

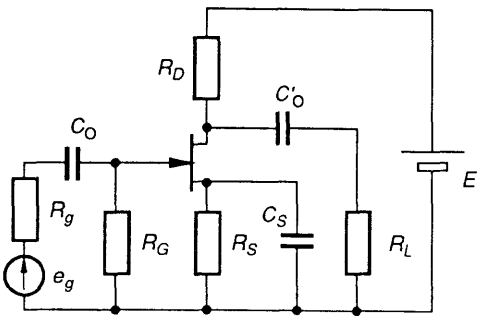


Fig. 24

8.3.1. Schéma équivalent pour les petits signaux (*fig.* 25)

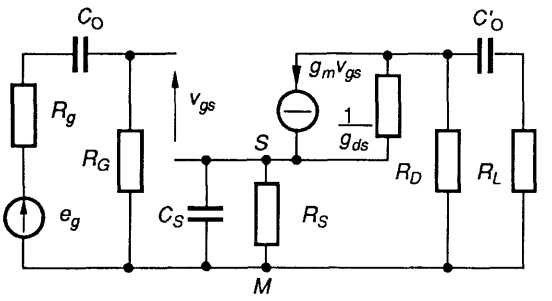


Fig. 25.

8.3.2. Calcul des condensateurs en régime sinusoïdal permanent

- Le condensateur C_0 doit être tel que son impédance $\frac{1}{C_0\omega}$ soit négligeable devant $R_G + R_g$.
- Le condensateur C'_0 doit être tel que son impédance $\frac{1}{C'_0\omega}$ soit négligeable devant $R_L + R_s$ (où R_s est la résistance de sortie du montage).
- Pour calculer le condensateur C_S, nous pouvons négliger le courant qui traverse la résistance $\frac{1}{g_{ds}}$ car elle est très grande par raport à R_S et R_D.
  - D'une part la capacité C_S doit être telle que son impédance $\frac{1}{C_S\omega}$ soit faible devant R_S soit $\frac{1}{C_S\omega} \ll R_S$.

– D'autre part la valeur efficace de la tension entre les points S et M doit être négligeable par rapport à la valeur efficace de la tension v_{gs} soit

$$\frac{1}{C_S\omega}\, g_m|\underline{V_{GS}}| \ll |\underline{V_{GS}}| \quad \text{ou} \quad \frac{1}{C_S\omega} \ll \frac{1}{g_m}.$$

On ne peut affirmer qu'une des deux conditions est prioritaire par rapport à l'autre car g_m dépend du point de polarisation qui, lui-même, dépend de R_S.

Pour s'en convaincre, remarquons que R_S résulte du système d'équations :

$$\begin{cases} V_{GS} = -R_S I_D \\ I_D = I_{DSS}\left(1 - \dfrac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^2 \end{cases}$$

qui conduit à $R_S = -\dfrac{V_{GS}}{I_{DSS}} \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^2}$.

La valeur de $\dfrac{1}{g_m}$ a été établie, au paragraphe 8.1, par $\dfrac{1}{g_m} = -\dfrac{V_{GSoff}}{2I_{DSS}} \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)}$.

Soit

$$\frac{R_S}{\dfrac{1}{g_m}} = \frac{2V_{GS}}{V_{GSoff}} \times \frac{1}{\left(1 - \dfrac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)} = \frac{2V_{GS}}{V_{GSoff} - V_{GS}}$$

– Pour une polarisation telle que V_{GS} soit proche de zéro la résistance R_S est faible par rapport à $\dfrac{1}{g_m}$ et il faut réaliser en priorité $\dfrac{1}{C_S\omega} \ll R_S$.

– Pour une polarisation telle que la tension V_{GS} soit voisine de V_{GSoff}, la résistance $\dfrac{1}{g_m}$ est faible par rapport à R_S et il faut réaliser en priorité $\dfrac{1}{C_S\omega} \ll \dfrac{1}{g_m}$.

Après calcul des condensateurs, le schéma équivalent se réduit au schéma de la figure 26.

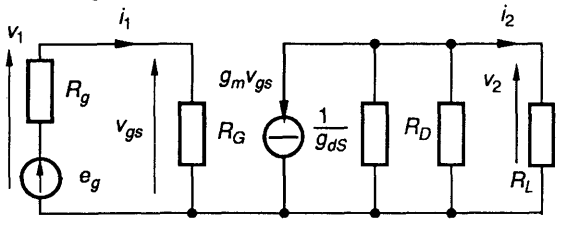


Fig. 26

8.3.3. Résistance d'entrée

C'est la résistance vue par le générateur :

$$R_e = \frac{v_1}{i_1} = R_G.$$

Elle est très élevée, de l'ordre du megohm. La polarisation autorise des valeurs de R_G plus élevées mais l'accroissement espéré de la résistance d'entrée est tempéré par la présence des capacités parasites C_{GD} et C_{GS}. (Rappelons qu'une capacité de 10 PF présente à la fréquence de 1 MHz, une impédance de 17 kΩ.)

8.3.4. Amplification en tension

Elle est donnée par $A_v = \dfrac{v_2}{v_1}$, rapport de la tension aux bornes de la charge, à la tension fournie par le générateur.

La résistance $\dfrac{1}{g_{ds}}$ étant voisine du Megohm, nous pouvons raisonnablement négliger son influence.

A partir des équations

$$\begin{cases} v_1 = v_{gs} \\ v_2 = -\dfrac{R_D R_L}{R_D + R_L}\, g_m v_{gs} \end{cases}$$

il vient : $A_v = -g_m \dfrac{R_D R_L}{R_D + R_L}$.

L'ordre de grandeur du gain en tension est de quelques unités à quelques dizaines.

Les tensions d'entrée et de sortie sont en opposition de phase.

8.3.5. Amplification en courant

Elle est donnée par $A_i = \dfrac{i_2}{i_1}$.

A partir des équations

$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{v_{gs}}{R_G} \\ i_2 = \dfrac{v_2}{R_L} = -g_m v_{gs} \dfrac{R_D}{R_D + R_L} \end{cases}$$

il vient : $A_i = -g_m \dfrac{R_D}{R_D + R_L} \cdot R_G$.

Il est très important et peut atteindre plusieurs milliers voire plusieurs dizaines de mille.

8.3.6. Résistance de sortie

Elle est déterminée à partir du schéma de la figure 27 sur lequel :

- la charge est déconnectée,
- la force électromotrice du générateur est remplacée par un court-circuit.

La tension v_{gs} étant nulle, il en est de même du courant $g_m v_{gs}$ et le générateur de courant peut être remplacé par un circuit ouvert. La résistance de sortie R_s résulte ainsi de la mise en parallèle des résistances R_D et $\frac{1}{g_{ds}}$; elle est pratiquement égale à R_D. Elle est de l'ordre du kiloohm.

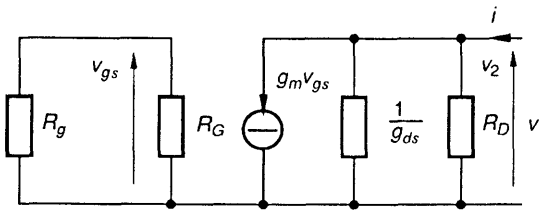


Fig. 27.

8.4. MONTAGE DRAIN COMMUN

Le schéma correspondant est donné à la figure 28.

Les condensateurs C_0 et C'_0 ont une capacité suffisamment grande pour que la tension à leurs bornes reste pratiquement constante. La détermination de leur capacité se fait de la même manière que pour le montage source commune.

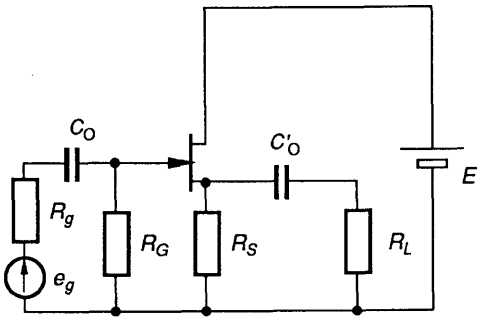


Fig. 28.

8.4.1. Schéma équivalent pour les petits signaux

La figure 29 indique le schéma équivalent pour les petits signaux après le calcul des condensateurs et en considérant que la résistance $\frac{1}{g_{ds}}$ (de l'ordre du mégohm) est grande devant R_S.

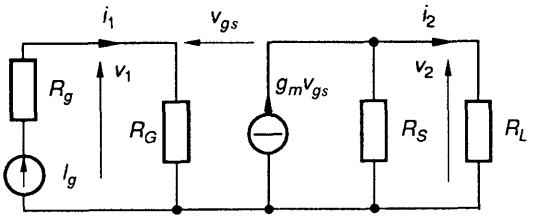


Fig. 29.

8.4.2. Résistance d'entrée

C'est la résistance $R_e = \frac{v_1}{i_1}$ vue par le générateur. Elle est égale à R_G. Elle est très élevée (plusieurs mégohms) mais, comme pour le montage source commune, elle est altérée par la présence des capacités parasites C_{GS} et C_{GD}.

8.4.3. Amplification en tension

A partir du schéma de la figure 29, nous pouvons écrire les équations

$$\begin{cases} v_1 = v_{gs} + g_m \dfrac{R_S R_L}{R_S + R_L} v_{gs} \\ v_2 = g_m \dfrac{R_S R_L}{R_S + R_L} v_{gs} \end{cases}$$

qui nous conduisent à l'amplification en tension

$$A_v = \frac{g_m \dfrac{R_S R_L}{R_S + R_L}}{1 + g_m \dfrac{R_S R_L}{R_S + R_L}}.$$

Cette amplification est inférieure à 1 mais d'autant plus voisine de l'unité que $g_m \dfrac{R_S R_L}{R_S + R_L}$ est grand par rapport à 1.

8.4.4. Résistance de sortie

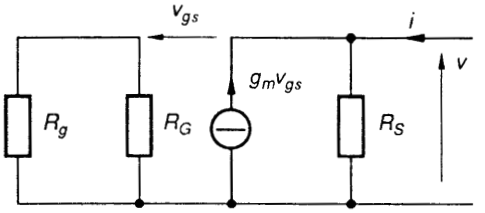


Fig. 30.

Elle est déterminée à partir du schéma de la figure 30.

Le courant dans les résistances R_g et R_G étant nul, la tension v_{gs} est appliquée au générateur de courant $g_m v_{gs}$ qui est donc équivalent à la résistance $\dfrac{v_{gs}}{g_m v_{gs}} = \dfrac{1}{g_m}$.

La résistance de sortie R_s résulte de la mise en parallèle des résistances R_S et $\dfrac{1}{g_m}$

soit $$R_s = \frac{R_S}{1 + g_m R_S}.$$

8.4.5. Construction d'un étage suiveur à partir du montage drain commun

L'étude précédente montre que le montage drain commun possède les propriétés suivantes : forte résistance d'entrée, amplification en tension voisine de l'unité, faible résistance de sortie. Il se rapproche ainsi des caractéristiques du suiveur parfait (résistance d'entrée infinie, amplification en tension égale à 1, résistance de sortie nulle).

Supposons que la résistance de charge R_L soit très grande par rapport à R_S. L'amplification en tension s'écrit $A_v = \dfrac{g_m R_S}{1 + g_m R_S}$. Elle est d'autant plus proche de l'unité que $g_m R_S$ est grand devant 1. Or g_m et R_S dépendent du point de polarisation.

A partir des équations

$$\begin{cases} V_{GS} = -R_S I_D \\ I_D = I_{DSS}\left(1 - \dfrac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^2 \\ g_m = -\dfrac{2I_{DSS}}{V_{GSoff}}\left(1 - \dfrac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right) \end{cases}$$

il vient $$R_S g_m = \frac{2V_{GS}}{V_{GSoff} - V_{GS}}.$$

Le produit $R_S g_m$ est d'autant plus grand que V_{GS} est voisin de V_{GSoff}. Malheureusement une telle polarisation ne peut convenir pour réaliser un montage suiveur.

En effet, les résistances

$$R_S = -\frac{V_{GS}}{I_{DSS}} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^2}$$

et $$\frac{1}{g_m} = \frac{-V_{GSoff}}{2I_{DSS}} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)}$$

sont alors très élevées ainsi que la résistance de sortie R_s du montage drain commun ce qui le rend inapte à la réalisation d'un étage suiveur.

Afin d'améliorer le dispositif, on remplace la résistance R_S par un élément présentant, aux petits signaux, une forte résistance, tout en étant perméable au courant de polarisation I_D. Cet élément est un générateur de courant constant I_D, et l'on aboutit au schéma de la figure 31.

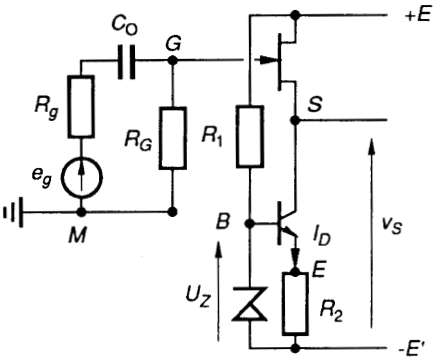


Fig. 31.

Le courant $I_D = \dfrac{U_Z - V_{BE}}{R_2}$ est constant et le calcul de la polarisation du J.FET résulte des équations :

$$\begin{cases} I_D = \dfrac{U_Z - V_{BE}}{R_2} \\ I_D = I_{DSS}\left(1 - \dfrac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^2 \end{cases}$$

Le potentiel du point E étant constant, la tension de sortie v_S évolue au rythme du signal d'entrée en « comprimant » vers le haut la tension drain source du J.FET et vers le bas la tension collecteur émetteur du transistor bipolaire.

L'utilisation d'une deuxième source de tension continue $-E'$ est justifiée par le fait que la tension de polarisation $V_{SM} = -V_{GS}$, de l'ordre de quelques volts, est insuffisante pour assurer la tension collecteur émetteur du transistor bipolaire, et la tension U_Z.

Afin de déterminer le schéma équivalent pour les petites variations calculons, au préalable, la résistance que présente le générateur de courant entre les points S et M (*fig.* 32).

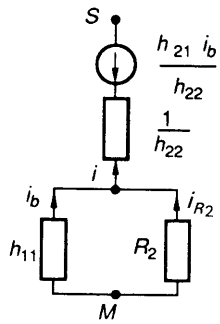


Fig. 32.

Le courant dans la résistance R_2 est égal à $i_{R_2} = \dfrac{h_{11} i_b}{R_2}$.

Le courant i, traversant le générateur de tension $\dfrac{h_{21} i_b}{h_{22}}$ est égal $i = i_b\left(1 + \dfrac{h_{11}}{R_2}\right)$. Le générateur de tension est donc équivalent à la résistance

$$\frac{h_{21}}{h_{22}} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{h_{11}}{R_2}\right)},$$

et la résistance vue entre les points S et M s'établit à :

$$R_{eq} = \frac{h_{21}}{h_{22}} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{h_{11}}{R_2}\right)} + \frac{1}{h_{22}} + \frac{h_{11} R_2}{h_{11} + R_2},$$

h_{21} étant grand par rapport à 1, R_{eq} est de l'ordre de grandeur de $\dfrac{h_{21}}{h_{22}}$, c'est-à-dire de plusieurs mégohms.

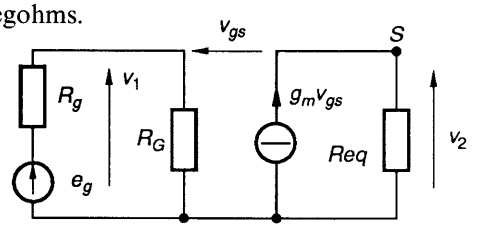


Fig. 33.

Le schéma équivalent du dispositif de la figure 31 est donné à la figure 33. Il est identique au schéma de la figure 29 par remplacement de la résistance R_S par R_{eq} et par suppression de la résistance de charge R_L.

L'amplification en tension est donc égale à $A_v = \dfrac{g_m R_{eq}}{1 + g_m R_{eq}}$ et la résistance de sortie est donnée par $R_s = \dfrac{R_{eq}}{1 + g_m R_{eq}}$.

Ordre de grandeur

La résistance R_{eq} étant de l'ordre de plusieurs mégohms, $g_m R_{eq}$ est grand devant l'unité; l'amplification en tension est pratiquement égale à 1 et la résistance de sortie est égale à $\dfrac{1}{g_m}$ que l'on peut rendre inférieure à une centaine d'ohms par un bon choix de composant et par une polarisation proche de I_{DSS}.

Afin de satisfaire l'hypothèse de départ (la résistance de charge est grande devant R_S), on fait suivre le dispositif d'un montage collecteur commun.

De plus, pour diminuer l'influence des capacités C_{GS} et C_{GD}, on réalise un montage « bootstrap » pour aboutir au schéma de la figure 34.

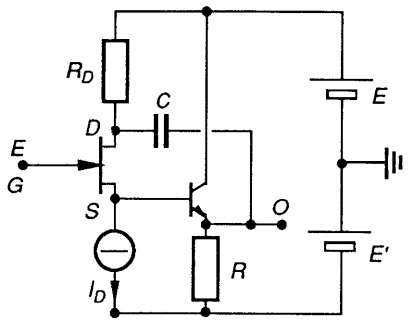


Fig. 34.

Le condensateur C possède une capacité suffisamment élevée pour se comporter comme un court-circuit pour les petits signaux. Il est donc nécessaire de rajouter sur le schéma la résistance R_D sinon le signal de sortie (point O) serait nul.

En négligeant l'influence des résistances $\dfrac{1}{gds}$ en parallèle sur h_{11}, et $\dfrac{1}{h_{22}}$ en parallèle sur $\dfrac{RR_D}{R + R_D}$ et en ne tenant pas compte, dans un premier temps, des capacités C_{GS} et C_{GD}, le schéma équivalent est celui de la figure 35.

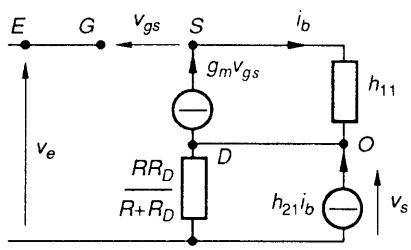


Fig. 36.

Le courant dans la résistance $\frac{RR_D}{R+R_D}$ est égal à $h_{21}i_b = h_{21}g_m v_{gs}$.

Il vient alors :

$$\begin{cases} v_e = v_{gs} + h_{11}g_m v_{gs} + h_{21}\dfrac{RR_D}{R+R_D}g_m v_{gs} \\ v_s = h_{21}\dfrac{RR_D}{R+R_D}g_m v_{gs}. \end{cases}$$

L'amplification en tension s'écrit donc :

$$A_v = \frac{h_{21}\dfrac{RR_D}{R+R_D}g_m}{1 + h_{11}g_m + h_{21}\dfrac{RR_D}{R+R_D}g_m}$$

sachant que $h_{21}\frac{RR_D}{R+R_D}$ est grand devant h_{11} et devant $\frac{1}{g_m}$, le gain en tension est pratiquement égal à 1. Il en résulte que les points S, G, D ont des potentiels sensiblement égaux. La présence des capacités parasites C_{GS} et C_{GD}, perturbent donc très peu le dispositif, car le potentiel à leurs bornes étant pratiquement nul, elles ne dérivent pas de courant. On arrive ainsi à des capacités d'entrée de l'ordre du picofarad.

8.5. MONTAGE PORTE COMMUNE

La seule utilisation pratique du montage porte commune est la réalisation d'un générateur de courant constant (*fig.* 36).

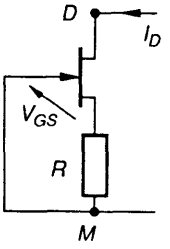


Fig. 36.

A partir des équations

$$\begin{cases} V_{GS} = -RI_D \\ I_D = I_{DSS}\left(1 - \dfrac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^2, \end{cases}$$

on établit l'équation du courant I_D :

$$I_D = I_{DSS}\left(1 + \frac{RI_D}{V_{GSoff}}\right)^2.$$

Afin de déterminer la résistance interne de ce générateur de courant, dessinons (*fig.* 37) son schéma équivalent, pour les petits signaux, entre les points D et M.

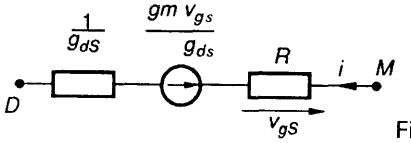


Fig. 37.

Le courant i étant égal à $\frac{v_{gs}}{R}$, le générateur de tension peut être remplacé par la résistance $\frac{g_m R}{g_{ds}}$ et la résistance équivalente R_{eq}, entre les points D et M, s'établit à

$$R_{eq} = \frac{1}{g_{ds}} + \frac{g_m R}{g_{ds}} + R \approx \frac{1}{g_{ds}}(1 + g_m R).$$

Elle est de l'ordre de plusieurs mégohms.

8.6. BRUIT DANS LES AMPLIFICATEURS À J.FET

Il résulte de l'étude du J.FET en amplification que la principale qualité du composant est de présenter une très forte impédance d'entrée. Il est ainsi fréquemment utilisé dans les étages d'entrée, à la suite de capteurs possédant une forte résistance interne. La notion de bruit prend alors une grande importance pour le composant.

Rappelons que le bruit est un signal aléatoire s_B dont on ne peut connaître la valeur s_B à un instant t et que l'on définit par sa valeur quadratique moyenne $\overline{s_B^2}$.

Pour le J.FET, les générateurs de bruit sont décrits à la figure 38.

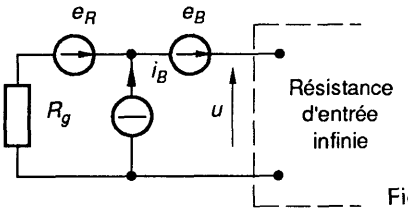


Fig. 38.

• e_R est la tension de bruit de la résistance R_g du générateur dont la valeur quadratique moyenne s'exprime par $\overline{e_R^2} = 4KTR_g\Delta f$

où K est la constante de Boltzmann

$= 1{,}38 \cdot 10^{-}23$ J/K,

T est la température absolue en degrés kelvin,

Δf est la bande de fréquence en hertz.

• i_B est dû au courant de fuite I_G de la porte. Sa valeur quadratique moyenne est donnée par la formule de Schottky :

$$\overline{i_B^2} = 2e \,.\, I_G \,\Delta f$$

où e est la charge de l'électron = 1,6 . 10^{-19} C,

I_G est le courant de fuite porte-canal.

• e_B est dû d'une part à l'agitation thermique des électrons dans le canal, d'autre part au phénomène d'ionisation thermique-recombinaison, dans la zone de transition.

Sa valeur quadratique moyenne est donnée par :

$$\overline{e_B^2} = 4KT\frac{1}{g_m}\left(1 + \frac{f_c}{f}\right)\Delta f$$

où f_c est de l'ordre de 100 Hz à 1 kHz.

Sur le schéma de la figure 38, la tension de bruit à l'entrée du J.FET s'écrit $u = e_B + e_R + R_g i_B$.

Comme il n'existe aucune corrélation entre les générateurs i_B, e_B et e_R, la valeur quadratique moyenne de la tension u s'écrit

$$\overline{u^2} = \overline{e_B^2} + \overline{e_R^2} + R_g^2\overline{i_B^2}.$$

Pour chiffrer l'immunité du J.FET au bruit, on définit le facteur de bruit F, par « le rapport de la puissance de bruit en sortie, à la puissance de bruit en sortie due à la résistance R_g supposée seul générateur de bruit ».

Soit A l'amplification en tension du J.FET et R_L la résistance de charge.

– En considérant la résistance R_g du générateur comme le seul générateur de bruit, la puissance instantanée de bruit en sortie du J.FET s'écrit :

$$p_{BO} = A^2\frac{e_R^2}{R_L}.$$

Sa valeur moyenne dans le temps est

$$P_{BO} = \frac{A^2}{R_L}\overline{e_R^2}.$$

– La puissance instantanée de bruit, en sortie du J.FET, tenant compte des générateurs de bruit du J.FET s'écrit :

$$p_B = \frac{A^2}{R_L}(e_R^2 + e_B^2 + R_g^2 i_B^2).$$

Sa valeur moyenne dans le temps est

$$P_B = \frac{A^2}{R_L}(\overline{e_R^2} + \overline{e_B^2} + R_g^2\overline{i_B^2}).$$

Le facteur de bruit $F = \dfrac{P_B}{P_{BO}}$ s'écrit :

$$F = \frac{\overline{e_B^2} + \overline{e_R^2} + R_g^2\overline{i_B^2}}{\overline{e_R^2}} = 1 + \frac{1 + \dfrac{f_c}{f}}{g_m R_g} + \frac{R_g e I_G}{2KT}.$$

Remarquons que lorsque R_g tend vers zéro, le facteur de bruit tend vers l'infini et qu'il en est de même lorsque R_g tend vers l'infini. Il doit donc exister une valeur optimale de R_g pour laquelle le facteur de bruit est minimum. Pour la déterminer il suffit de dériver F par rapport à R_g.

$$\frac{dF}{dR_g} = -\frac{1 + \dfrac{f_c}{f}}{g_m}\frac{1}{R_g^2} + \frac{eI_G}{2KT} = 0$$

pour $R_g = R_{g_{min}} = \sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{f_c}{f}}{g_m} \times \dfrac{2KT}{eI_G}}$

Ordre de grandeur

$g_m \approx 3 \,.\, 10^{-3}$ A/V; $T \approx 300$ K;

$e = 1{,}6 \,.\, 10^{-19}$ C; $I_G \approx 10^{-10}$ A;

$K = 1{,}38 \,.\, 10^{-23}$ J/K.

Soit $R_{g_{min}}$ de l'ordre de $4\sqrt{1 + \dfrac{f_c}{f}} \times 10^5$ ohms.

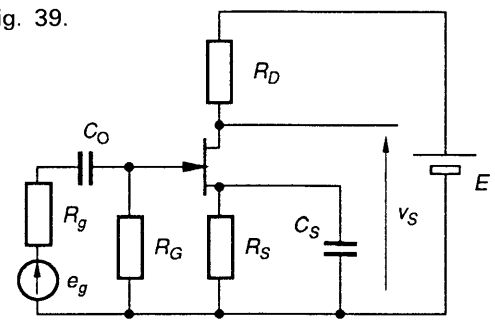
Le J.FET est donc bien adapté pour les étages d'entrée intervenant à la suite de générateurs qui, comme les capteurs piézoélectriques, possèdent une forte résistance interne.

8.7. RÉPONSE EN FRÉQUENCE D'UN AMPLIFICATEUR UTILISANT UN J.FET

8.7.1. Montage source commune

Le montage source commune est rappelé à la figure 39.

Fig. 39.



• Aux basses fréquences les condensateurs C_0 et C_S ne peuvent plus être considérés comme des courts-circuits par les petits signaux.

• Aux hautes fréquences, les capacités parasites C_{GS}, C_{GD}, C_{DS} perturbent la réponse de l'amplificateur.

ÉTUDE AUX FRÉQUENCES MOYENNES

Ce sont les fréquences pour lesquelles :

– les condensateurs C_S et C_0 se comportent comme des courts-circuits pour les petits signaux,

– les capacités parasites du J.FET ont une influence négligeable.

Le schéma équivalent correspondant est donné à la figure 40, en négligeant l'influence de la résistance $\frac{1}{g_{ds}}$ en parallèle sur R_D.

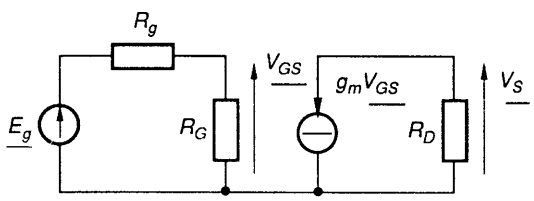


Fig. 40.

La fonction de transfert en tension $\underline{A} = \frac{\underline{V_S}}{\underline{E_g}}$ s'établit donc à :

$$\underline{A_V} = A_{V_0} = -\frac{R_G}{R_g + R_G} \times g_m R_D.$$

ÉTUDE AUX BASSES FRÉQUENCES

Pour ces fréquences, les capacités parasites du J.FET ont une influence négligeable.

Influence du condensateur C_0

Nous supposons dans cette étude que le condensateur C_S a une capacité suffisante pour que la tension à ses bornes reste pratiquement constante. Le schéma équivalent correspondant est donné à la figure 41.

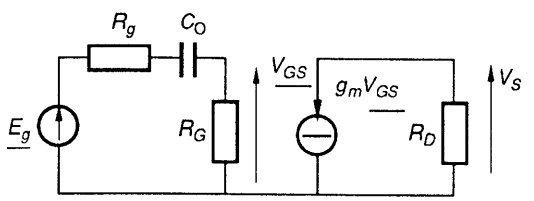


Fig. 41.

La fonction de transfert en tension s'établit à :

$$\underline{A_V} = -g_m R_D \frac{R_G}{R_g + R_G + \frac{1}{jC_0\omega}}$$

$$= -g_m R_D \frac{R_G}{R_G + R_g} \times \frac{jC_0(R_g + R_G)\omega}{1 + jC_0(R_g + R_G)\omega}$$

qui peut s'écrire :

$$\underline{A_V} = A_{V_0} \cdot \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{(R_g + R_G)C_O}.$$

Le diagramme de Bode correspondant est donné à la figure 42.

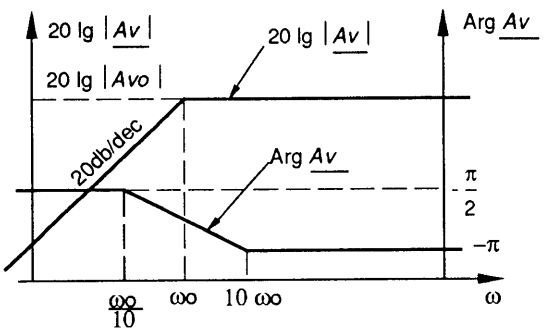


Fig. 42.

Pour qu'un signal sinusoïdal soit transmis dans les mêmes conditions qu'aux fréquences moyennes, il est nécessaire que sa pulsation soit supérieure à $10\,\omega_0$.

Soit

$$\omega > \frac{10}{(R_g + R_G)C_0} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{C_0\omega} < \frac{R_g + R_G}{10}.$$

Ce qui confirme le calcul de la capacité du condensateur C_O effectué au paragraphe 8.3.2.

Influence du condensateur C_S

Nous supposerons pour cette étude que le condensateur C_0 a une capacité suffisante pour que la tension à ses bornes reste sensiblement constante.

Le schéma équivalent correspondant est donné à la figure 43.

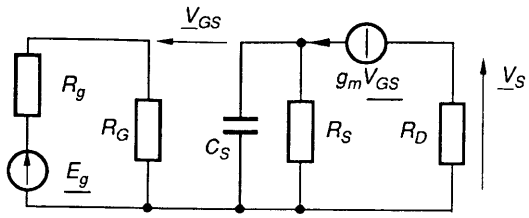


Fig. 43.

La fonction de transfert en tension s'établit à :

$$\underline{A}_V = \frac{\underline{V}_S}{\underline{E}_g} = -\frac{g_m R_D \underline{V}_{GS}}{\underline{E}_g}$$

avec

$$\underline{E}_g \frac{R_G}{R_G + R_g} = \underline{V}_{GS} + \frac{R_S g_m}{1 + jR_S C_S \omega} \cdot \underline{V}_{GS}.$$

Soit

$$\underline{A}_V = -g_m R_D \frac{R_G}{R_G + R_g} \times \frac{1}{1 + \dfrac{R_S g_m}{1 + jR_S C_S \omega}}$$

$$= A_{V_0} \frac{1 + jR_S C_S \omega}{1 + R_S g_m + jR_S C_S \omega},$$

$$\underline{A}_V = \frac{A_{V_0}}{1 + R_S g_m} \times \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1'}}$$

avec $\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{1}{R_S C_S} \\ \omega_1' = \dfrac{1 + g_m R_S}{R_S C_S} \end{cases}$

Remarquons que pour les fréquences très supérieures à ω_1', la fonction de transfert en tension devient peu différente de $\dfrac{A_{V_0}}{1 + R_S g_m} \times \dfrac{\omega_1'}{\omega_1} = A_{V_0}$, qui est bien sa valeur pour les fréquences moyennes.

Le diagramme de Bode correspondant est donné à la figure 44.

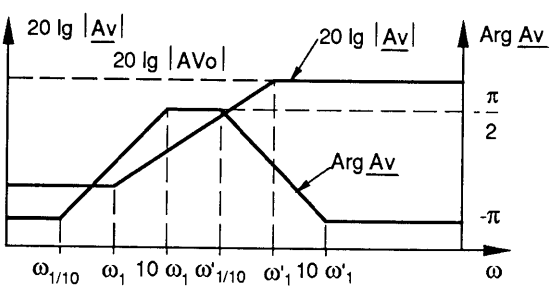


Fig. 44.

Pour qu'un signal sinusoïdal soit transmis dans les mêmes conditions qu'aux fréquences moyennes, il est nécessaire que sa pulsation soit supérieure à $10\omega_1'$ soit

$$\omega > 10 \frac{1 + g_m R_S}{R_S C_S}.$$

L'impédance du condensateur C_S doit donc être telle que :

$$\frac{1}{C_S \omega} < \frac{R_S \times \dfrac{1}{g_m}}{R_S + \dfrac{1}{g_m}} \times \frac{1}{10}.$$

Ce qui confirme le calcul effectué au paragraphe 8.3.2.

ÉTUDE AUX HAUTES FRÉQUENCES

Nous supposerons que, pour les fréquences d'étude, les condensateurs C_0 et C_S se comportent comme des courts-circuits. Compte tenu du schéma équivalent de la figure 19, nous obtenons le schéma équivalent de la figure 45.

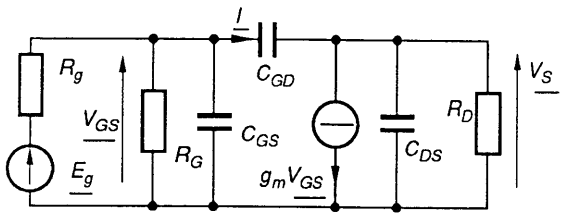


Fig. 45.

Soit $\underline{I}$ le courant dans la capacité C_{GD}. Si l'on ne considère que les fréquences très inférieures à $\dfrac{1}{2\pi R_D C_{GD}}$, le courant $\underline{I}$ est négligeable par rapport à $g_m \underline{V}_{GS}$, et nous pouvons écrire :

$$\underline{I} = jC_{GD}\omega(\underline{V}_{GS} - \underline{V}_S)$$

$$= jC_{GD}\omega\left(1 + \frac{g_m R_D}{1 + jR_D C_{DS}\omega}\right)\underline{V}_{GS}$$

La capacité C_{DS} est faible par rapport à C_{GD}. L'étude étant limitée aux fréquences très inférieures à $\dfrac{1}{2\pi R_D C_{GD}} < \dfrac{1}{2\pi R_D C_{DS}}$, le terme $R_D C_{DS}\omega$ est négligeable par rapport à 1, soit :

$$\underline{I} \approx jC_{GD}\omega(1 + g_m R_D)\underline{V}_{GS}.$$

Ce qui conduit au schéma équivalent de la figure 46 avec :

$$C = C_{GS} + C_{GD}(1 + g_m R_D)$$

$$= C_{GS} + C_{GD} + g_m R_D C_{GD}$$

$$C = C_{iSS} + g_m R_D C_{rSS}$$

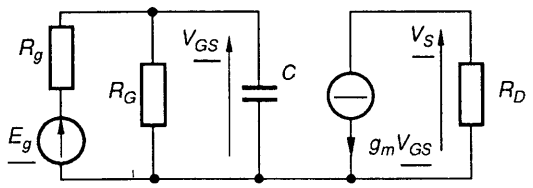


Fig. 46.

La fonction de transfert en tension $\underline{A}_V = \dfrac{\underline{V}_S}{\underline{E}_g}$ s'établit ainsi à :

$$\underline{A}_V = \frac{-g_m R_D \times \dfrac{R_G}{1 + jR_G C\omega}}{R_g + \dfrac{R_G}{1 + jR_G C\omega}}$$

$$= -g_m R_D \frac{R_G}{R_G + R_g} \times \frac{1}{1 + \dfrac{jR_G R_g}{R_G + R_g} C\omega}.$$

Soit

$$\underline{A}_V = A_{V_0} \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}, \qquad \text{avec } \omega_2 = \frac{1}{\dfrac{R_G R_g}{R_G + R_g} C}.$$

Le diagramme de Bode correspondant est donné à la figure 47.

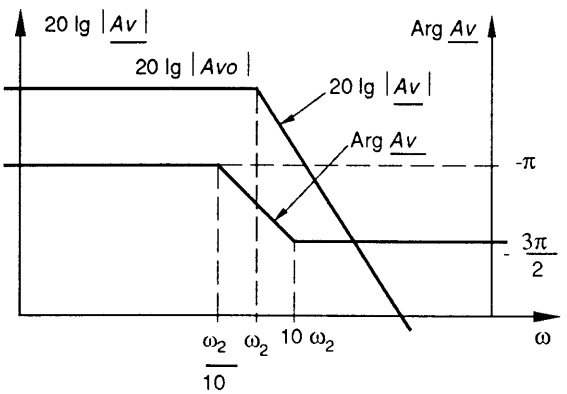


Fig. 47.

8.7.2. Montage drain commun

Considérons le dispositif de la figure 48 dont le schéma équivalent est donné à la figure 49.

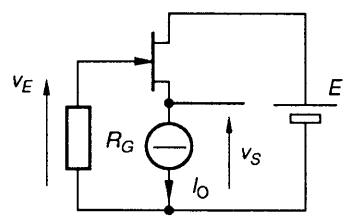


Fig. 48.

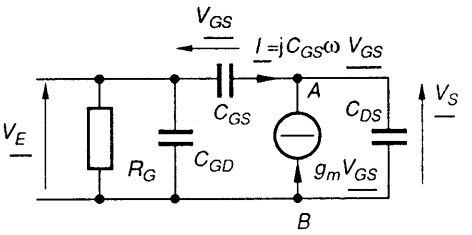


Fig. 49.

Par transformation, entre les points A et B, du schéma de Norton en schéma de Thévenin, et compte tenu de $C_{GS} \gg C_{DS}$, nous obtenons le schéma équivalent de la figure 50.

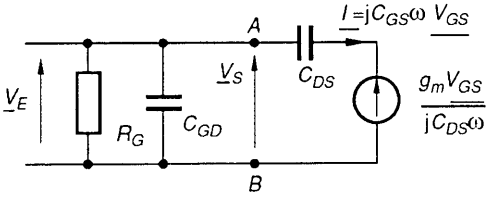


Fig. 50.

Il y apparaît que, quelle que soit la fréquence, la fonction de transfert en tension $\underline{A}_V = \dfrac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E}$ reste égale à 1. Par contre l'impédance d'entrée est altérée par la présence des capacités parasites. Le générateur de tension $\dfrac{g_m \underline{V}_{GS}}{jC_{DS}\omega}$, parcouru par le courant $jC_{GS}\omega \underline{V}_{GS}$, est équivalent à l'impédance : $\dfrac{g_m}{jC_{GS}\omega \cdot jC_{DS}\omega}$.

La branche AB présente donc une admittance :

$$\frac{1}{\dfrac{1}{jC_{DS}\omega} + \dfrac{1}{jC_{DS}\omega} \cdot \dfrac{g_m}{jC_{GS}\omega}} = \frac{jC_{DS}\omega}{1 + \dfrac{g_m}{jC_{GS}\omega}}$$

$$= jC_{DS}\omega \frac{1 + j\dfrac{g_m}{C_{GS}\omega}}{1 + \left(\dfrac{g_m}{C_{GS}\omega}\right)^2}$$

qui correspond à la mise en parallèle de la capacité $\dfrac{C_{DS}}{1 + \left(\dfrac{g_m}{C_{GS}\omega}\right)^2}$ et de la résistance

$$-\frac{1 + \left(\dfrac{g_m}{C_{GS}\omega}\right)^2}{g_m \dfrac{C_{DS}}{C_{GS}}}$$

- La capacité $\dfrac{C_{DS}}{1 + \left(\dfrac{g_m}{C_{GS}\omega}\right)^2}$ en parallèle sur la

capacité C_{GD} a une influence négligeable dans la mesure où $C_{GD} \gg C_{DS}$.

- La résistance négative $-\dfrac{1+\left(\dfrac{g_m}{C_{GS}\omega}\right)^2}{g_m\dfrac{C_{DS}}{C_{GS}}}$ risque de provoquer l'apparition d'oscillations spontanées à la fréquence pour laquelle la mise en parallèle de cette résistance sur la résistance R_G conduit à une résistance négative.

La condition d'oscillations s'établit donc à

$$R_G g_m \frac{C_{DS}}{C_{GS}} > 1 + \left(\frac{g_m}{C_{GS}\omega}\right)^2.$$

Le risque d'oscillations spontanées est donc d'autant plus grand que la résistance R_G est plus élevée.

9. FONCTIONNEMENT EN PORTE ANALOGIQUE

Considérons le schéma de la figure 51 dans lequel la tension v_A est susceptible de varier au cours du temps. Le signal appliqué sur la porte G, commande le J.FET en commutation et autorise, ou n'autorise pas, la transmission du signal analogique v_A à la résistance de charge R.

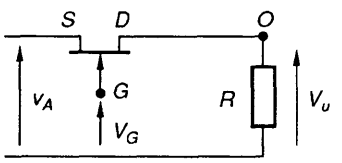


Fig. 51.

Plusieurs J.FET peuvent être connectés au point O. On réalise ainsi le schéma de la figure 52. En ne débloquant qu'un seul J.FET, les autres se comportant comme des circuits ouverts, on sélectionne la tension analogique v_{Ai} devant être appliquée à la résistance de charge R.

On réalise ainsi un multiplexeur analogique.

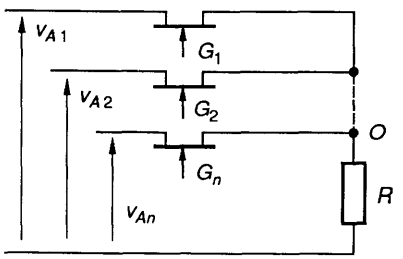


Fig. 52.

9.1. PORTE FERMÉE (*fig.* 51)

Lorsque la porte est fermée, le signal analogique n'est pas transmis et le J.FET se comporte comme un interrupteur ouvert. Il est nécessaire pour cela que la tension V_{GS} soit inférieure à V_{GSoff}. Pour une tension de commande V_G donnée, la tension analogique v_A doit être telle que $V_G - v_A < V_{GSoff}$. Elle devra donc toujours être supérieure à $V_G - V_{GSoff}$ sous peine de voir la porte s'ouvrir.

D'autre part, la tension V_{GS} devant rester inférieure à la tension de claquage $V_{BR_{GSS}}$ de la jonction porte-canal, la tension analogique devra rester inférieure à $V_G + V_{BR_{GSS}}$. Soit globalement

$$V_G - V_{GSoff} < v_A < V_G + V_{BR_{GSS}}.$$

9.2. PORTE OUVERTE (*fig.* 51)

Lorsque la porte est ouverte, le signal analogique est transmis et le J.FET se comporte comme un interrupteur fermé. Il est nécessaire pour cela que la tension V_{GS} soit voisine de zéro, ce qui semble difficile à réaliser dans la mesure où la tension analogique v_A est susceptible de varier. En effet si la tension de commande V_G est constante, le J.FET est mal débloqué lorsque la tension v_A est supérieure à V_G et la jonction porte-canal est conductrice lorsque la tension v_A est inférieure à $V_G - 0{,}6$ volts (*fig.* 51).

Pour y remédier, on place une diode D en série avec la jonction porte-canal (*fig.* 53).

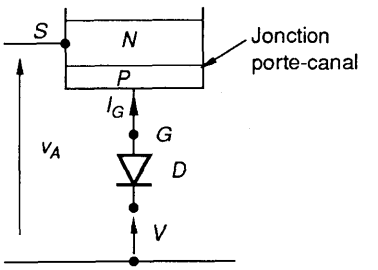


Fig. 53.

- Si la tension V est supérieure à v_A, le courant I_G est le courant de fuite I_f de la diode D polarisée en inverse. La tension porte-canal se fixe à une valeur, très légèrement positive, qui correspond au passage du faible courant direct I_f à travers la jonction porte-canal.

La diode D se comporte comme un générateur de courant I_f qui absorbe à la manière d'un ballast, les variations de la tension $v_A - V$, de façon à maintenir la tension porte-canal très légèrement positive.

• Pendant la période de fermeture de la porte, le J.FET est bloqué, le courant I_G est le courant de fuite I_{GSf} de la jonction porte-canal (courant négatif de l'ordre de 100 pA). La tension aux bornes de la diode se fixe à une valeur, voisine de zéro, qui correspond au passage du faible courant direct I_{GSf} à travers la diode. L'influence de la diode est donc négligeable pendant la période de fermeture de la porte.

Les variations de la tension v_A doivent donc rester dans des limites telles que les inéquations suivantes soient satisfaites :

***porte fermée* : tension $V = -V_1$**

$$-V_1 - V_{GSoff} < v_A < V_{BR_{GSS}} - V_1$$

***porte ouverte* : tension $V = +V_2$**

$$V_2 - V_{D\,inv.\,max.} < v_A < V_2$$

où $V_{D\,inv.\,max.}$ est la tension inverse maximum de la diode D.

9.3. PORTE ANALOGIQUE INTÉGRÉE

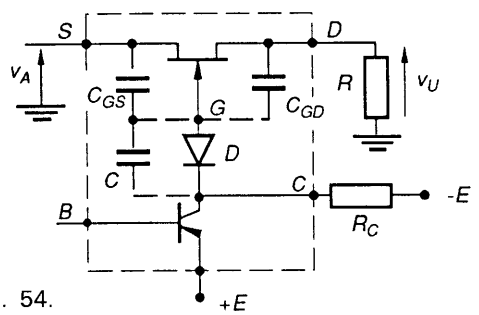


Fig. 54.

Une porte analogique intégrée (*fig.* 54) regroupe à l'intérieur d'un même boîtier les composants suivants :

– Un transistor *P-N-P* auquel est appliqué le signal de commande.
  • Lorsqu'il est bloqué, la tension $-E$ est appliquée au point C. La tension aux bornes de la diode D est voisine de zéro. Le J.FET est bloqué et la porte est fermée.
  • Lorsqu'il est saturé, la tension $+E$ est appliquée au point C et la porte est ouverte.

– Une diode varicap D, dont nous avons vu la nécessité au paragraphe 9.2, et qui, de plus, possède une capacité C dont la valeur varie comme l'inverse de la racine carrée de la tension inverse appliquée aux bornes de la diode (*fig.* 55). Cette capacité, nous le verrons, améliore les temps de commutation de la porte.

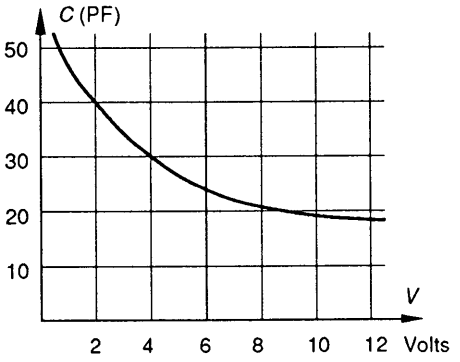


Fig. 55.

– Un J.FET à canal N, qui, lorsqu'il est débloqué, présente entre source et drain une résistance R_{DSON} très petite par rapport à la résistance de charge R. Rappelons que la jonction porte-canal présente une capacité de transition que l'on symbolise par deux capacités C_{GS} et C_{GD}, que nous supposerons égales et qui varient en fonction de la tension porte-canal conformément à la courbe de la figure 56.

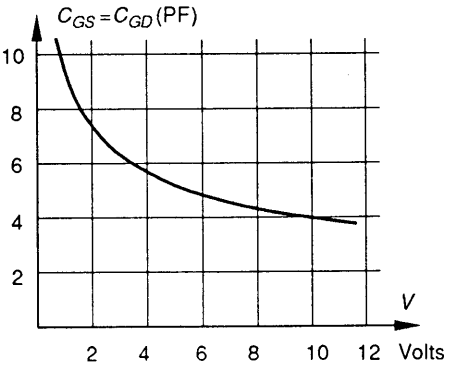


Fig. 56.

9.4. DÉCOUPAGE D'UNE TENSION ANALOGIQUE SINUSOÏDALE

Lorsque la tension analogique v_A appliquée à la porte est sinusoïdale, les capacités C_{GS}, C_{GD} et C perturbent sa réponse.

9.4.1. Porte fermée

Nous supposerons, pour simplifier les calculs, que les capacités C_{GS} et C_{GD} sont égales et nous poserons : $C_{GS} = C_{GD} = C_O$.

De plus, la jonction porte-canal étant polarisée en inverse, les capacités $C_{GS} = C_{GD} = C_O$ sont faibles devant la capacité C de la varicap, car la tension aux bornes de cette dernière est pratiquement nulle

(voir figures 55 et 56 pour $-E = -10$ volts, $C_{GS} = C_{GD} = 4$ pF, alors que $C \approx 60$ pF).

Du point de vue alternatif, le schéma équivalent de la porte analogique est donné à la figure 57.

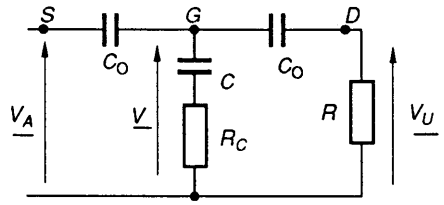


Fig. 57.

A partir des équations :

$$\begin{cases} jC_O\omega(\underline{V_A} - \underline{V}) = \dfrac{\underline{V}}{R_C + \dfrac{1}{jC\omega}} + \dfrac{\underline{V_u}}{R} \\ \qquad\qquad \text{(loi des nœuds au point } G) \\ \underline{V_u} = \underline{V}\dfrac{R}{R + \dfrac{1}{jC_O\omega}} = \underline{V}\dfrac{jRC_O\omega}{1 + jRC_O\omega}, \end{cases}$$

il vient :

$$jC_0\omega\underline{V_A} = \underline{V}\left[jC_0\omega + \frac{jC\omega}{1 + jR_CC\omega}\right] + \frac{\underline{V_u}}{R}$$

$$= \underline{V_u}\left[\frac{1}{R} + \frac{1 + jRC_0\omega}{jRC_0\omega}\left(jC_0\omega + \frac{jC\omega}{1 + jR_CC\omega}\right)\right]$$

$$= \underline{V_u}\left[\frac{2}{R} + jC_0\omega + \frac{C}{RC_0}\frac{1 + jRC_0\omega}{1 + jR_CC\omega}\right].$$

Déterminons, dès lors, la fonction de transfert $\underline{T} = \dfrac{\underline{V_u}}{\underline{V_A}}$ lorsque $R = R_C = 5$ kΩ.

$$\underline{T} = \frac{jRC_0^2\omega(1 + jRC\omega)}{2C_0 + C + j\omega R(2CC_0 + C_0^2 + CC_0) + (j\omega)^2R^2C_0^2C}$$

Compte tenu de $C_0 \ll C$ il vient :

$$\underline{T} \approx \frac{jRC_0\omega\dfrac{C_0}{C}(1 + jRC\omega)}{1 + j\omega R(3C_0) + (j\omega)^2R^2C_0^2}$$

$$\underline{T} = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_1}\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_3}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_4}\right)}$$

avec

$$\omega_2 = \frac{1}{RC}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{RC_0} \times \frac{C}{C_0} = \frac{1}{RC}\left(\frac{C}{C_0}\right)^2 = \omega_2\left(\frac{C}{C_0}\right)^2 \gg \omega_2$$

$$\omega_3 = \frac{1}{RC_0} \times \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{RC} \times \frac{C}{C_0} \times \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \omega_2\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\frac{C}{C_0}$$

$$\omega_4 = \frac{1}{RC_0} \times \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{RC} \times \frac{C}{C_0} \times \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \omega_2\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\frac{C}{C_0}.$$

Le diagramme de Bode correspondant est donné à la figure 58.

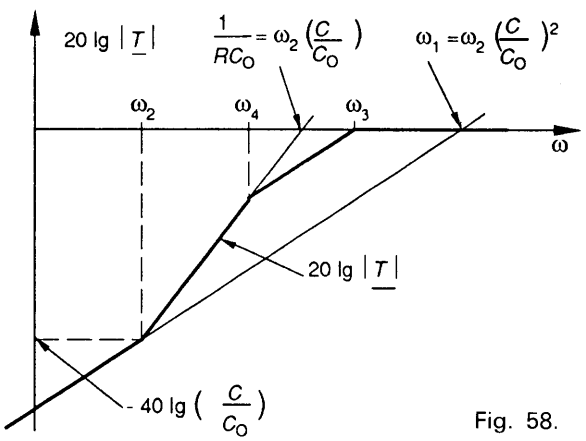


Fig. 58.

Pour les hautes fréquences, le signal est transmis à la résistance de charge R et la porte ne peut plus être considérée comme fermée.

Pour les fréquences inférieures à $\dfrac{1}{2\pi RC}$ l'atténuation est supérieure à $40 \lg \dfrac{C}{C_0}$ décibels. Pour $R = R_C = 5$ kΩ, $C = 60$ pF, $C_0 = 4$ pF.

On obtient une atténuation de 47 décibels à la fréquence de 530 kHz.

9.4.2. Porte ouverte

Du point de vue alternatif, le schéma équivalent de la porte analogique est donné à la figure 59.

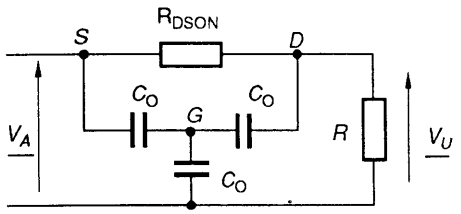


Fig. 59.

La tension inverse aux bornes de la varicap est voisine de E. Pour $E = 12$ volts, le diagramme de la figure 55 indique que la capacité est alors voisine de 15 pF.

La tension aux bornes de la jonction porte-canal est voisine de zéro. Le diagramme de la figure 56 indique que la valeur commune des capacités C_{GS} et C_{GD} est alors voisine de 15 pF.

Nous admettrons donc, comme indiqué à la figure 59 que les trois capacités C_{GS}, C_{GD} et C sont égales à $C_0 = 15$ pF.

Afin de déterminer la fonction de transfert $\underline{T} = \frac{\underline{V_u}}{\underline{V_A}}$, modifions le schéma partiel résultant du montage en étoile des trois capacités C_0 (*fig.* 60).

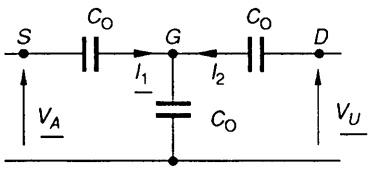


Fig. 60

A partir des équations

$$\begin{cases} \underline{V_A} = \dfrac{1}{jC_0\omega}\underline{I_1} + \dfrac{1}{jC_0\omega}(\underline{I_1} + \underline{I_2}) \\ \underline{V_u} = \dfrac{1}{jC_0\omega}\underline{I_2} + \dfrac{1}{jC_0\omega}(\underline{I_1} + \underline{I_2}), \end{cases}$$

il vient

$$\begin{cases} 3\underline{I_1} = jC_0\omega(2\underline{V_A} - \underline{V_u}) \\ \quad = jC_0\omega\underline{V_A} + jC_0\omega(\underline{V_A} - \underline{V_u}) \\ 3\underline{I_2} = jC_0\omega(2\underline{V_u} - \underline{V_A}) \\ \quad = jC_0\omega\underline{V_u} + jC_0\omega(\underline{V_u} - \underline{V_A}). \end{cases}$$

Le schéma de la figure 60 est donc équivalent au schéma de la figure 61 et le schéma de la figure 59 est équivalent au schéma de la figure 62.

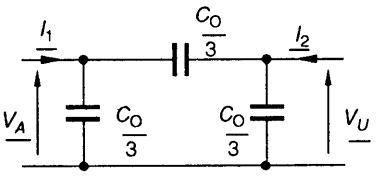


Fig. 61

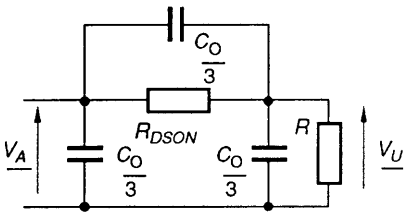


Fig. 62

La fonction de transfert $\underline{T} = \frac{\underline{V_u}}{\underline{V_A}}$ s'établit donc à

$$\underline{T} = \frac{\dfrac{R}{1 + j\dfrac{RC_0}{3}\omega}}{\dfrac{R_{DSON}}{1 + j\dfrac{R_{DSON}C_0}{3}\omega} + \dfrac{R}{1 + j\dfrac{RC_0}{3}\omega}}$$

Soit :

$$\underline{T} = \frac{R\left(1 + j\dfrac{R_{DSON}C_0}{3}\omega\right)}{R_{DSON} + R + jRR_{DSON}\dfrac{2C_0}{3}\omega}$$

$$= \frac{R}{R_{DSON} + R} \times \frac{1 + j\dfrac{R_{DSON}C_0}{3}\omega}{1 + j\dfrac{RR_{DSON}}{(R + R_{DSON})}\dfrac{2C_0}{3}\omega},$$

donc

$$\underline{T} = T_0\frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}},$$

avec

$$T_0 = \frac{R}{R_{DSON} + R};$$

$$\omega_1 = \frac{3}{R_{DSON}C_0}; \quad \omega_2 = \frac{(R + R_{DSON})3}{2RR_{DSON}C_0}.$$

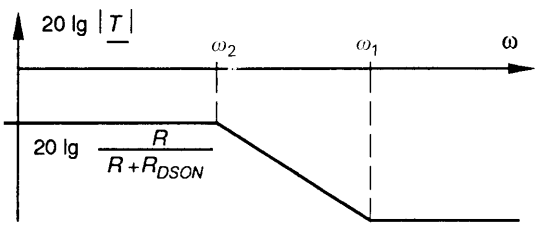


Fig. 63.

Le diagramme de Bode correspondant est donné à la figure 63.

Nous pouvons remarquer que si $R = R_{DSON}$, les deux pulsations ω_1 et ω_2 sont égales et le diagramme de Bode se réduit à une horizontale d'ordonnée $20 \lg \dfrac{R}{R + R_{DSON}}$; ce résultat est logique dans la mesure où on retrouve entre V_A et V_u le schéma d'un atténuateur parfaitement compensé.

Pour $R_{DSON} = 50\ \Omega$, $R = 5\ k\Omega$, et $C_0 = 15$ pF, l'horizontale $20 \lg \dfrac{R}{R + R_{DSON}}$ est pratiquement confondue avec l'axe des pulsations, et la fréquence de coupure de la porte analogique s'établit à $f_2 = \dfrac{1}{\dfrac{2\pi R_{DSON} R}{R + R_{DSON}}} \times \dfrac{3}{2C_0} \approx 320$ MHz.

9.5. TEMPS DE COMMUTATION DE LA PORTE ANALOGIQUE

Considérons le schéma de la figure 54 dans lequel la tension analogique v_A est constante et égale à V_0.

9.5.1. Ouverture de la porte

A l'instant $t = 0$, le signal de commande est appliqué sur la base du transistor bipolaire. La tension v_C est alors égale à $-E$, la tension aux bornes de la diode est nulle, et la capacité C_{GD} est chargée sous la tension $V_{GD} = -E$.

L'évolution des tensions v_c et v_u est décrite par les chronogrammes de la figure 64.

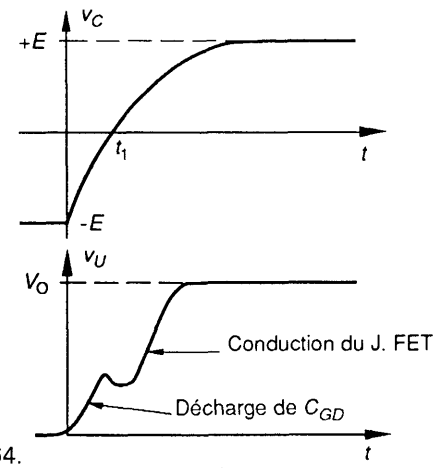


Fig. 64.

La tension de collecteur v_c évolue de $-E$ à $+E$, avec le temps de montée inhérent à la commutation du transistor bipolaire.

La capacité C_{GD} se décharge à travers la résistance R et la capacité C, entraînant l'apparition d'une tension v_u positive.

Le courant de décharge tend à disparaître, mais à partir de l'instant $t = t_1$ le canal commence à s'ouvrir et la tension v_u évolue vers V_0.

9.5.2. Fermeture de la porte

A l'instant $t = 0$, le signal de commande est appliqué sur la base du transistor; après le temps t_s nécessaire à l'évacuation de la charge stockée dans le transistor bipolaire, la tension v_c décroît de $+E$ vers $-E$ (*fig.* 63). A l'instant $t = t_s$ la tension aux bornes des capacités C_{GS} et C_{GD} est pratiquement nulle et la capacité C est chargée sous la tension $V_{CG} = E - V_0$.

Dès que la tension v_c commence à décroître, la capacité C tend à se décharger à travers un circuit à très faible résistance R_{DSON}. Elle provoque ainsi la charge rapide des capacités C_{GD} et C_{GS}, ce qui correspond en fait à l'apport des charges nécessaires à l'élargissement de la zone de transition de la jonction porte-canal. Cette décharge de la capacité C provoque ainsi un blocage rapide du J.FET et le retour de la tension v_u vers zéro. Le courant de décharge de la capacité C se perpétuant, après le blocage du J.FET, à travers la résistance R et la capacité C_{GD} provoque l'apparition d'une tension v_u négative (*fig.* 65).

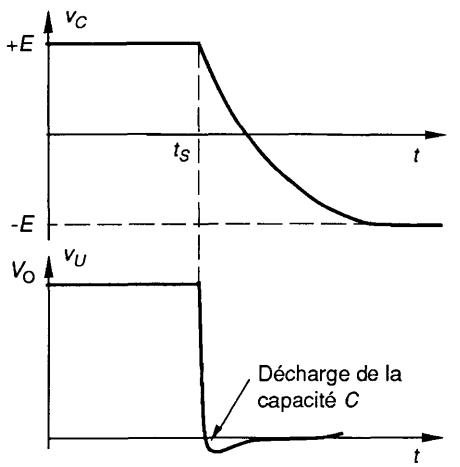


Fig. 65.

EXERCICES

1.

Soit le dispositif de la figure 1.

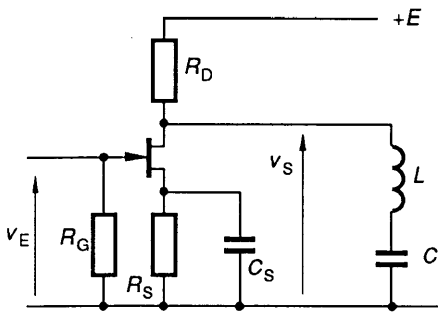


Fig. 1

1. *Polarisation*

On relève dans les feuilles de caractéristiques

$$V_{GSoff} = -4 \text{ volts}, \quad I_{DSS} = 16 \text{ mA}.$$

La tension d'alimentation E vaut 20 volts.

En négligeant la chute de tension dans la résistance R_G et en utilisant l'approximation quadratique, calculer les valeurs de R_S et de R_D qui fixent le point de repos à $V_{DS} = 10$ volts et $I_D = 4$ mA.

2. *Étude en régime sinusoïdal permanent*

a) La capacité C_S peut être considérée comme un court-circuit pour les fréquences de travail. Tracer le schéma équivalent pour les petits signaux sinusoïdaux. On donne $g_{dS} = 0$, calculer g_m.

b) Calculer la fonction de transfert $\underline{T} = \dfrac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}}$ et la mettre sous la forme :

$$\underline{T} = A_0 \frac{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Exprimer A_0, m et ω_0 en fonction de R_D, L, C, g_m.

c) Quelle est la fonction réalisée par la dispositif? Précisez ses caractéristiques : fréquence centrale, amplification maximale, bande rejetée à 3 db.

2.

Le schéma équivalent d'un J.FET en hautes fréquences et pour les petits signaux sinusoïdaux est donné figure 1.

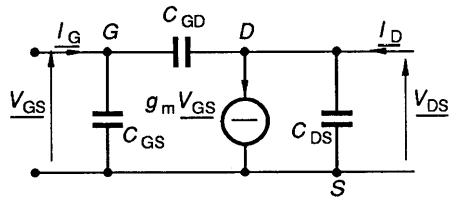


Fig. 1

On donne $C_{DS} = 0{,}5$ pF, $C_{GS} = C_{GD} = 5$ pF,

$$g_m = 30 \text{ mA/V}$$

1° Montrer que pour des fréquences de travail inférieures à 100 MHz, on peut admettre les approximations suivantes :

$$C_{DS} \ll \begin{matrix} C_{GS} \\ C_{GD} \end{matrix} \quad \text{et} \quad g_m \gg \begin{matrix} C_{GS}\omega \\ C_{GD}\omega \end{matrix}$$

2° La capacité C_{GD}, réalise une interdépendance entre le courant d'entrée et la tension de sortie et diminue la bande passante des amplificateurs. Pour limiter son effet, on réalise un montage cascode (*fig.* 2) à l'aide de deux *J.FET que nous supposerons identiques.*

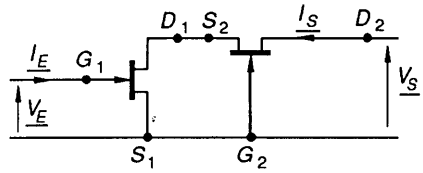


Fig. 2.

a) Donner le schéma équivalent au montage cascode pour les petits signaux sinusoïdaux.

b) Montrer, compte tenu des valeurs numériques et des approximations du 1°, que ce schéma se réduit au schéma de la figure 3.

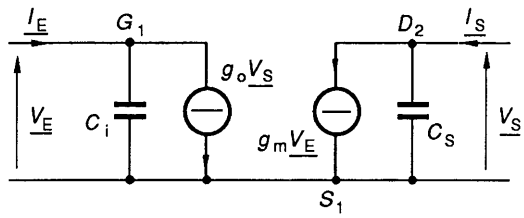


Fig. 3.

Exprimer les capacités C_i et C_S en fonction de C_{GD} et C_{GS}.

Exprimer l'admittance g_0 en fonction de g_m, C_{GD}, C_{DS} et montrer que l'interdépendance entre la tension de sortie et le courant d'entrée est négligeable.

5 amplificateur de différence

1. PRINCIPE

L'amplificateur de différence est un dispositif destiné à fournir un signal de sortie u_s proportionnel à la différence de deux signaux d'entrée u_1 et u_2, soit :

$$u_s = A_d[u_1 - u_2]$$

A_d est appelée **amplification de différence.**

On distingue deux types d'amplificateur de différence.

- Montage à sortie flottante :

pour lequel la référence de potentiel en sortie est différente de la référence commune aux signaux d'entrée (*fig.* 1).

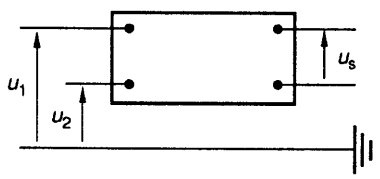


Fig. 1.

- Montage à référence commune :

pour lequel les signaux d'entrée et de sortie admettent la même référence de potentiel (*fig.* 2).

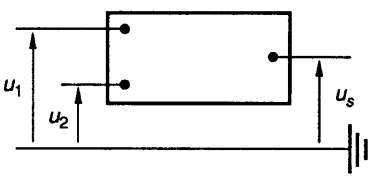


Fig. 2.

2. MONTAGE À SORTIE FLOTTANTE

Soit le dispositif de la figure 3 dans lequel les transistors T_1 et T_2, parfaitement identiques, sont alimentés par un générateur de courant constant I_0.

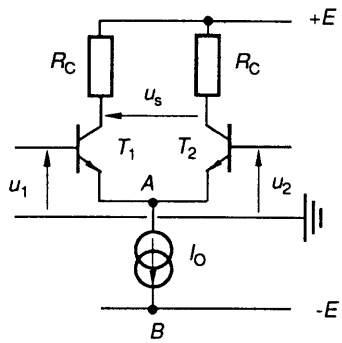


Fig. 3.

2.1. POLARISATION

En l'absence de signal, $u_1 = u_2 = 0$, les transistors doivent être dans une zone linéaire de fonctionnement.

- $V_{CE} > V_{CE\,sat}$.
- $V_{BE} \approx 0{,}6$ volts.

2.1.1. Tensions collecteur-émetteur V_{CE}

Les deux signaux d'entrée u_1 et u_2 étant égaux, le dispositif est parfaitement symétrique et les courants de collecteur sont égaux à $\frac{I_0}{2}$, soit :

$$E = R_C\frac{I_0}{2} + V_{CE} - V_{BE}.$$

La condition $V_{CE} > V_{CE\,sat}$ impose la relation :

$$E - R_C\frac{I_0}{2} + V_{BE} > V_{CE\,sat}.$$

2.1.2. Construction du générateur de courant

Plusieurs dispositifs sont possibles, nous en donnerons deux exemples.

D'une manière générale, nous considérerons que la tension base-émetteur d'un transistor conducteur est égale à 0,6 volt; nous la noterons 0,6 sans indication d'unité.

PREMIER EXEMPLE

La figure 4 donne le détail du montage qui apparaît entre les points A et B de la figure 3.

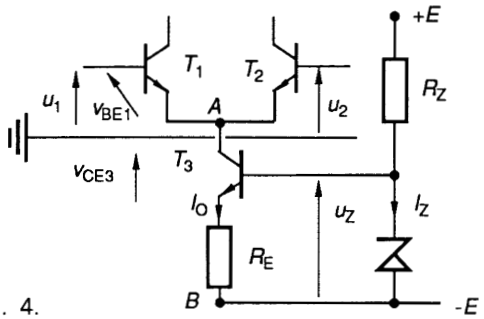


Fig. 4.

• La résistance R_Z est calculée de telle sorte que la diode zener fonctionne dans la zone verticale de la caractéristique $I_Z = f(U_Z)$

$$I_{Z\,min} < \frac{2E - U_Z}{R_Z} - \frac{I_0}{\beta} < I_{Z\,max}.$$

• La tension aux bornes de la résistance R_E est constante et égale à $U_Z - 0{,}6$. Le courant I_0 est donc fixé par R_E à $\dfrac{U_Z - 0{,}6}{R_E}$.

• La polarisation impose que, pour $u_1 = u_2 = 0$, les tensions V_{BE} des transistors T_1 et T_2 puissent se fixer à 0,6 volt. Il vient alors :

$$u_1 = 0 = V_{BE_1} + V_{CE_3} + U_Z - 0{,}6 - E,$$

soit

$$V_{BE_1} = E - U_Z + 0{,}6 - V_{CE_3}.$$

La tension V_{CE_3} s'ajuste de telle sorte que $0{,}6 = E - U_Z + 0{,}6 - V_{CE_3}$;

soit $\qquad V_{CE_3} = E - U_Z$,

mais ceci n'est possible que si :

$$\boxed{E - U_Z > V_{CE\,sat}}$$

REMARQUES

Dégageons du dispositif précédent la portion de schéma faisant intervenir les tensions collecteur-émetteur des transistors T_2 et T_3 (fig. 5)

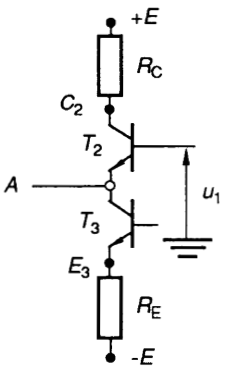


Fig. 5.

• *Pour $u_1 = u_2$:*

– *le potentiel du point C_2 est fixé à $E - R_C \dfrac{I_0}{2}$,*

– *le potentiel du point E_3 est fixé à*

$$-E + U_Z - 0{,}6.$$

Lorsque u_1 et u_2 évoluent simultanément, en restant égales entre elles, le potentiel du point A les suit à 0,6 volt près. Sachant que V_{CE_2} et V_{CE_3} doivent rester supérieures à $V_{CE\,sat}$, le potentiel du point A ne peut dépasser $E - R_C \dfrac{I_0}{2} - V_{CE\,sat}$ d'un côté et

$$-E + U_Z - 0{,}6 + V_{CE\,sat}$$

de l'autre, ce qui permet de déterminer l'excursion maximale de u_1 et u_2. Cette excursion maximale doit par ailleurs respecter les conditions de linéarité, la portion de caractéristique $I_B = f(V_{BE})$ utilisée devant pouvoir être assimilée à une droite.

• *Nous avons démontré précédemment que, pour les petites variations, la résistance équivalente du générateur de courant I_0 est de l'ordre de*

$$\frac{h_{21}}{h_{22}} \approx 10\ \text{M}\Omega.$$

DEUXIÈME EXEMPLE

Le générateur de courant I_0 peut être réalisé entre A et B par le schéma de la figure 6.

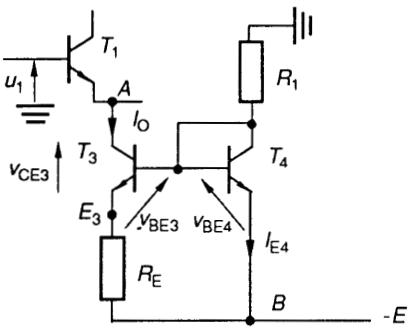


Fig. 6

Sachant que pour un transistor bipolaire, le courant d'émetteur est lié à la tension base émetteur par la relation $I_E = I_S\, e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}$, avec :

I_S courant de saturation, $V_T \approx 30$ mV,
on peut écrire :

$$I_0 = \frac{V_{BE_4} - V_{BE_3}}{R_E} = \frac{V_T \ln \frac{I_{E_4}}{I_0}}{R_E}$$

$$I_{E_4} = \frac{E - 0{,}6}{R_1}.$$

soit

$$\boxed{I_0 = \frac{V_T}{R_E} \ln \frac{E - 0{,}6}{R_1 I_0}}$$

équation qui fixe le courant I_0, compte tenu des valeurs de R_E, R_1 et E.

• Comme dans l'exemple précédent, la tension V_{CE_3} se fixe à une valeur telle que :

$$V_{BE_1} = 0{,}6 \text{ volt}$$

pour $u_1 = 0$, on peut écrire :

$$u_1 = 0 = 0{,}6 + V_{CE_3} + V_T \ln \frac{E - 0{,}6}{R_1 I_0} - E.$$

Ceci n'est possible que si

$$\boxed{E - 0{,}6 - V_T \ln \frac{E - 0{,}6}{R_1 I_0} > V_{CE\,sat}}$$

• De la même manière, le potentiel du point E_3 est fixé à $V_T \ln \frac{E - 0{,}6}{R_1 I_0}$, ce qui limite l'excursion du potentiel du point A ainsi que la valeur de $u_1 = u_2$.

REMARQUES

1. *Si* $R_E = 0$, *la condition* $V_{BE_3} = V_{BE_4}$ *impose* $I_0 = I_{E_4}$. *On réalise ainsi un « miroir de courant ».*

2. $V_T = \frac{KT}{e}$ *avec* K *: constante de Boltzmann,* e *: charge de l'électron,* T *: température absolue.*
V_T dépend donc de la température. Il en est de même de I_0 qui est fixé par l'équation

$$I_0 = \frac{V_T}{R_E} \ln \frac{E - 0{,}6}{R_1 I_0}.$$

Pour s'en affranchir, on peut réaliser le dispositif de la figure 7.

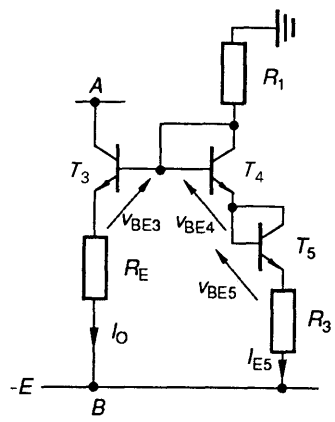


Fig. 7

Des équations

$$\begin{cases} R_E I_0 = V_{BE_4} + V_{BE_5} - V_{BE_3} + R_3 I_{E_5} \\ V_{BE_4} = V_T \ln \frac{I_{E_5}}{I_S} \\ V_{BE_5} = V_T \ln \frac{I_{E_5}}{I_S} \\ V_{BE_3} = V_T \ln \frac{I_0}{I_S} \\ E = (R_1 + R_3) I_{E_5} + V_{BE_4} + V_{BE_5} \end{cases}$$

on tire

$$\begin{cases} I_{E_5} = \dfrac{E - V_T \ln \left(\frac{I_{E_5}}{I_S}\right)^2}{R_1 + R_3} \\ R_E I_0 = V_T \ln \dfrac{I_{E_5}^2}{I_0 \cdot I_S} + R_3 I_{E_5}, \end{cases}$$

soit

$$R_E I_0 = V_T \ln \frac{I_{E_5}^2}{I_0 I_S} + \frac{R_3}{R_1 + R_3} \left[E - V_T \ln \left(\frac{I_{E_5}}{I_S}\right)^2 \right],$$

relation dans laquelle V_T et I_S dépendent de la température.
Afin de rendre le courant I_0 indépendant de la température, on doit réaliser

$$\ln \frac{I_{E_5}^2}{I_0 I_S} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} \ln \left(\frac{I_{E_5}}{I_S}\right)^2$$

en posant $\alpha = \frac{R_3}{R_1 + R_3}$ *il vient* $\frac{I_{E_5}^2}{I_0 I_S} = \frac{I_{E_5}^{2\alpha}}{I_S^{2\alpha}}$

soit $I_0 = I_S^{2\alpha - 1} \cdot I_{E_5}^{2(1-\alpha)}$.

Cette relation devant être vérifiée quelle que soit la température on choisit $\alpha = \frac{1}{2}$, *ce qui conduit à* $R_1 = R_3$ *et*

$$I_0 = I_{E_5} = \frac{E}{R_E} \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3}.$$

3. *Vis-à-vis des petites variations autour du point de repos, on obtient pour le schéma de la figure 6, le schéma équivalent de la figure 8.*

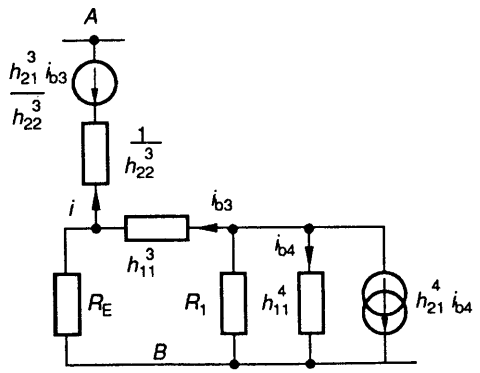


Fig. 8.

Le générateur de courant $h_{21}^4 ib_4$ soumis à la tension $h_{11}^4 ib_4$ est équivalent à la résistance $\frac{h_{11}^4}{h_{21}^4} \ll h_{11}^3$.

Le courant i est alors peu différent de $ib_3\left[1+\frac{h_{11}^3}{R_E}\right]$ et le générateur de tension $\frac{h_{21}^3}{h_{22}^3} ib_3$ peut être remplacé par la résistance $\frac{h_{21}^3}{h_{22}^3}\frac{R_E}{R_E+h_{11}^3}$.

La résistance équivalente entre les points A et B s'écrit $\frac{h_{21}^3}{h_{22}^3}\frac{R_E}{R_E+h_{11}^3}+\frac{1}{h_{22}^3}+\frac{h_{11}^3 R_E}{R_E+h_{11}^3}$,

de l'ordre de 10 MΩ.

2.2. ÉTUDE DYNAMIQUE

Effectuons le changement de variables

$$\begin{cases} u_c = \dfrac{u_1+u_2}{2} \\ u_d = u_1 - u_2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} u_1 = u_c + \dfrac{u_d}{2} \\ u_2 = u_c - \dfrac{u_d}{2} \end{cases}$$

Appliquons dès lors le théorème de superposition au schéma de la figure 3.

• Par suite de la symétrie du montage, l'application simultanée sur les deux entrées de la tension u_c conduit à une tension $u_s = u_{s_1} = 0$.

• L'application de la tension $+\frac{u_d}{2}$ sur le transistor T_1 et de la tension $-\frac{u_d}{2}$ sur le transistor T_2 conduit au schéma équivalent de la figure 9 à partir duquel on écrit :

$$\begin{cases} u_d = h_{11}(ib_1 - ib_2) \\ u_{s_2} = h_{21} R_C (ib_2 - ib_1) \end{cases}$$

soit $$u_{s_2} = -\frac{h_{21} R_C}{h_{11}} u_d.$$

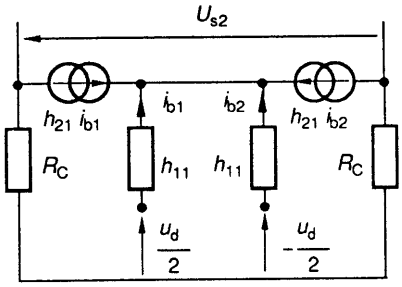


Fig. 9.

• L'application de u_1 sur le transistor T_1 et de u_2 sur le transistor T_2 conduit à une tension de sortie

$$u_s = u_{s_1} + u_{s_2} = -\frac{h_{21} R_C}{h_{11}} u_d$$

soit

$$u_s = -\frac{h_{21} R_C}{h_{11}}(u_1 - u_2) \text{ d'où } A_d = -\frac{h_{21} R_C}{h_{11}}$$

3. MONTAGE À RÉFÉRENCE COMMUNE

On obtient un montage à référence commune en complétant le schéma de la figure 3, conformément au schéma de la figure 10.

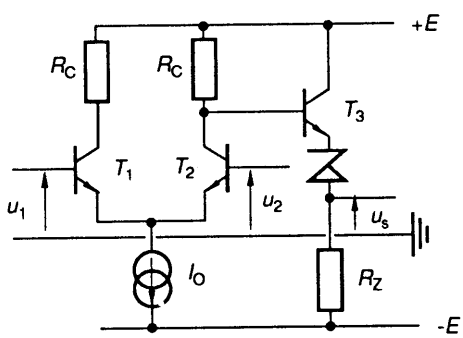


Fig. 10.

Le transistor T_3 monté en collecteur commun permet de préserver la symétrie de fonctionnement des transistors T_1 et T_2, en ne prélevant que très peu de courant sur le collecteur de T_2.

3.1. POLARISATION

Aux conditions décrites pour le montage à sortie flottante, il faut ajouter la condition suivante : la tension de sortie u_s doit être nulle lorsque $u_1 = u_2$, soit :

$$E - R_C \frac{I_0}{2} - 0{,}6 - U_Z = 0 .$$

3.2. ÉTUDE DYNAMIQUE

Vis-à-vis des petites variations, le schéma équivalent de la figure 10 est donné à la figure 11.

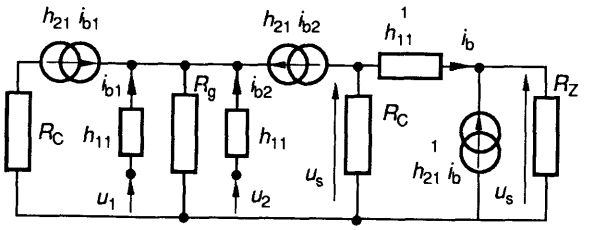


Fig. 11.

La résistance R_g est la résistance équivalente du générateur de courant pour les petites variations.

Le montage collecteur commun ayant un gain voisin de 1 et une résistance d'entrée très grande devant R_C, on peut écrire avec $h_{21} \gg 1$:

$$\begin{cases} u_s = -h_{21} ib_2 R_C \\ u_1 = h_{11} ib_1 + R_g(ib_1 + ib_2)h_{21} \\ u_2 = h_{11} ib_2 + R_g(ib_1 + ib_2)h_{21} \end{cases}$$

soit $\begin{cases} u_1 - u_2 = h_{11}(ib_1 - ib_2) \\ u_1 + u_2 = (h_{11} + 2h_{21}R_g)(ib_1 + ib_2). \end{cases}$

$$ib_1 - ib_2 = \frac{1}{h_{11}}(u_1 - u_2),$$

$$ib_1 + ib_2 = \frac{1}{h_{11} + 2h_{21}R_g}(u_1 + u_2),$$

d'où l'on peut déduire :

$$ib_2 = \frac{1}{h_{11} + 2h_{21}R_g} \times \frac{u_1 + u_2}{2} - \frac{1}{2h_{11}}(u_1 - u_2).$$

On obtient finalement le résultat suivant :

$$u_s = A_d(u_1 - u_2) + A_c \frac{u_1 + u_2}{2}$$

avec

$$A_d = \frac{h_{21}R_C}{2h_{11}} \text{ et } A_c = -\frac{h_{21}R_C}{h_{11} + 2h_{21}R_g}$$

Ainsi le dispositif amplifie non seulement la différence $u_1 - u_2$ mais aussi le mode commun $\frac{u_1 + u_2}{2}$.

A_d est *l'amplification de différence,*

A_c est *l'amplification de mode commun.*

Le montage se rapproche d'autant plus d'un amplificateur de différence idéal que $|A_d|$ est grand par rapport à $|A_c|$.

On le chiffre **par le taux de rejection du mode commun :**

$$K = \left| \frac{A_d}{A_c} \right|$$

4. COMPORTEMENT EN GRANDS SIGNAUX

Le fonctionnement du dispositif n'est linéaire que dans la mesure où le point de fonctionnement décrit une portion de caractéristique $i_E = f(v_{BE})$ assimilable à une droite.

Or cette caractéristique est décrite par l'équation :

$$i_E = I_S \, e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} = f(V_{BE})$$

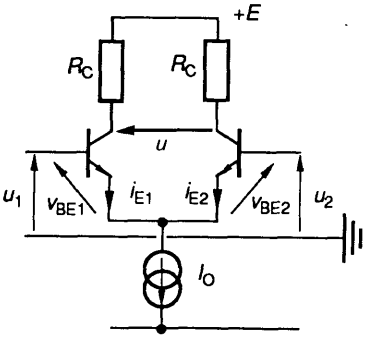


Fig. 12.

Sur le schéma de la figure 12, on peut écrire :

$$\begin{cases} i_{E_1} = f(V_{BE_1}) \\ i_{E_2} = f(V_{BE_2}) \\ i_{E_1} + i_{E_2} = I_0 \\ u = u_1 - u_2 = v_{BE_1} - v_{BE_2}. \end{cases}$$

La relation $i_{E_2} = f(u)$ peut être obtenue graphiquement point par point à partir du diagramme de la figure 13.

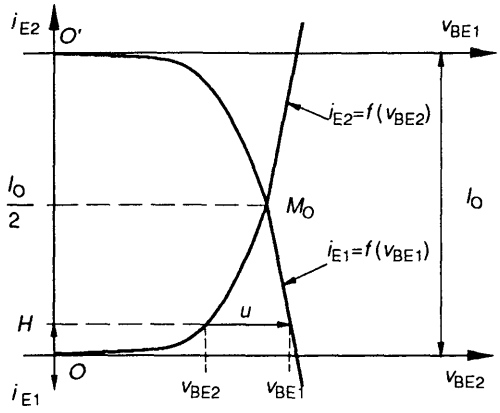


Fig. 13.

A un point H de l'axe vertical correspond une valeur de $i_{E_2} = OH$, à partir de laquelle on déduit la valeur de $i_{E_1} = I_0 - i_{E_2} = O'H$. On détermine alors les valeurs correspondantes de v_{BE_1} et v_{BE_2} ainsi que $u = v_{BE_1} - v_{BE_2}$.

On obtient pour la relation $i_{E_2} = f(u)$ la courbe de la figure 14.

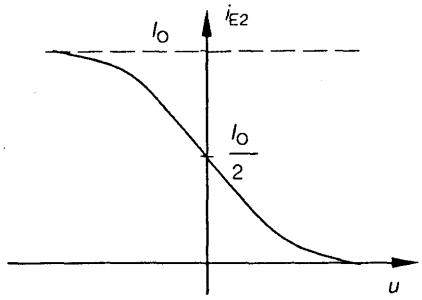


Fig. 14.

- Pour des petites variations autour du point M_0, les courbes $I_E = f(V_{BE})$ peuvent être assimilées à des droites et la relation $i_{E_2} = f(u)$ est linéaire.
- Pour des fortes variations le courant i_{E_2} se sature d'un côté à 0, de l'autre à I_0.

Ce phénomène est utilisé dans certains conformateurs qui permettent de transformer les signaux triangulaires en signaux sinusoïdaux.

On ajoute alors dans les émetteurs une petite résistance r, de l'ordre de grandeur de $\frac{2V_T}{I_0}$, conformément au schéma de la figure 15.

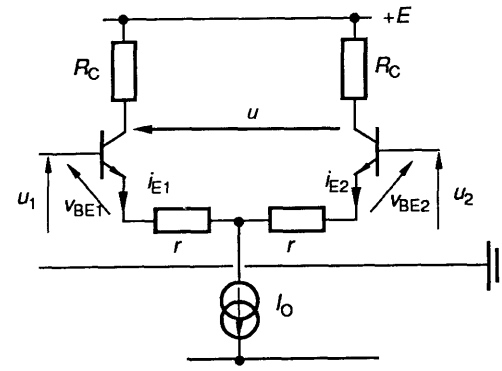


Fig. 15.

Nous obtenons alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} u = u_1 - u_2 = v_{BE_1} - v_{BE_2} + r(i_{E_1} - i_{E_2}) \\ i_{E_1} + i_{E_2} = I_0 \\ i_{E_1} = I_S \, e^{\frac{v_{BE1}}{V_T}} \\ i_{E_2} = I_S \, e^{\frac{v_{BE2}}{V_T}} \end{cases}$$

à partir desquelles on écrit :

$$v_{BE_1} - v_{BE_2} = V_T \ln \frac{i_{E_1}}{i_{E_2}},$$

soit $$u = V_T \ln \frac{I_0 - i_{E_2}}{i_{E_2}} + r(I_0 - 2i_{E_2}).$$

La résistance r est choisie de telle sorte que cette relation s'approche le plus possible de l'équation :

$$u = -4V_T \, . \, \text{Arc sin}\left(i_{E_2} - \frac{I_0}{2}\right).$$

Choisissons, à titre d'exemple $I_0 = 2$ mA, $V_T = 25$ mV. Les figures 16, 17, 18 permettent de comparer les courbes

$$\begin{cases} u = -V_T \ln \frac{I_0 - i_{E_2}}{i_{E_2}} - r(I_0 - 2i_{E_2}) \\ u = +4V_T \, \text{Arc sin}\left(i_{E_2} - \frac{I_0}{2}\right) \end{cases}$$

pour différentes valeur de r.

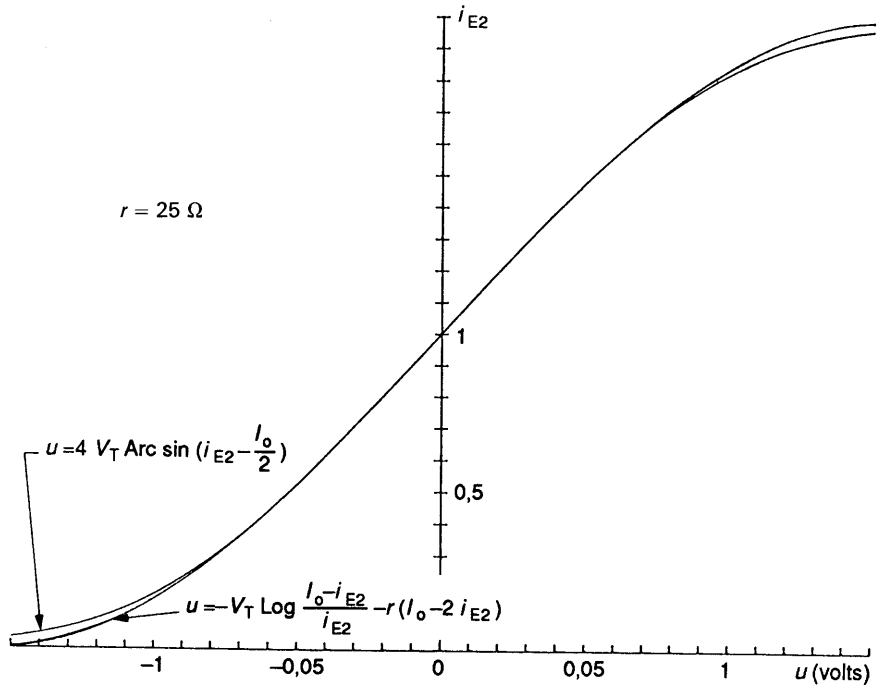

i_{E2}
$r = 25\ \Omega$
1
0,5
$u = 4\ V_T \text{ Arc sin } (i_{E2} - \frac{I_o}{2})$
$u = -V_T \text{ Log } \frac{I_o - i_{E2}}{i_{E2}} - r(I_o - 2\ i_{E2})$
−1
−0,05
0
0,05
1
u (volts)

Fig. 16.

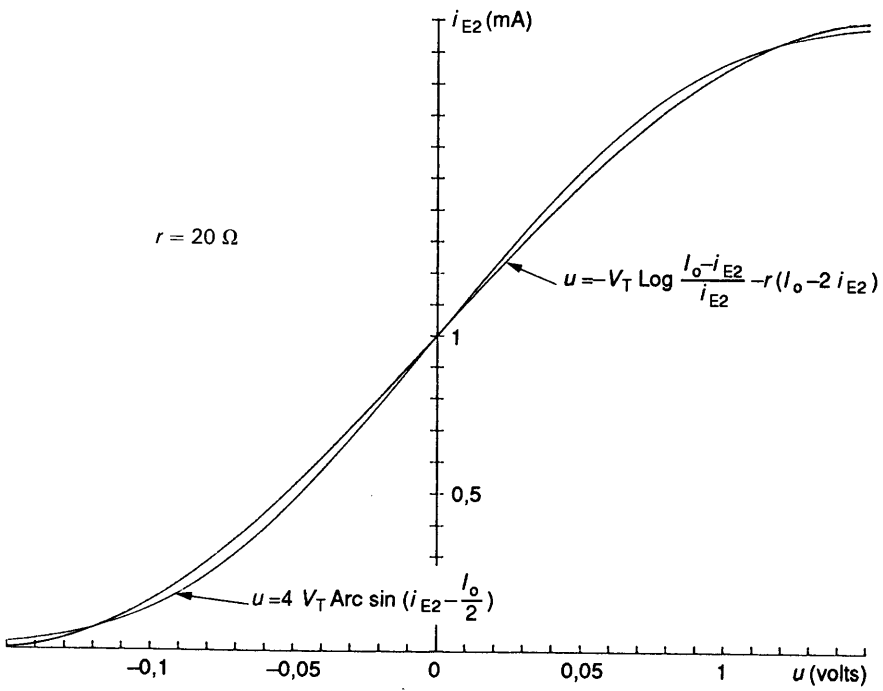

i_{E2} (mA)
$r = 20\ \Omega$
$u = -V_T \text{ Log } \frac{I_o - i_{E2}}{i_{E2}} - r(I_o - 2\ i_{E2})$
1
0,5
$u = 4\ V_T \text{ Arc sin } (i_{E2} - \frac{I_o}{2})$
−0,1
−0,05
0
0,05
1
u (volts)

Fig. 17.

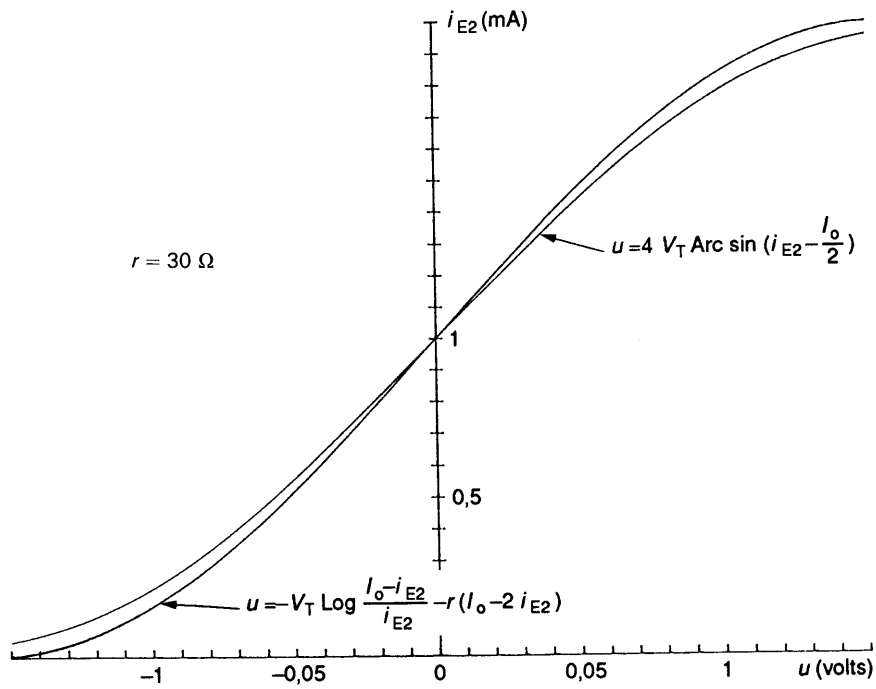


Fig. 18.

Remarquons que pour $r = 0$ et $i_{E_2} = \dfrac{I_0}{2} + i_{e_2}$ avec $i_{e_2} \ll I_0$ la relation $u = V_T \ln \dfrac{I_0 - i_{E_2}}{i_{E_2}} + r(I_0 - 2i_{E_2})$ devient

$$\frac{\frac{I_0}{2} - i_{e_2}}{\frac{I_0}{2} + i_{e_2}} = e^{\frac{u}{V_T}} \approx 1 + \frac{u}{V_T},$$

soit $$\frac{I_0}{2} - i_{e_2} = \left(\frac{I_0}{2} + i_{e_2}\right)\left(1 + \frac{u}{V_T}\right).$$

On en déduit, compte tenu de $i_{e_2} \ll I_0$,

$$i_{e_2} = -\frac{I_0}{4V_T}\,u.$$

Il apparaît donc aux bornes de R_C une variation de tension $u_s = -\dfrac{R_C I_0}{4V_T}\,u$.

Sachant que $h_{11} = \dfrac{V_T}{I_B} = \dfrac{h_{21} V_T}{\frac{I_0}{2}}$, il vient :

$$u_s = -\frac{R_C h_{21}}{2h_{11}}\,u$$

qui est bien la relation démontrée dans l'étude dynamique.

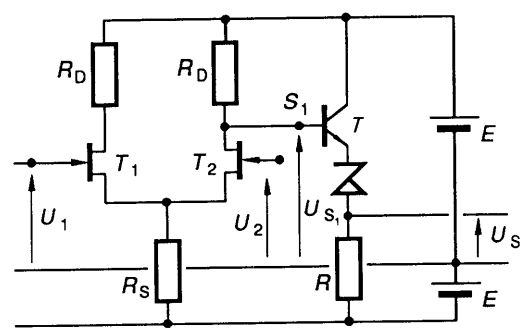
EXERCICES

1.
Soit le montage ci-contre.
Diode Zener : $U_{z_0} = 6{,}8$ V, résistance dynamique négligeable.
T_1, T_2 : transistors à effet de champ :

$$g_m = 3 \text{ mA/V}; \quad g_{ds} = 0.$$

T : transistor au silicium :

$V_{BE} = 0{,}6$ V; $h_{11} = 1$ kΩ; $h_{21} = 150$; $h_{12} = h_{22} = 0$,
$R_D = 2{,}2$ kΩ; $R = 2{,}2$ kΩ; $E = 15$ V.



1° Quelle valeur doit avoir le courant de drain des deux F.E.T. pour que $U_s = 0$ lorsque $U_1 = U_2 = 0$?
Pour la valeur précédente de I_D, on relève sur la courbe de transfert des F.E.T., $V_{GS} = -1{,}5$ V. Quelle valeur faut-il donner à R_S? Calculer V_{DS} et V_{CE}.

2° Tracer le schéma équivalent alternatif.
(Les grandeurs alternatives seront notées avec des petites lettres.)

3° Montrer que l'impédance d'entrée de T est grande devant R_D, et que $u_s \approx u_{s_1}$. En déduire u_s en fonction de v_{gs_2}.
4° Exprimer $u_1 + u_2$ et $u_1 - u_2$ en fonction de v_{gs_1} et v_{gs_2}.
En déduire v_{gs_2} en fonction de $\frac{u_1 + u_2}{2}$ et $u_1 - u_2$.

5° Calculer l'amplification de mode commun et l'amplification de différence.
$\left(\text{On rappelle que } u_s = A_d(u_1 - u_2) + A_C \frac{u_1 + u_2}{2}.\right)$
Calculer le facteur de réjection du mode commun; (application numérique). Comment pourrait-on l'augmenter?

2.
La construction de la fonction multiplieur est basée sur l'emploi du circuit amplificateur différentiel dont le schéma de principe est donné figure 1. On admettra que, dans les conditions d'emploi fixées ici, la relation liant V_B et V_E à I_C, pour chacun des transistors du montage est :

$$I_C = I_0 \cdot \exp\left(\frac{V_B - V_E}{V_T}\right).$$

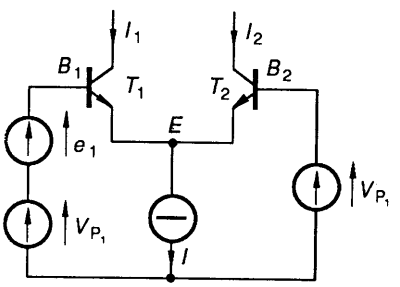


Fig. 1

1° Que représentent, dans cette formule, les quantités I_0 et V_T? On admettra que $V_T = 25$ mV à la température ambiante.

2° Calculer les courants collecteur I_1 et I_2 de chacun des deux transistors.

3° Exprimer I_1 et I_2 en fonction de I et de la quantité $x = \frac{e_1}{V_T}$.

4° Donner un développement limité au premier ordre pour I_1 et I_2 lorsque x est beaucoup plus petit que 1.

On construit le circuit de la figure 2 en utilisant trois amplificateurs de différence identiques à celui de la figure 1.
On pose $y = \frac{e_2}{V_T}$. e_2 est le signal appliqué à la base du transistor T_1.

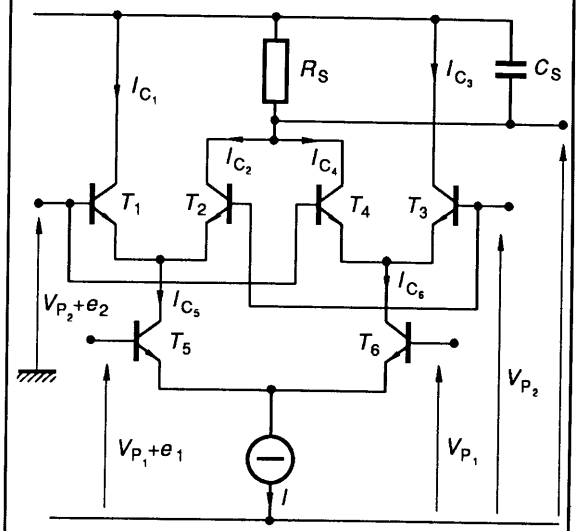


Fig. 2.

5° Établir l'expression donnant la valeur du courant $I_S = I_{C_2} + I_{C_4}$ en fonction des quantités x, y et I.
6° Donner une forme simplifiée de cette relation utilisable lorsque x et y sont très petits devant 1.

3.
L'amplificateur de différence représenté ci-dessous est utilisé en commutation, pour la construction d'une famille logique appelée E.C.L. (*Emetter-coupled logic*).

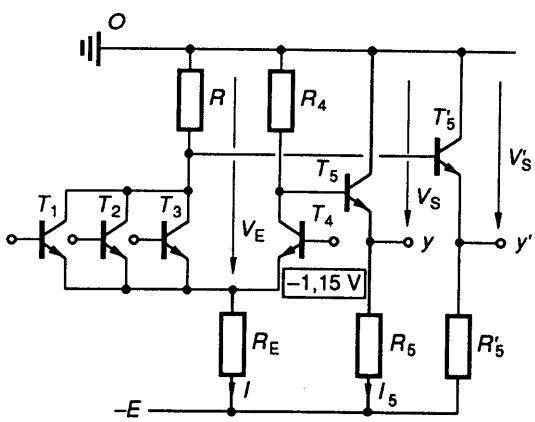


Fig. 3.

On donne :

$R_4 = 300\ \Omega$; $R_5 = 1{,}5$ kΩ; $R'_5 = 1{,}5$ kΩ; $R_E = 1{,}18$ kΩ; $-E = -5{,}2$ volts.

Potentiel de la base de T_4 : $-1{,}15$ volts.
La tension base émetteur d'un transistor conducteur est égale à 0,7 volt.
Une jonction est bloquée si sa tension directe est inférieure à 0,5 volt.
Les courants de base sont négligés devant les courants de collecteur.

1° On admet dans cette question que les transistors T_1, T_2, T_3 sont bloqués.
a) Montrer que le transistor T_4 est conducteur et calculer V_E, I et V_S.
b) Montrer que si la base des transistors T_1, T_2, T_3 est portée au potentiel $-1{,}55$ volts, ces transistors sont bien bloqués. Conclure sur la tension correspondant à un état bas.
c) Le transistor T_4 est-il saturé?

2° On admet dans cette question que le transistor T_4 est bloqué?
a) Calculer I_5 et V_S.
b) Montrer que si la base d'un des transistors T_1, T_2, T_3 est portée au potentiel $-0{,}7$ volt, T_4 est bien bloqué. Conclure sur la tension correspondant à un état haut.
c) Calculer la valeur minimale de la résistance R autorisant la non saturation des transistors T_1, T_2, T_3.

3° Quelle est la nature de la fonction logique réalisée?

4° Calculer la résistance R pour que les niveaux logiques de la sortie Y' soient complémentaires de ceux de la sortie Y.

5° Montrer qu'au cours du fonctionnement, aucun transistor n'entre en saturation. Conclure sur le temps de propagation du signal à travers la porte.

6 amplificateur opérationnel

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

L'amplificateur opérationnel le plus couramment utilisé est un amplificateur de différence à référence commune. Il nécessite une alimentation de polarisation $+E$ et $-E$.

Il possède :

– deux entrées : une entrée notée ⊖ dite entrée inverseuse,
une entrée notée ⊕ dite entrée non inverseuse;
– une sortie.

La référence du potentiel est choisie de façon purement arbitraire, cependant il est habituel de choisir le potentiel à partir duquel sont comptées les tensions d'alimentation $+E$ et $-E$, ce qui garantit à priori une excursion en tension de sortie symétrique (*fig.* 1).

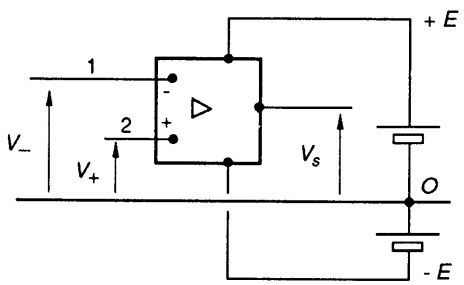


Fig. 1

Dans ce cas on notera :

$$v_s = \mu(v_+ - v_-)$$

L'amplificateur de différence aura les propriétés suivantes :

– amplification en tension la plus grande possible, on retiendra en général $\mu > 10^4$;
– impédance d'entrée la plus grande possible, on retiendra en général une valeur supérieure à $10^6\ \Omega$;
– impédance de sortie très faible, inférieure à $200\ \Omega$;
– bande passante allant du continu à une fréquence la plus élevée possible;
– facteur de réjection du mode commun le plus grand possible.

2. ÉQUATION DES MONTAGES FONDAMENTAUX

2.1. HYPOTHÈSES SIMPLIFICATRICES DE L'AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL IDÉAL

a) L'amplificateur opérationnel idéal est un amplificateur dont l'amplification en tension est infinie. En écrivant : $v_+ - v_- = \dfrac{v_s}{\mu}$, et sachant que v_s est fini on aura :

$$v_+ - v_- = 0$$

b) L'amplificateur opérationnel idéal est un amplificateur dont les impédances d'entrée sont infinies; les courants d'entrée + et − sont donc nuls,

$$i_+ = 0$$
$$i_- = 0$$

ce qui se résume sur la figure 2.

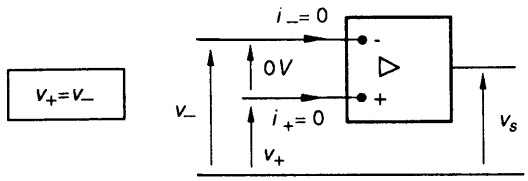


Fig. 2

2.2. CONVERSION TENSION-COURANT ET COURANT-TENSION

Soit le montage de la figure 3.

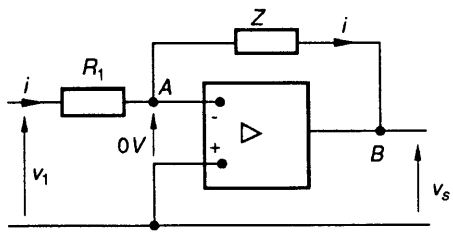


Fig. 3

Le courant i dans R_1 vaut $\frac{v_1}{R_1}$, il se retrouve intégralement dans Z.

On règle par la tension v_1 le courant qui passe dans Z indépendamment de sa valeur.

Le montage vu de AB se comporte comme un générateur parfait de courant commandé en tension par v_1.

Prenons maintenant le montage de la figure 4.

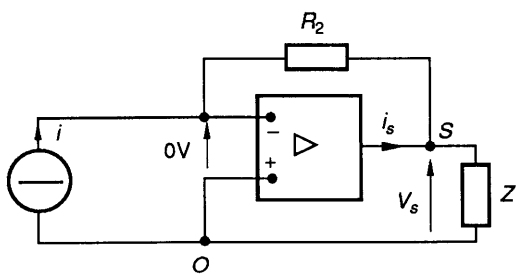


Fig. 4

Le courant fourni par le générateur de courant se retrouve intégralement dans R_2, on aura donc $v_s = -R_2 i$, ceci indépendamment de la charge Z placée en sortie.

Le montage vu entre S et O se comporte comme un générateur parfait de tension.

Ces deux remarques restent valables tant que $|v_s| < E$ et que $i_s < i_{s\max}$ défini par constructeur.

REMARQUE

Bien qu'en apparence, les entrées + et − puissent être permuttées sur l'amplificateur opérationnel parfait, la stabilité impose que l'entrée + soit reliée à la référence des potentiels. En effet, une augmentation accidentelle de v_s provoque un accroissement de la tension sur l'entrée − et par suite, une diminution de v_s et un retour vers sa valeur initiale.

2.3. MONTAGE INVERSEUR

Le montage (*fig.* 5) résulte de la combinaison des deux montages précédents (*fig.* 3 et 4).

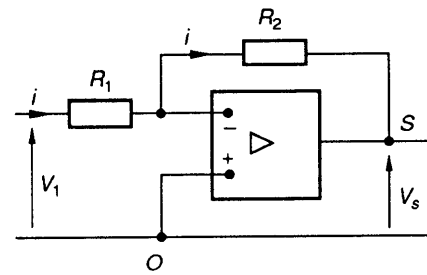


Fig. 5

Il est donc constitué d'un générateur de courant commandé par v_1 : $i = \frac{v_1}{R_1}$.

Ce générateur de courant i débite dans la résistance R_2. Entre S et O le montage se comporte comme un générateur de tension parfait de valeur : $v_s = -R_2 i$.

On aura donc :

$$v_s = -\frac{R_2}{R_1} v_1,$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{v_s}{v_1} = -\frac{R_2}{R_1}}$$

On voit que l'on est en présence d'un amplificateur de tension d'amplification $-\frac{R_2}{R_1}$ d'où l'appelation inverseur.

Cet amplificateur de tension peut avoir toutes les valeurs d'amplification que l'on veut en jouant sur R_1 et R_2.

L'impédance d'entrée du montage vaut $\frac{v_1}{i} = R_1$, elle est donc imposée par le choix de R_1.

2.4. MONTAGE SOMMATEUR

Le courant i (fig. 6) est la somme des courants fournis par les n générateurs de courant (l'entrée moins se comporte comme la référence de potentiel 0) :

$$v_s = -\frac{R_0}{R_1} v_1 - \frac{R_0}{R_2} v_2 - \frac{R_0}{R_3} v_3 - \dots$$

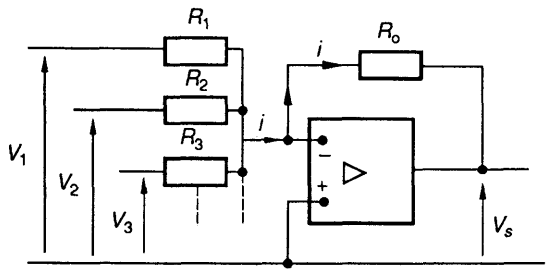


Fig. 6

2.5. MONTAGE INTÉGRATEUR

Le générateur de courant $i = \frac{v_1}{R}$ (*fig.* 7) débite dans le condensateur de capacité C. Le générateur de tension de sortie v_s est donc défini par la différence de potentiel qui apparaît aux bornes de C.

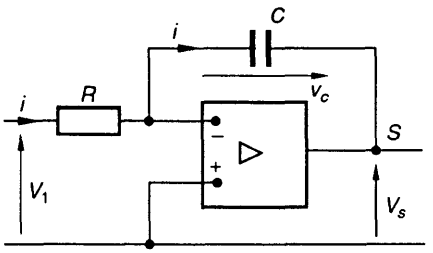


Fig. 7

On a :

$$\begin{cases} i = -C\dfrac{dv_c}{dt} = -C\dfrac{dv_s}{dt} \\ i = \dfrac{v_1}{R}. \end{cases}$$

On en tire :

$$dv_s = -\frac{v_1}{RC}\,dt,$$

en intégrant :

$$[v_s]_0^t = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_1\,dt$$

Le montage se comporte comme un intégrateur, il est à remarquer que l'impédance d'entrée du montage est toujours égale à R.

2.6. GÉNÉRALISATION

Considérons le montage défini par la figure 8.

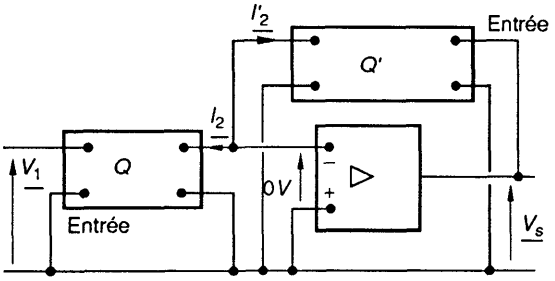


Fig. 8

Les quadripôles Q et Q' sont connus par leurs paramètres admittance Y.

Ces quadripôles Q et Q' fonctionnent à tension de sortie nulle (la différence de potentiel entre les entrées + et − est nulle).

Les courants de sortie $\underline{I}_2$ et $\underline{I}'_2$ des deux quadripôles sont définis par :

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{V}_1$$
$$\underline{I}'_2 = \underline{Y}'_{21}\underline{V}_s$$

Comme le courant absorbé par l'entrée − est nul on a :

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}'_2,$$

on en déduit :

$$\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_1} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}'_{21}}$$

Ce résultat est utilisé pour la réalisation d'une fonction de transfert donnée, il suffit de trouver les quadripôles Q et Q' qui permettent de synthétiser le rapport $\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}'_{21}}$.

C'est le principe d'une famille de filtres actifs.

2.7. MONTAGE NON INVERSEUR

Considérons le dispositif de la figure 9 :

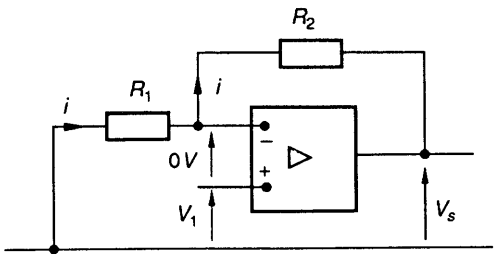


Fig. 9.

Les courants circulant vers les entrées + et − étant nuls, le même courant i circule dans les résistances R_1 et R_2. De plus, les potentiels des entrées + et − étant égaux, le montage fonctionne comme un potentiomètre élévateur de tension.

On en déduit que :

$$\boxed{\frac{v_s}{v_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}}$$

On a donc un amplificateur de tension non inverseur, dont l'impédance d'entrée est infinie.

REMARQUE

Le montage particulier donné par $R_2 = 0$ et R_1 infini est appelé montage suiveur de tension; il est utilisé en adaptateur d'impédance car il a une impédance d'entrée infinie, une impédance de sortie nulle et un gain de tension égal à l'unité.

2.8. AMPLIFICATEUR DE DIFFÉRENCE

En écrivant l'égalité des potentiels des entrées + et −, sur le montage de la figure 10, il vient :

$$\begin{cases} v_A = \dfrac{v_s R_1 + v_1 R_2}{R_1 + R_2}, \\ v_B = v_2 \dfrac{R_4}{R_3 + R_4}, \end{cases}$$

d'après $v_A = v_B$ on obtient :

$$v_s = \frac{R_1 + R_2}{R_1}\left[v_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4} - v_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right].$$

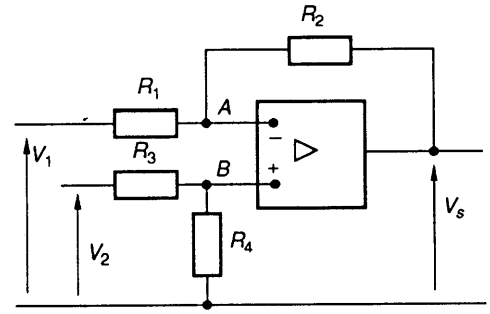


Fig. 10

Pour obtenir un amplificateur de différence il faut que les coefficients de v_2 et de v_1 soient égaux donc :

$$\frac{R_4}{R_3 + R_4} = \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

c'est-à-dire : $\boxed{\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_4}}$

On aura alors :

$$\boxed{v_s = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1)}$$

Reprenons l'expression générale de v_s :

$$v_s = \frac{R_1 + R_2}{R_1}\left(v_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4} - v_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right).$$

En posant $\begin{cases} v_c = \dfrac{v_1 + v_2}{2}, \\ v_d = v_2 - v_1 \end{cases}$

et en remarquant que $\begin{cases} v_1 = v_c - \dfrac{v_d}{2}, \\ v_2 = v_c + \dfrac{v_d}{2}, \end{cases}$ il vient :

$$v_s = \frac{R_1 + R_2}{R_1}\left[\frac{R_4}{R_3 + R_4}\left(v_c + \frac{v_d}{2}\right) - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(v_c - \frac{v_d}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{R_1 + R_2}{R_1}\left[v_c\left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) + \frac{v_d}{2}\left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)\right].$$

En comparant cette formule à l'expression générale de la tension de sortie d'un amplificateur de différence ($v_s = A_c v_c + A_d v_d$), on écrit :
amplification de différence :

$$A_d = \frac{R_1 + R_2}{2R_1}\left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right);$$

amplification de mode commun :

$$A_c = \frac{R_1 + R_2}{R_1}\left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right);$$

facteur de réjection du mode commun : $K = \frac{A_d}{A_c}$:

$$K = \frac{1}{2} \times \frac{R_4(R_1 + R_2) + R_2(R_3 + R_4)}{R_4(R_1 + R_2) - R_2(R_3 + R_4)}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{R_1R_4 + R_2R_3 + 2R_2R_4}{R_1R_4 - R_2R_3}.$$

Il est à remarquer que le facteur de réjection du mode commun dépend de la précision avec laquelle est réalisée l'égalité

$$R_1R_4 = R_2R_3.$$

2.9. MONTAGE À ÉLÉMENTS NON LINÉAIRES

Le principe revient à insérer un dispositif non linéaire dans une des branches. Soit dans la branche générateur de courant, on dispose alors d'un générateur de courant commandé de façon non linéaire. Soit d'alimenter, par le générateur de courant, un élément dont la réponse en tension n'est pas linéaire.

Ce cas est utilisé pour réaliser l'amplificateur logarithmique de la figure 11.

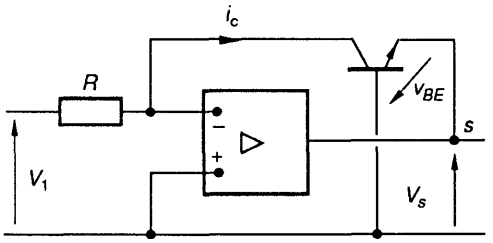


Fig. 11

Le courant i_C est lié à la tension v_{BE} par la relation

$$i_C = I_S\, e^{\frac{v_{BEe}}{KT}}.$$

$\frac{KT}{e} = 25$ mV à la température ambiante,

On pose $\frac{KT}{e} = V_T$.

On aura alors : $\begin{cases} v_s = -v_{BE}, \\ i_C = I_S\, e^{\frac{v_{BE}}{VT}}, \\ i_C = \frac{v_1}{R}. \end{cases}$

on a $v_1 = RI_S\, e^{-\frac{v_s}{VT}}$,

à condition que v_1 soit positif on aura alors :

$$v_s = -V_T \ln \frac{v_1}{RI_S},$$

ou encore :

$$\boxed{v_s = -V_T \ln v_1 + \text{constante}}$$

On constate que la sortie est une fonction affine du logarithme de la tension d'entrée.

En inversant la position de la résistance et du transistor on aura un générateur de courant commandé en tension de façon exponentielle, la différence de potentiel en sortie est alors une fonction exponentielle de la tension d'entrée.

3. AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL RÉEL

Les amplificateurs opérationnels que nous utiliserons se différencient de l'amplificateur opérationnel idéal par trois types d'erreurs.

- Les erreurs dites de « calcul »

Elles résultent de la valeur finie des paramètres de l'amplificateur opérationnel :
- amplification non infinie,
- résistance d'entrée non infinie,
- résistance de sortie non nulle.

- Les erreurs dites « statiques »

Elles sont dues à la présence de générateurs de tension et de courants parasites.

- Les erreurs dites « dynamiques »

Dues à la présence d'éléments réactifs et aux limitations en fréquence des composants actifs, elles limitent la bande passante de l'amplificateur opérationnel réel.

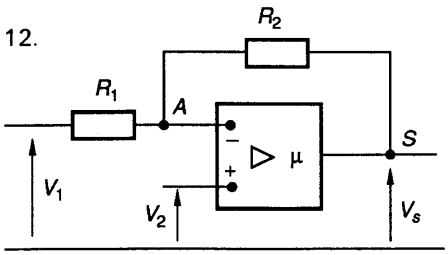
Nous allons étudier dans cet ordre les conséquences pour l'amplificateur réel.

4. ERREURS DITES DE « CALCUL »

4.1. ERREUR DUE À L'AMPLIFICATION FINIE

Prenons le montage défini par la figure 12.

Fig. 12.



L'amplification différentielle de l'amplificateur opérationnel est finie et égale à μ, soit :

$$v_s = \mu(v_2 - v_A).$$

A partir de l'expression de v_A :

$$v_A = \frac{R_1 v_s + R_2 v_1}{R_1 + R_2},$$

il vient

$$v_s = \mu\left(v_2 - \frac{R_1 v_s + R_2 v_1}{R_1 + R_2}\right).$$

On pose $\beta = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$,

en remarquant que $1 - \beta = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$, il vient :

$$v_s = \frac{\mu}{1 + \beta\mu}[v_2 - v_1(1 - \beta)],$$

donc :

$$v_s = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\beta\mu}} \cdot \frac{1}{\beta}[v_2 - v_1(1 - \beta)].$$

Si l'amplificateur opérationnel avait été idéal, on aurait obtenu (pour $\mu\infty$) :

$$(v_s)_{\text{idéal}} = \frac{1}{\beta}[v_2 - v_1(1 - \beta)].$$

On peut donc comparer la sortie du montage réel, avec la sortie qu'aurait donnée un amplificateur opérationnel idéal; on a alors :

$$v_s = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\beta\mu}} \cdot (v_s)_{\text{idéal}},$$

en développant on obtient :

$$\frac{v_s}{\beta\mu} + v_s = (v_s)_{\text{idéal}},$$

$$(v_s)_{\text{idéal}} - v_s = \frac{v_s}{\beta\mu}.$$

L'erreur relative $\varepsilon = \dfrac{(v_s)_{\text{idéal}} - v_s}{v_s}$ s'établit ainsi à :

$$\varepsilon = \frac{1}{\beta\mu}.$$

L'étude de l'erreur dynamique nous montrera qu'en régime sinusoïdal établi, le gain μ est complexe et que son module diminue en fonction de la fréquence. La figure 13 donne un exemple de variation de $|\mu|$ dans le diagramme de Bode.

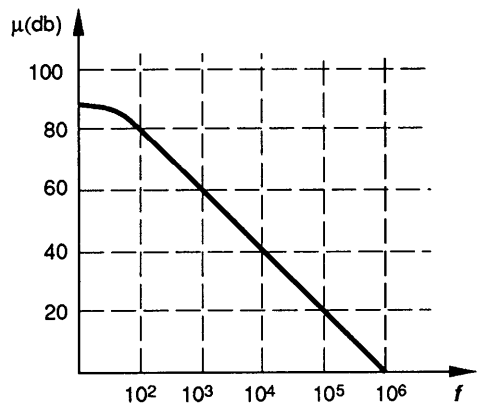


Fig. 13.

Considérons le montage particulier de la figure 14 dans lequel $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$ et $R_2 = 10\ \text{k}\Omega$.

Il s'agit d'un montage inverseur dont le gain théorique en tension est égal à 10 et pour lequel $\beta = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} = \dfrac{1}{11}$.

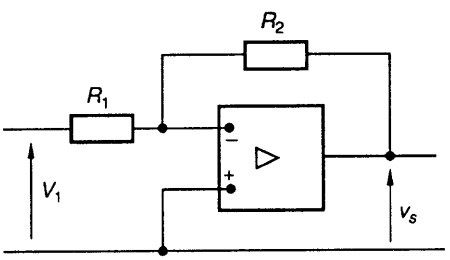


Fig. 14.

Le module de μ passe de 10 000 à 100 lorsque la fréquence d'utilisation passe de 100 Hz à 10 kHz et le module de l'erreur relative passe de $\dfrac{11}{10\,000}$ à $\dfrac{11}{100}$.

L'erreur systématique due à l'amplification finie par défaut à 1 000 Hz vaut 1,1 %, on peut donc considérer que les propriétés du montage sont peu altérées jusqu'à 1 000 Hz.

4.2. ERREUR DUE Á L'IMPÉDANCE D'ENTRÉE NON INFINIE

Reprenons le schéma de la figure 12 auquel nous ajoutons la résistance R_E (*fig.* 15).

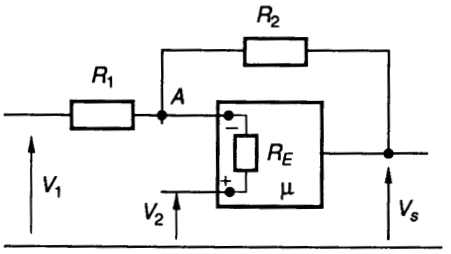


Fig. 15

Écrivons la loi des nœuds au point A

$$\frac{v_1 - v_A}{R_1} + \frac{v_s - v_A}{R_2} = \frac{v_A - v_2}{R_E}.$$

La différence de potentiel à la sortie est :

$$v_s = -\mu(v_A - v_2),$$

on en tire le potentiel du point A :

$$v_A = -\frac{v_s}{\mu} + v_2,$$

on le reporte dans l'équation des courants :

$$\frac{v_s}{R_2} - v_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_E}\right) = -\frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_E},$$

$$v_s\left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_E}\right)\right]$$

$$= -\frac{v_1}{R_1} + v_2\left[-\frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_E}\right].$$

On pose $\begin{cases} \beta = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}, \\ R_{//} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \end{cases}$

en remarquant que $R_{//} = \beta R_2$ et $R_{//} = (1 - \beta)R_1$, il vient :

$$v_s\left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mu}\frac{R_{//} + R_E}{R_{//} \cdot R_E}\right] = v_2 \cdot \frac{1}{R_{//}} - \frac{v_1}{R_1},$$

$$v_s\left[\frac{\beta}{R_{//}} + \frac{1}{\mu}\frac{R_{//} + R_E}{R_{//} \cdot R_E}\right] = \frac{1}{R_{//}}[v_2 - (1 - \beta)v_1],$$

$$v_s\left[\frac{\beta}{R_{//} + R_E} + \frac{1}{\mu R_E}\right] = \frac{1}{R_{//} + R_E}[v_2 - (1 - \beta)v_1],$$

$$v_s\left[\frac{\mu\beta R_E}{R_{//} + R_E} + 1\right] = \frac{\mu R_E}{R_{//} + R_E}[v_2 - (1 - \beta)v_1].$$

En posant $\mu_R = \dfrac{\mu \cdot R_E}{R_{//} + R_E}$, on obtient :

$$v_s[\mu_R \cdot \beta + 1] = \mu_R[v_2 - (1 - \beta)v_1].$$

Cette formule est à rapprocher de celle obtenue au paragraphe précédent.

Tout se passe comme si l'amplificateur opérationnel avait une résistance d'entrée infinie et une amplification donnée par :

$$\mu_R = \frac{\mu R_E}{R_{//} + R_E}.$$

L'erreur relative devient donc :

$$\varepsilon_R = \frac{1}{\mu_R \beta} = \frac{1}{\mu\beta}\left[\frac{R_{//} + R_E}{R_E}\right].$$

La présence de R_E se caractérisera par une multiplication de l'erreur relative par le facteur $\left(1 + \dfrac{R_{//}}{R_E}\right)$.

Dans le cas du montage de la figure 16, $R_{//}$ vaut 45 kΩ.

Dans la notice constructeur on trouve $R_{E\min} = 300$ kΩ, on aura alors $\dfrac{R_{//}}{R_E} = 0{,}15$.

L'erreur relative passera alors à : $\varepsilon \times 1{,}15$ pour toute la gamme de fréquence.

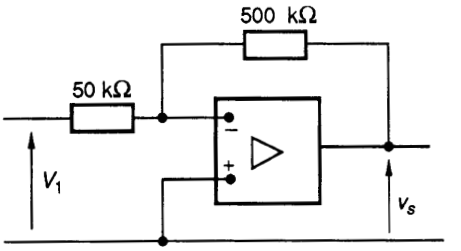


Fig. 16

4.3. ERREUR DUE À LA RÉSISTANCE DE SORTIE NON NULLE

On peut modéliser ce fonctionnement en prenant l'amplificateur opérationnel précédent auquel on ajoute la résistance R_0 en série sur la sortie, on obtient alors le montage de la figure 17.

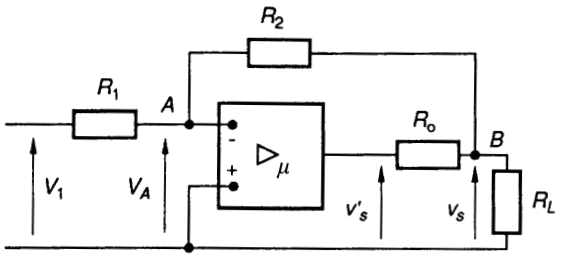


Fig. 17

Nous aurons donc :

$$v'_s = -\mu v_A.$$

Au nœud B :

$$\frac{v_A - v_s}{R_2} + \frac{v'_s - v_s}{R_0} = \frac{v_s}{R_L},$$

$$\frac{v_A}{R_2} - \frac{v_s}{R_2} - \frac{\mu v_A}{R_0} - \frac{v_s}{R_0} = \frac{v_s}{R_L},$$

$$v_A\left(\frac{1}{R_2} - \frac{\mu}{R_0}\right) = v_s\left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Comme R_2 est très grand devant $\frac{R_0}{\mu}$ (qui peut aller de $10^{-3}\ \Omega$ à $10\ \Omega$), on peut négliger $\frac{1}{R_2}$ devant $\frac{\mu}{R_0}$, on aura donc :

$$v_s = -\frac{\mu}{R_0} \times \frac{v_A}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_2}},$$

donc :

$$v_s = -\frac{\mu}{1 + R_0\left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_2}\right)} \times v_A.$$

On peut poser :

$$\frac{\mu}{1 + R_0\left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_2}\right)} = \mu_s.$$

On a alors : $v_s = -\mu_s \cdot v_A$.

Donc tout se passe comme si on avait un amplificateur opérationnel d'amplification μ_s ; pour connaître l'erreur que cela introduit dans un montage inverseur on peut appliquer la formule calculée précédemment :

$$\varepsilon = \frac{1}{\beta\mu},$$

et remplacer μ par μ_s.

L'erreur relative ε est multipliée par

$$1 + R_0\left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Pour minimiser l'effet de R_0 il faut prendre R_L et R_2 grands devant R_0.

Comme l'amplificateur opérationnel réel présente une résistance de sortie non nulle, il en sera de même pour tous les dispositifs faisant intervenir cet amplificateur. Calculons, à titre d'exemple, la résistance de sortie du montage de la figure 18 :

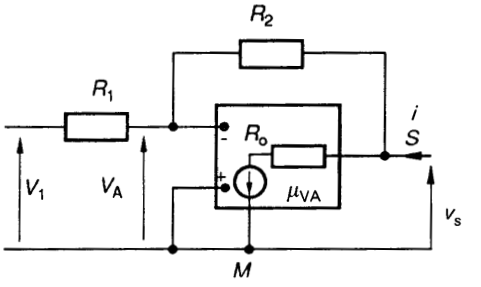


Fig. 18.

Le calcul de la résistance de sortie conduit au schéma de la figure 19 :

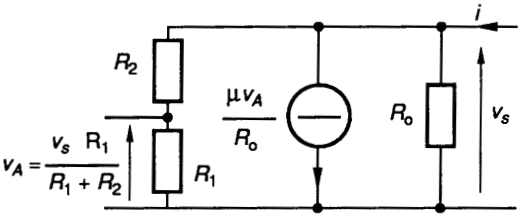


Fig. 19.

Le générateur de courant $\frac{\mu v_A}{R_0}$ impose un courant proportionnel à la tension à ses bornes $\left(v_A \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1}\right)$. Il est donc équivalent à la résistance $\frac{R_0}{\mu} \times \frac{R_1 + R_2}{R_1}$.

La résistance de sortie résulte donc de la mise en parallèle des trois résistances $R_1 + R_2$, $\frac{R_0}{\mu} \times \frac{R_1 + R_2}{R_1}$ et R_0.

μ étant très grand par rapport à 1, les résistances R_0 et $R_1 + R_2$ sont grandes devant le résistance $\frac{R_0}{\mu} \times \frac{R_1 + R_2}{R_1}$ et leur influence est négligeable.

Pour $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 10\ \text{k}\Omega$, $R_0 = 100\ \Omega$, $\mu = 10^4$, la résistance de sortie du dispositif de la figure 18 s'établit à :

$$\frac{R_0}{\mu} \times \frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{100}{10^4} \times 11 = 0{,}11\ \Omega.$$

Dans la plupart des dispositifs, la résistance de sortie sera ainsi très faible et pourra être négligée.

5. ERREURS DITES « STATIQUES »

5.1. TENSION RÉSIDUELLE D'ENTRÉE

La différence de potentiel en sortie de l'amplificateur opérationnel n'est pas nulle lorsque l'on connecte les deux entrées à la référence de potentiel.

Le constructeur indique comment réaliser à l'aide d'un potentiomètre extérieur un montage permettant de se rapprocher d'une tension de sortie nulle.

Pour des facilités de calcul, ce défaut est ramené sur l'entrée : on appelle *tension résiduelle d'entrée* (notée V_{D_1}) en anglais *offset*, la différence de potentiel que doit fournir une source de tension placée entre les deux entrées et qui permet d'avoir une différence de potentiel en sortie nulle (*fig.* 20).

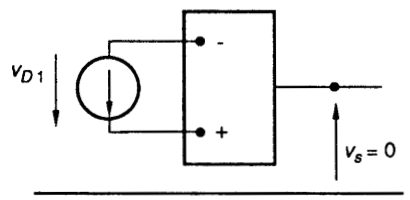


Fig. 20

La tension résiduelle (en appliquant le principe de superposition) peut être figurée comme un générateur de tension d'erreur en série avec l'une des deux entrées de l'amplificateur opérationnel.

REMARQUE

L'inconvénient du générateur de tension d'offset V_{D_1} résulte moins de sa valeur propre que des variations qu'il présente en fonction de la température ou lorsqu'on passe d'un échantillon à l'autre dans un même lot de composants.

- *Le constructeur ne peut préciser ni le signe, ni la valeur de V_{D_1} (sinon il aurait corrigé son composant en conséquence).*

Il indique la valeur maximale du module V_{D_1} ($|V_{D_1}|_{max}$).

- *On appelle dérive thermique le rapport de la variation de tension résiduelle d'entrée à la variation de température $\Delta\theta$ qui lui donne naissance :*

$$\mathfrak{D}_{v_{D1}} = \frac{\Delta v_{D1}}{\Delta\theta}$$

Elle est due à la variation relative des tensions v_{BE} en fonction de θ des transistors de l'étage différentiel d'entrée.

Cette dérive en température conditionne pour une bonne partie la stabilité de la tension de sortie en fonction de la température de fonctionnement.

Ainsi, le réglage exact du potentiomètre d'offset n'est valable que pour un composant et une température donnée.

5.2. COURANT DE POLARISATION D'ENTRÉE, COURANT RÉSIDUEL D'ENTRÉE

L'hypothèse des courants d'entrée nuls est une approximation pour les amplificateurs opérationnels réels.

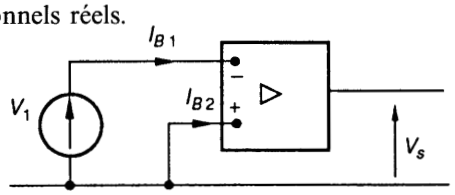


Fig. 21

Nous avons placé un générateur de tension entre une entrée et la masse (*fig.* 21), l'autre entrée étant à la masse, telle que la différence de potentiel à la sortie soit nulle; nous constatons que les deux entrées sont parcourues par des courants I_{B1} et I_{B2}.

Nous appellerons :

— *courant de polarisation*, le courant

$$I_B = \frac{I_{B1} + I_{B2}}{2};$$

— *courant résiduel d'entrée* (en anglais courant d'*offset*), le courant $I_{D1} = I_{B1} - I_{B2}$.

Nous pouvons les représenter schématiquement par deux générateurs de courant I_{B1} et I_{B2} sur les deux entrées de l'amplificateur opérationnel.

REMARQUE

Les courants de polarisation I_B et d'offset I_{D_1} sont susceptibles de variations :

a) en fonction de la température : Soient ΔI_B et ΔI_{D_1} les variations de I_B et I_{D_1} résultant d'une variation de température $\Delta\theta$. On définit :

- *dérive thermique du courant de polarisation I_B par :* $D_{I_B} = \dfrac{\Delta I_B}{\Delta\theta}$;
- *dérive thermique du courant offset I_{D_1} par :*

$$D_{I_{D_1}} = \frac{\Delta I_{D_1}}{\Delta\theta};$$

b) en fonction du composant : Nous pouvons remarquer, à ce propos, que le signe des courants I_{B_1} et I_{B_2} est identique et qu'il dépend de la nature (NPN ou PNP) des transistors de l'étage différentiel d'entrée. Il est donc possible de connaître le signe de I_B alors que le signe I_{D_1} peut varier d'un composant à l'autre.

Le constructeur indique les valeurs maximales du module de I_B et de I_{D_1}.

Conséquences pour quelques montages

a) Amplificateurs inverseur et non inverseur

Sur le montage de la figure 22, si l'amplificateur est idéal, la tension de sortie est nulle; cependant, on observe une différence de potentiel en sortie v_s due aux erreurs statiques.

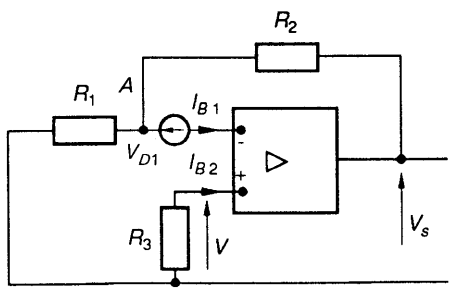


Fig. 22

L'écriture de la loi des nœuds au point A conduit à :

$$\frac{V_{D_1} - R_3 I_{B_2}}{R_1} + \frac{V_{D_1} - R_3 I_{B_2} - v_s}{R_2} + I_{B_1} = 0,$$

soit :

$$\frac{v_s}{R_2} = V_{D_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - R_3 I_{B_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + I_{B_1}.$$

Il est tentant de dire qu'il suffit d'ajuster le potentiomètre d'offset de façon à donner à V_{D_1} une valeur telle que la tension v_s soit nulle. Mais un tel réglage ne peut être qu'illusoire compte tenu des variations de V_{D_1}, I_{B_1} et I_{B_2} avec la température et compte tenu de leur dispersion dans un même lot de composants. Afin d'optimiser le dispositif, il apparaît intéressant de calculer v_s en fonction de I_B et de I_{D_1}. Nous avons :

$$\begin{cases} I_B = \dfrac{I_{B_1} + I_{B_2}}{2}, \\ I_{D_1} = I_{B_1} - I_{B_2}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} I_{B_1} = I_B + \dfrac{I_{D_1}}{2}, \\ I_{B_2} = I_B - \dfrac{I_{D_1}}{2}. \end{cases}$$

Si nous reportons dans v_s nous aurons :

$$\frac{v_s}{R_2} = V_{D_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - R_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left(I_B - \frac{I_{D_1}}{2}\right) + I_B + \frac{I_{D_1}}{2},$$

soit

$$\frac{v_s}{R_2} = V_{D_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + I_B\left[1 - R_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right] + \frac{I_{D_1}}{2}\left[1 + R_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right].$$

Il est alors possible de déterminer la valeur de $|v_s|$ en fonction des données du constructeur, $|V_{D_1}|_{max}$, $|I_B|_{max}$, $|I_{D_1}|_{max}$, en écrivant :

$$\left|\frac{v_s}{R_2}\right| \leqslant \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)|V_{D_1}|_{max} + \left|1 - R_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right||I_B|_{max} + \frac{1}{2}\left[1 + R_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]|I_{D_1}|_{max}.$$

Nous pouvons, dès lors, remarquer que le courant de polarisation n'intervient pas dans la formule précédente, si l'égalité

$$1 - R_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 0$$

est réalisée, soit :

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

En conséquence, pour minimiser l'influence du courant de polarisation, on placera dans le montage inverseur entre l'entrée plus et la masse une résistance égale à la résistance vue par l'entrée moins.

b) Montage intégrateur

Si les grandeurs électriques V_{D_1}, I_{B_1}, I_{B_2}, ne constituent qu'un phénomène gênant pour les amplificateurs inverseur et non inverseur, elles rendent, par contre, inutilisable le montage intégrateur tel qu'il a été défini sur la figure 7. Considérons, en effet, le montage de la figure 23.

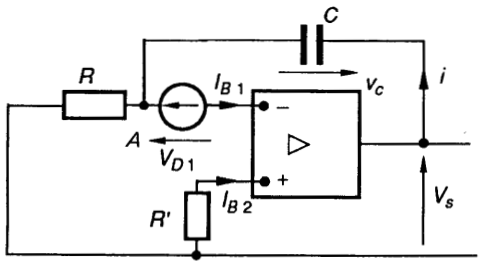


Fig. 23.

L'écriture de la loi des nœuds au point A conduit à :

$$i = \frac{V_{D_1} - R'I_{B_2}}{R} + I_{B_1}.$$

Il apparaît donc dans le condensateur C un courant non nul et mal défini dans la mesure où V_{D_1}, I_{B_2} et I_{B_1} sont susceptibles de variations en fonction de la température et de la dispersion des composants.

Compte tenu de la relation $i = C\dfrac{dv_c}{dt}$, la tension v_c évolue uniformément, entraînant la tension de sortie v_s vers la saturation de l'amplificateur opérationnel ($v_s = +E$, ou $-E$).

On peut, bien sûr, minimiser le courant i en réglant V_{D_1} par le potentiomètre d'offset, mais il n'est pas possible de l'annuler totalement et de toutes façons la moindre variation de température détruirait ce fragile équilibre.

Le courant i dans le condensateur peut être exprimé en fonction de I_B et I_{D_1} :

$$i = \frac{V_{D_1}}{R} - \frac{R'}{R}\left(I_B - \frac{I_{D_1}}{2}\right) + I_B + \frac{I_{D_1}}{2},$$

$$= \frac{V_{D_1}}{R} + I_B\left(1 - \frac{R'}{R}\right) + \frac{I_{D_1}}{2}\left(1 + \frac{R'}{R}\right),$$

soit :

$$|i| \leqslant \frac{1}{R}|V_{D_1}|_{max} + \left|1 - \frac{R'}{R}\right||I_B|_{max} + \frac{R + R'}{2R}|I_{D_1}|_{max}.$$

Dans ce cas aussi, le courant de polarisation I_B est sans effet si les deux entrées voient la même résistance ($R = R'$).

Afin de rendre le montage intégrateur utilisable, on monte, en parallèle sur le condensateur C, une résistance R_0 (*fig.* 24).

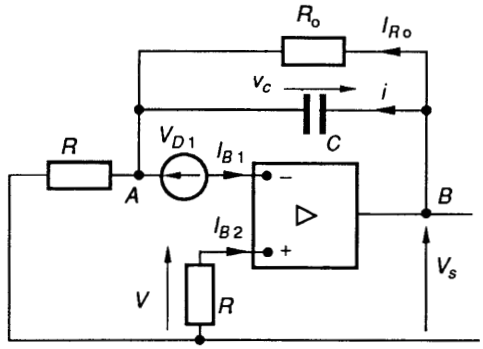


Fig. 24.

Si l'on suppose que V_{D_1}, I_{B_1} et I_{B_2} sont constants, la somme $i + i_{R0}$ est constante ainsi que le potentiel du point A.

Supposons que le courant i soit positif, la tension v_c augmente $\left(i = C\dfrac{dv_c}{dt}\right)$ entraînant l'accroissement de la tension de sortie v_s. Le courant i_{R0} croît et, comme $i + i_{R0} = \text{Cte}$, le courant i diminue jusqu'à son annulation complète.

La tension de sortie v_s se fixe donc à une valeur telle que $i = 0$. Sur le montage intégrateur parfait la tension v_s serait nulle. Calculons sa valeur sur le montage intégrateur réel :

$$V = -RI_{B_2},$$

en A :

$$\frac{v_s - V - V_{D_1}}{R_0} = \frac{V + V_{D_1}}{R} + I_{B_1},$$

donc :

$$v_s = \frac{R + R_0}{R}V_{D_1} + R_0I_{B_1} - I_{B_2}(R + R_0),$$

$$v_s = \frac{R + R_0}{R}V_{D_1} + R_0I_{D_1} - RI_{B_2}$$

$$v_s = \frac{R + R_0}{R}V_{D_1} + R_0I_{D_1} - R\left(I_B - \frac{I_{D_1}}{2}\right),$$

$$v_s = \frac{R + R_0}{R}V_{D_1} + \left(R_0 + \frac{R}{2}\right)I_{D_1} - RI_B.$$

On constate que v_s est stable, mais n'est pas nulle, pour la rendre la plus faible possible, il faut donc choisir R_0 la plus petite possible; cependant, on

ne peut pas diminuer R_0 autant que l'on voudrait, car on perdrait alors la propriété intégratrice du dispositif.

Déterminons, par exemple le comportement de l'intégrateur réel en régime sinusoïdal permanent (*fig.* 25) :

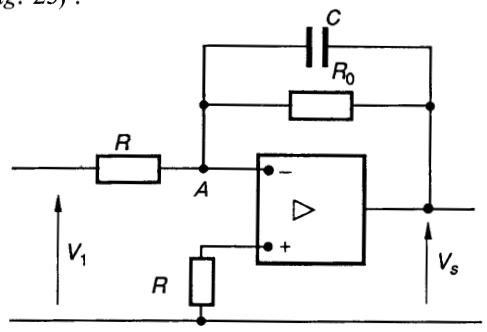


Fig. 25.

La loi des nœuds au point A conduit à :

$$\frac{\underline{V_1}}{R} = -\mathrm{j}c\omega\underline{V_S} - \frac{\underline{V_S}}{R_0},$$

Soit : $$\underline{T} = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_1}} = -\frac{R_0}{R} \times \frac{1}{1+\mathrm{j}R_0C\omega}.$$

Alors que, pour l'intégrateur parfait ($R_0 \to \infty$), on obtient :

$$\underline{T_0} = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_1}} = -\frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}.$$

Afin de comparer les intégrateurs réel et parfait, traçons les variations de $\underline{T}$ et de T_0 dans les diagrammes de Bode (*fig.* 26).

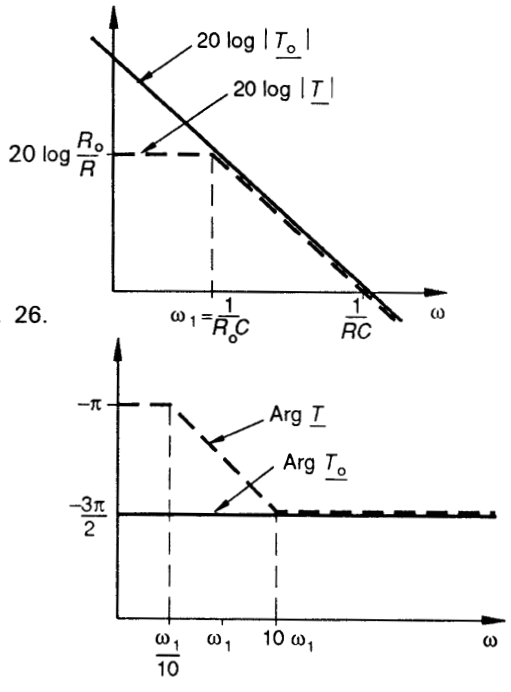


Fig. 26.

On constate que les fonctions de transfert $\underline{T}$ et $\underline{T_0}$ ne sont confondues que pour $\omega > 10\ \omega_1 = \frac{10}{R_0C}$.

On ne pourra donc pas choisir une valeur trop faible pour la résistance R_0.

5.3. FACTEUR DE RÉJECTION DU MODE COMMUN

Nous avons vu, qu'en toute rigueur, la tension de sortie d'un amplificateur de différence (*fig* 27), dépend non seulement de la différence des tensions d'entrée $v_1 - v_2$, mais aussi du mode commun $\frac{v_1+v_2}{2}$, soit $v_s = \mu(v_1 - v_2) + g\frac{v_1+v_2}{2}$.

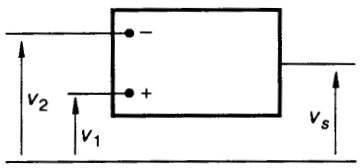


Fig. 27.

μ est l'amplification de différence, g est l'amplification de mode commun. On définit le facteur de réjection du mode commun par $K_{RMC} = \frac{\mu}{g}$.

Pour un amplificateur opérationnel, la différence $V_{D_1} = v_1 - v_2$ est faible par rapport à v_1, ce qui permet d'écrire avec une bonne approximation :

$$v_s = \mu V_{D_1} + g v_1.$$

Nous pouvons en conclure :

– Pour les montages dans lesquels l'entrée non inverseuse est reliée à la masse, ($v_1 = 0$ et $v_s = -\left(\mu - \frac{g}{2}\right) v_2 \approx -\mu v_2$), le facteur de réjection du mode commun est sans influence.

– Pour les autres montages, nous pouvons conclure à partir de

$$v_s = \mu V_{D_1} + g v_1 = \mu\left[V_{D_1} + \frac{g}{\mu} v_1\right]$$

$$= \mu\left[V_{D_1} + \frac{v_1}{K_{RMC}}\right],$$

que l'influence du taux de réjection du mode commun se ramène à celle d'un générateur de tension d'erreur (analogue à V_{D_1}) : $\frac{v_1}{K_{RMC}}$ place en série sur l'entrée non inverseuse.
Il est difficile de spécifier avec précision la valeur du facteur de réjection du mode commun car il dépend fortement de la température et de la tension de mode commun.

5.4. FACTEUR DE RÉJECTION DES TENSIONS D'ALIMENTATION

Une variation des tensions d'alimentation $+E$ et $-E$ provoque une variation de la tension de sortie v_S. Pour faciliter la définition, ce défaut est ramené sur la tension d'offset V_{D_1} (*fig.* 28).

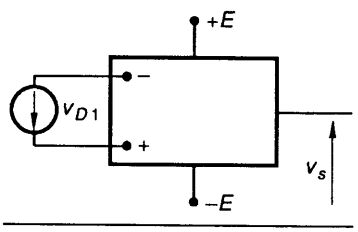


Fig. 28.

On appelle facteur de réjection des tensions d'alimentation, le rapport :

$$K_{RE} = \left(\frac{\Delta E}{\Delta V_{D_1}}\right)_{v_s = Cte}.$$

Pour une variation ΔE des tensions d'alimentation, ΔV_{D_1} est la variation qu'il faut imposer au générateur de tension d'offset pour maintenir la tension de sortie constante.
Compte tenu du bruit tolérable sur la tension de sortie, le facteur de réjection des tensions d'alimentation permet de déterminer la qualité du découplage des tensions d'alimentation $+E$ et $-E$.

6. ERREURS DITES « DYNAMIQUES »

En régime dynamique linéaire, l'amplificateur opérationnel est équivalent au schéma de la figure 29.

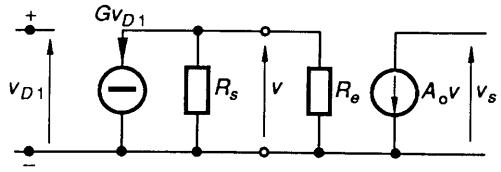


Fig. 29.

On y distingue :

— Un premier étage, fonctionnant en amplificateur de transconductance, et constitué
- d'un générateur de courant GV_{D_1},
- d'une résistance de sortie R_s.

— Un deuxième étage fonctionnant en amplificateur de tension, de résistance d'entrée R_e et de gain A_0.
En pratique plusieurs éléments parasites interviennent sur ce montage.

— Une capacité parasite C_0 apparaît entre l'entrée et la sortie du second étage.

— En régime sinusoïdal permanent, la transconductance G est complexe et s'écrit :

$$\underline{G} = \frac{G_0}{1 + j\frac{f}{f_2}}$$

où f_2 est de l'ordre de quelques mégahertz.
En régime harmonique, et en posant $R_0 = \frac{R_s R_e}{R_s + R_e}$, l'amplificateur opérationnel peut être décrit par le schéma de la figure 30.

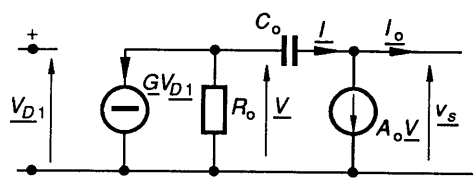


Fig. 30.

Le courant $\underline{I}$ dans le condensateur s'écrit :

$$\underline{I} = (1 + A_0)\underline{V}jC_0\omega,$$

il est identique à celui qui serait appelé par la capacité $C = C_0(1 + A_0)$ placée en parallèle sur la tension $\underline{V}$.
De plus, ce courant $\underline{I}$, appelé par une capacité parasite, est négligeable par rapport au courant de sortie $\underline{I}_0$, ce qui conduit au schéma équivalent de la figure 31.

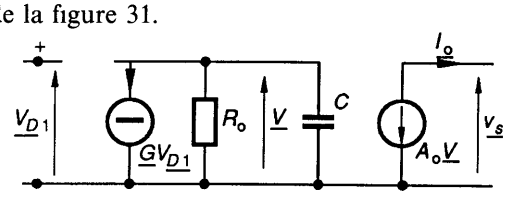


Fig. 31.

Il vient ainsi :

$$\underline{V_S} = -A_0\underline{V} = \frac{A_0 R_0 \underline{G}}{1 + jR_0 C\omega}\,\underline{V_{D_1}}$$

$$= \frac{A_0 R_0 G_0}{\left(1 + j\frac{f}{f_1}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_2}\right)}\,\underline{V_{D_1}},$$

avec : $f_1 = \dfrac{1}{2\pi R_0 C} = \dfrac{1}{2\pi R_0 C_0(1 + A_0)}$.

Le diagramme asymptotique de

$$20 \lg \left|\frac{V_S}{V_{D_1}}\right| = f(f)$$

est donné sur la figure 32, avec $\mu_0 = A_0 R_0 G_0$.

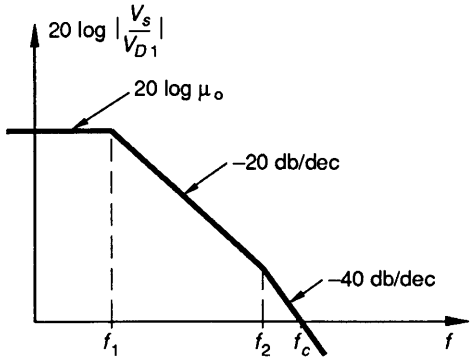


Fig. 32.

La fonction de transfert :

$$\underline{\mu} = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_{D_1}}} = \frac{\mu_0}{\left(1 + j\frac{f}{f_1}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_2}\right)}$$

peut aussi être écrite sous la forme :

$$\underline{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + jf\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) + (jf)^2 \frac{1}{f_1 f_2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{1 + 2jm\,\frac{f}{f_0} + \left(j\frac{f}{f_0}\right)^2},$$

avec $f_0^2 = f_1 f_2$

et $m = \dfrac{f_0}{2}\left(\dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{f_1 f_2}}(f_1 + f_2)$.

Remarquons que la fréquence f_c pour laquelle $|\mu| = 1$, ($20 \lg |\mu| = 0$) est telle que

$$\mu_0^2 = \left[1 + \left(\frac{f_c}{f_1}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{f_c}{f_2}\right)^2\right].$$

Ordres de grandeur

On peut donner pour les fréquences f_1 et f_2 les ordres de grandeur suivants :

$$f_1 \approx 200 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad f_2 \approx 3 \text{ MHz}.$$

De plus, le gain μ_0 en continu est très élevé (de l'ordre de 10^6). Compte tenu de $f_2 \gg f_1$ et $\mu_0 \gg 1$, il vient :

$$m = \frac{1}{2\sqrt{f_1 f_2}}(f_1 + f_2) \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{f_2}{f_1}}$$

et

$$\mu_0^2 \approx \frac{f_c^4}{f_1^2 f_2^2},$$

soit $f_c \approx \sqrt{\mu_0 f_1 f_2}$.

6.1. AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL EN BOUCLE FERMÉE

Soit le dispositif de la figure 33. En supposant que la résistance d'entrée de l'amplificateur opérationnel est infinie, nous avons établi (paragraphe 4.1) qu'un gain $\underline{\mu}$ non infini conduit à l'expression de la tension de sortie :

$$\underline{V_S} = \frac{\underline{\mu}}{1 + \beta\underline{\mu}}\,[\underline{V_2} - \underline{V_1}(1 - \beta)], \text{ avec } \beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

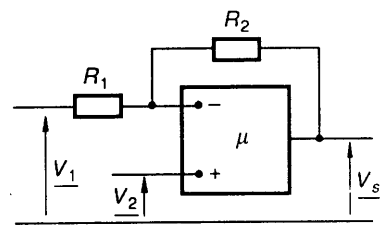


Fig. 33.

Soit $\underline{V_{SO}}$ la valeur que prendrait la tension de sortie si l'amplification était infinie,

$$\underline{V_{SO}} = \frac{1}{\beta}\,[\underline{V_2} - \underline{V_1}(1 - \beta)].$$

L'expression de la tension de sortie $\underline{V_S}$ devient :

$$\underline{V_S} = \frac{1}{\beta}\,[\underline{V_2} - \underline{V_1}(1 - \beta)]\,\frac{\underline{\mu}\beta}{1 + \underline{\mu}\beta} = \underline{V_{SO}}\,\frac{\underline{\mu}\beta}{1 + \underline{\mu}\beta}$$

soit, compte tenu de $\underline{\mu} = \dfrac{\mu_0}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{f}{f_0} + \left(\mathrm{j}\dfrac{f}{f_0}\right)^2}$

$$\underline{V_s} = \underline{V_{so}} \frac{\mu_0\beta}{1 + \mu_0\beta + 2\mathrm{j}m\dfrac{f}{f_0} + \left(\mathrm{j}\dfrac{f}{f_0}\right)^2}$$

$$\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_{so}}} = \frac{\mu_0\beta}{1 + \mu_0\beta} \frac{1}{1 + 2\mathrm{j}\dfrac{m}{1 + \mu_0\beta}\dfrac{f}{f_0} + \left(\mathrm{j}\dfrac{f}{f_0\sqrt{1 + \mu_0\beta}}\right)^2}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_{so}}} = \mu'_0 \frac{1}{1 + 2\mathrm{j}m'\dfrac{f}{f'_0} + \left(\mathrm{j}\dfrac{f}{f'_0}\right)^2}$$

avec
$$\begin{cases} \mu'_0 = \dfrac{\mu_0\beta}{1 + \mu_0\beta} \\ f'_0 = f_0\sqrt{1 + \mu_0\beta} \\ m' = \dfrac{f'_0}{f_0} m \dfrac{1}{1 + \mu_0\beta} \\ \quad = \dfrac{m}{\sqrt{1 + \mu_0\beta}}. \end{cases}$$

Ordres de grandeur

Compte tenu de $\mu_0 \approx 10^6$, et sachant que β est rarement inférieur à 10^{-4}, il vient $\mu_0\beta \gg 1$, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \mu'_0 = \dfrac{\mu_0\beta}{1 + \mu_0\beta} \approx 1; \\ f'_0 = f_0\sqrt{1 + \mu_0\beta} \approx f_0\sqrt{\mu_0\beta} \approx \sqrt{\beta}\, f_c \\ m' = \dfrac{m}{\sqrt{1 + \mu_0\beta}} \approx \dfrac{m}{\sqrt{\mu_0\beta}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\beta}}\sqrt{\dfrac{f_2}{f_1}}. \end{cases}$$

Conséquences

a) En basses fréquences $\dfrac{\underline{V_s}}{\underline{V_{so}}} \approx \mu'_0 \approx 1$, la tension de sortie n'est pas altérée.

b) $m' = \dfrac{m}{\sqrt{\mu_0\beta}}$. Sachant que $\mu_0\beta$ est grand par rapport à 1, nous déduisons que m' est très inférieur à m, ce qui peut présenter des conséquences fâcheuses :

– En régime harmonique la fonction de transfert $20 \lg \left|\dfrac{\underline{V_s}}{\underline{V_{so}}}\right|$ présente une remontée de $-20 \lg (2m'\sqrt{1 - m'^2})$ (*fig.* 34), d'autant plus importante que le coefficient d'amortissement m' est plus faible.

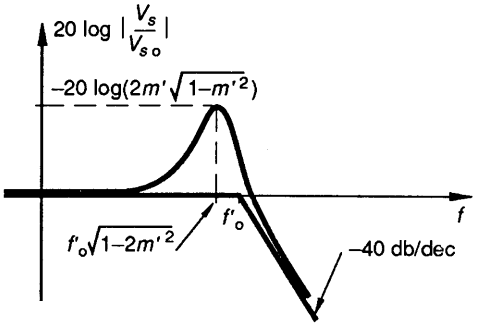


Fig. 34.

– L'équation entre les nombres complexes :

$$\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_{so}}} = \frac{\mu'_0}{1 + 2\mathrm{j}m'\dfrac{\omega}{\omega'_0} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega'_0}\right)^2},$$

provient de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_s}{\mathrm{d}t^2} + 2m'\omega'_0\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + \omega'^2_0 v_s = \omega'^2_0 \mu'_0 v_{so}.$$

Pour la réponse indicielle, la tension v_{so} est un échelon de tension.

Dans le cas où m' est inférieur à 1, la réponse est de la forme :

$$v_s = A\, \mathrm{e}^{-m'\omega'_0 t} \cos\left[\omega'_0\sqrt{1 - m'^2}\,t + \varphi\right],$$

dont la représentation est donnée à la figure 35.

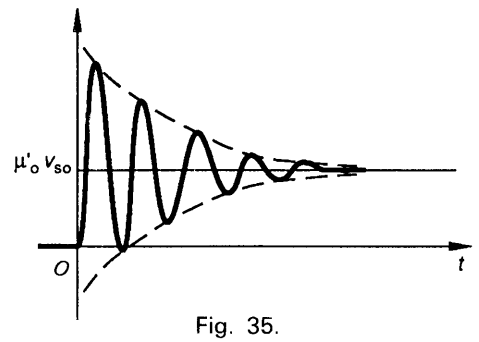


Fig. 35.

Il apparaît des oscillations qui sont d'autant plus faiblement amorties que le facteur d'amortissement m' est plus faible.

Globalement, l'utilisation de l'amplificateur opérationnel en boucle fermée conduit à un coefficient d'amortissement très faible $\left(m' = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\beta}}\sqrt{\dfrac{f_2}{f_1}}\right)$ qui provoque l'apparition d'oscillations, de fréquence voisine de f'_0, pour la réponse indicielle

et qui se traduit sur la réponse harmonique par une amplification préférentielle des fréquences voisines de f'_0. Ces phénomènes sont gênants et peuvent conduire, compte tenu de couplages parasites supplémentaires, jusqu'à l'oscillation du système.
Il convient donc de limiter le phénomène à l'aide de réseaux auxiliaires de compensation.

6.2. RÉSEAUX DE COMPENSATION

6.2.1. Compensation par retard de phase

Proposons-nous, à partir de l'expression du facteur d'amortissement :

$$m' = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \beta}} \sqrt{\frac{f_2}{f_1}}$$

de prévoir une modification du dispositif susceptible de ramener la valeur de m' au voisinage de l'unité.

- $\beta = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$, dépend du gain souhaité en boucle fermée et ne peut donc être modifié.
- f_2 : fréquence de coupure du premier étage est technologiquement limitée.
- μ_0 : gain en tension en continu, ne peut être réduit sans augmenter les erreurs de calcul.

Le seul paramètre susceptible de provoquer un accroissement de m' est une diminution de la fréquence f_1.

a) Capacité de compensation

Rappelons que la fréquence de coupure f_1 dépend essentiellement de la capacité parasite C_0 par $f_1 = \dfrac{1}{2\pi R_0 C_0 (1 + A_0)}$. Une augmentation de C_0 provoque une diminution de f_1 et, par suite, une augmentation de m'.
Cette capacité peut être extérieure au boîtier ou peut être directement intégrée dans l'amplificateur opérationnel.

Exemple de calcul
Considérons un montage inverseur pour lequel la courbe de réponse en fréquence présente une remontée de 6 db, lorsque la capacité C_0 est égale à 5 pF. Proposons-nous de déterminer la valeur C'_0 de la capacité qui permet d'annuler cette remontée, en faisant passer le coefficient d'amortissement à $m'_2 = 0{,}7$. Sachant que la remontée de la courbe de réponse en fréquence dépend de m' par $-20 \lg 2m' \sqrt{1 - m'^2}$, il vient :

$$\lg 2m'_1 \sqrt{1 - m'^2_1} = -\frac{6}{20} = -0{,}3,$$

soit $2m'_1 \sqrt{1 - m'^2_1} = \dfrac{1}{2}$ et $m'^2_1 (1 - m'^2_1) = \dfrac{1}{16}$, où $m'^4_1 - m'^2_1 + \dfrac{1}{16} = 0$, ce qui conduit à :

$$m'_1 = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{2}} = 0{,}26.$$

Sachant que m' dépend de la fréquence f_1 sous la forme $m' = \dfrac{k}{\sqrt{f_1}}$ et compte tenu de $f_1 = \dfrac{1}{2\pi R_0 C_0 (1 + A_0)}$, nous déduisons que le facteur d'amortissement m' varie comme la racine carrée de la capacité parasite C_0.

Par conséquent, pour faire passer le facteur d'amortissement de $m'_1 = 0{,}26$ à $m'_2 = 0{,}7$, il faut le multiplier par $\dfrac{0{,}7}{0{,}26}$, ce qui correspond à une multiplication de la capacité parasite C_0 par $\left(\dfrac{0{,}7}{0{,}26}\right)^2$. La valeur C'_0 de la capacité qui permet d'annuler la remontée de la courbe de réponse en fréquence est donc :

$$C_0 \times \left(\frac{0{,}7}{0{,}26}\right)^2 = 5\left(\frac{0{,}7}{0{,}26}\right)^2 = 36 \text{ pF}.$$

Les amplificateurs opérationnels qui possèdent une capacité de compensation intégrée dans le boîtier présentent une courbe de gain qui a l'allure décrite à la figure 36.

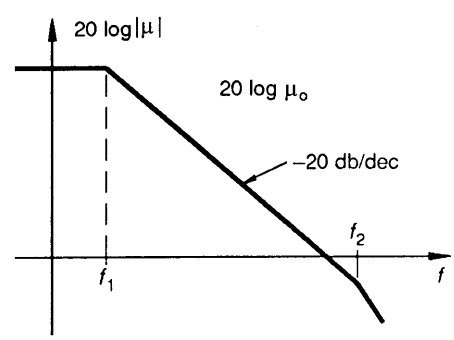


Fig. 36.

La fréquence *de coupure* f_1, *de l'ordre d'une dizaine de hertz,* est très faible par rapport à la fréquence f_2 si bien que la fonction de transfert en tension peut être assimilée à $\underline{\mu} = \dfrac{\mu_0}{1 + \mathrm{j}\dfrac{f}{f_1}}$.

En conséquence, l'amplificateur non inverseur dont la fonction de transfert est :

$$\frac{\underline{\mu}}{1 + \underline{\mu}\beta} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0\beta + \mathrm{j}\dfrac{f}{f_1}} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0\beta} \times \frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{f}{f_1(1 + \mu_0\beta)}}$$

Présente les propriétés suivantes (*fig.* 37) :

- gain en continu : $\dfrac{\mu_0}{1 + \mu_0\beta} \approx \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1}$;
- fréquence de coupure $f_1(1 + \mu_0\beta)$;
- la remontée de la courbe de réponse en fréquence est nulle.

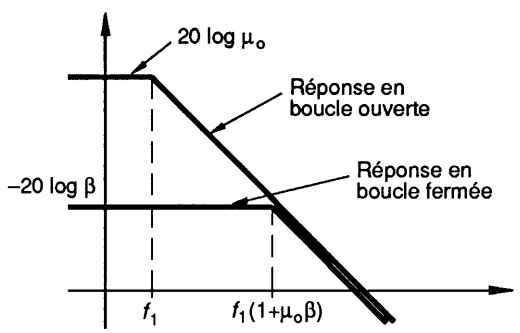


Fig. 37.

b) Le Slew-rate

Rappelons que l'amplificateur opérationnel peut être décrit par le schéma de la figure 38 dans lequel, la stabilité du système impose une valeur conséquente de la capacité C. Cette capacité freine la vitesse de variation de la tension à ses bornes, limitant ainsi la vitesse de montée de la tension de sortie v_s. L'évolution de la tension v aux bornes de capacité C est d'autant plus rapide que le courant qui la traverse est plus élevé, mais ce dernier est limité à $I_{0\,sat}$ par la saturation du premier étage.

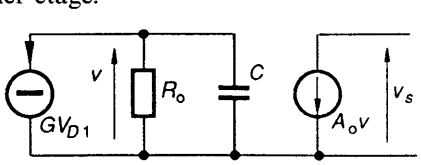


Fig. 38.

Dans les conditions les plus favorables, nous obtenons le schéma partiel équivalent de la figure 39. Vis-à-vis des variations rapides, la tension v reste faible, le courant dans la résistance R_0 est négligeable et avec une bonne approximation, nous pouvons écrire :

$$I_{0\,sat} = -C\frac{dv}{dt}, \quad \text{soit} \quad v = \frac{-I_{0\,sat}}{C}t + K,$$

et

$$v_s = \frac{A_0 I_{0\,sat}}{C}t + K_0.$$

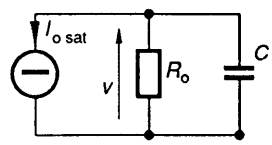


Fig. 39.

La vitesse de montée de la tension de sortie est ainsi limitée à une valeur $\dfrac{A_0 I_{0\,sat}}{C}$ d'autant plus faible que la capacité de compensation C est plus élevée.

On appelle Slew rate S, cette vitesse maximale de montée (elle est de l'ordre d'une dizaine de volts par microseconde).

Conséquence

Pour une tension d'entrée sinusoïdale de fréquence élevée, les variations de la tension de sortie sont décrites par des segments de droite dont la pente est limitée par le *slew rate S* (*fig.* 40).

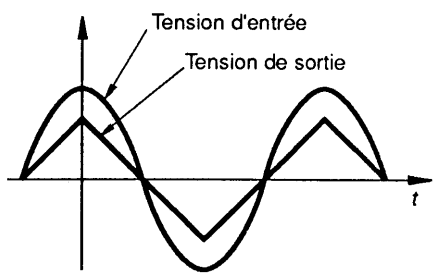


Fig. 40.

Pour une tension de sortie de la forme $v_s = V_S \sin \omega t$, le phénomène impose la limitation suivante :

$$\frac{dv_s}{dt} = V_S\omega \cos \omega t < S \quad \text{quel que soit } t,$$

soit $V_S\omega < S$. Le *slew rate* limite la fréquence à une valeur d'autant plus faible que la tension de sortie est plus élevée.

c) Compensation par réseau d'entrée

Sur le schéma de la figure 41, le réseau de compensation constitué par les éléments R, R_1, C_1 permet de modifier la fonction de transfert en tension, en la faisant passer de $\underline{\mu} = \dfrac{\underline{V_S}}{\underline{V_{D_1}}}$ à $\underline{\mu_c} = \dfrac{\underline{V_S}}{\underline{V_1}}$.

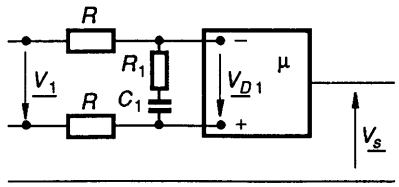


Fig. 41.

Soit

$$\underline{\mu_c} = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_1}} = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_{D_1}}} \cdot \frac{\underline{V_{D_1}}}{\underline{V_1}} = \underline{\mu} \frac{R_1 + \dfrac{1}{jC_1\omega}}{2R + R_1 + \dfrac{1}{jC_1\omega}}$$

$$= \underline{\mu} \frac{1 + jR_1C_1\omega}{1 + (2R + R_1)jC_1\omega}.$$

Sachant que $\underline{\mu}$ s'écrit $\dfrac{\mu_0}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)}$,

il vient

$$\underline{\mu_c} = \frac{\mu_0\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2'}\right)}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1'}\right)},$$

avec $\omega_1' = \dfrac{1}{(2R + R_1)C_1}$ et $\omega_2' = \dfrac{1}{R_1C_1}$.

Si les éléments R_1 et C_1 sont choisis de telle sorte que $\omega_2' = \omega_1 = \dfrac{1}{R_1C_1}$, la fonction de transfert corrigée devient :

$$\underline{\mu_c} = \frac{\mu_0}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1'}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)}.$$

Au total, tout se passe comme si la pulsation ω_1 était remplacée par ω_1' très inférieure à ω_1 dans la mesure où les résistances $2R$ sont très grandes par rapport à R_1.

L'effet produit est ainsi identique à celui provoqué par l'accroissement de la capacité parasite C_0.

6.2.2. Compensation par avance de phase

Cette compensation est réalisée en plaçant une capacité C_r entre l'entrée – et la sortie du premier étage ce qui conduit au schéma équivalent de la figure 42 :

$$\underline{V} = \frac{R_0}{1 + jR_0C\omega}\left[-\underline{G}\underline{V_{D_1}} - jC_r\omega(\underline{V_{DI}} + \underline{V})\right],$$

$$\underline{V}\left[1 + \frac{jC_rR_0\omega}{1 + jR_0C\omega}\right] = -\underline{V_{D_1}}\left[\frac{GR_0}{1 + jR_0C\omega} + \frac{jC_rR_0\omega}{1 + jR_0C\omega}\right],$$

soit $\underline{V_S} = \underline{V_{D_1}}\left[\dfrac{\underline{G}R_0 + jR_0C_r\omega}{1 + jR_0(C + C_r)\omega}\right]A_0$,

où compte tenu de $\underline{G} = \dfrac{G_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}$,

$$\underline{V_S} = \underline{V_{D_1}}\left[\frac{A_0G_0R_0}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)[1 + jR_0(C + C_r)\omega]} + \frac{jR_0C_r\omega A_0}{1 + jR_0(C + C_r)\omega}\right].$$

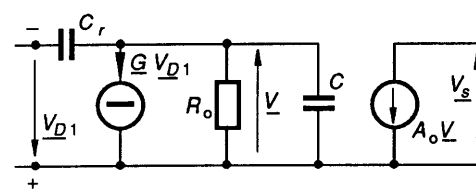


Fig. 42.

• En basses fréquences, le second terme est négligeable et l'on retrouve une fonction de transfert de la forme $\underline{\mu} = \dfrac{\mu_0}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1'}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)}$,

avec $\omega_1' = R_0(C + C_r)\omega$.

• En hautes fréquences, le second terme devient prépondérant et la fonction de transfert tend vers

$$\underline{\mu} = \frac{jR_0C_r\omega A_0}{jR_0(C + C_r)\omega} = \frac{C_rA_0}{C + C_r}.$$

En pratique, les fréquences de coupure supérieures à f_2 provoquent une décroissance du gain et la représentation de $|\underline{\mu}|$ dans les diagrammes de Bode est décrite à la figure 43.

Dans ces conditions, $\underline{\mu}$ peut être assimilé à

$$\underline{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega'_1}},$$

ce qui élimine les risques d'instabilité.

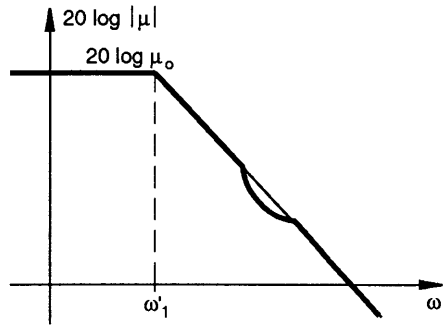
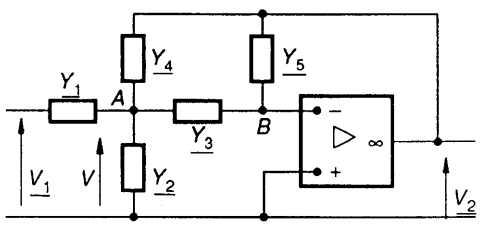


Fig. 43.

EXERCICES

1.
On associe un amplificateur opérationnel, supposé parfait, à cinq admittances comme l'indique la figure ci-dessous.



1° Par application de la loi des nœuds aux points A et B, montrer que la fonction de transfert en tension $\underline{T} = \dfrac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}$ se met sous la forme

$$\underline{T} = -\frac{\underline{Y}_1\underline{Y}_3}{\underline{Y}_3\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4)}.$$

2° Les admittances sont réalisées par des résistances ou par des condensateurs. Comment faut-il choisir les admittances $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_3$, $\underline{Y}_4$, $\underline{Y}_5$ pour réaliser, à l'aide du dispositif précédent :

a) un filtre passe-bas du second ordre de transmittance

$$\underline{T} = \frac{-1}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

b) un filtre passe-haut du second ordre de transmittance

$$\underline{T} = \frac{-\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

c) un filtre passe-bande de transmittance

$$\underline{T} = \frac{-2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

3° Est-il possible avec une telle structure de réaliser un filtre réjecteur?

2.
Le schéma de principe d'un échantillonneur-bloqueur est donné à la figure 1. L'interrupteur K obéit à une variable logique de commande.

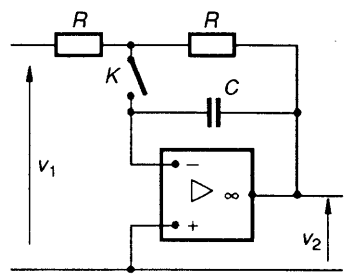


Fig. 1.

1° On suppose dans cette question que l'amplificateur opérationnel est parfait.

Acquisition : A l'instant $t = 0$, la tension v_2 étant nulle, $[v_2(0-) = 0]$, on ferme l'interrupteur K.

a) La tension v_1 est une tension constante E. Établir l'équation différentielle de v_2 et trouver la loi de variations $v_2(t)$. Calculer, en fonction de R et de C, le temps t_{ac} au bout duquel l'erreur $\varepsilon = \dfrac{v_2(t) + E}{E}$ est inférieure à 10^{-3}.

Application numérique $R = 1$ kΩ, $C = 300$ pF.

b) La tension v_1 est une tension sinusoïdale :

$$v_1(t) = E\sqrt{2}\sin(2\pi ft + \varphi_0).$$

Établir en régime sinusoïdal permanent la transmittance $\underline{T} = \dfrac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}$.

Calculer la fréquence maximale f_m qui permet d'obtenir, sur les valeurs efficaces, une erreur $\varepsilon_R = \dfrac{E - V_2}{V_2}$ inférieure à 10^{-3}.

Blocage : A l'instant $t = t_e$, on ouvre l'interrupteur K. Montrer que la tension v_2 reste constante et égale à $v_2(t_e)$.

2° On suppose dans cette question que l'amplificateur

opérationnel peut être décrit par le modèle de la figure 2. Que représentent I_D et V_D?

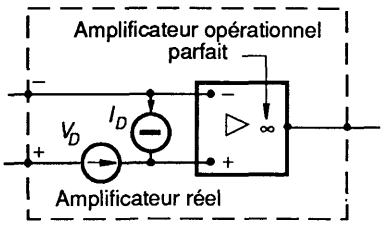


Fig. 2.

Acquisition : La tension v_1 est constante et égale à E.
A l'instant $t = 0$, la tension v_2 étant nulle ($v_2(0-) = 0$), on ferme l'interrupteur K. Établir l'équation différentielle de v_2, en fonction de E, R, C, V_D, I_D. Calculer la loi de variations $v_2(t)$.
Calculer en régime permanent l'erreur $\varepsilon_A = v_2(\infty) + E$.
Application numérique $V_D = 5\,\text{mV}$, $I_D = 10\,\text{nA}$.
Blocage : A l'instant $t = t_e$, on ouvre l'interrupteur K. Établir l'équation différentielle de v_2. Calculer la loi de variations $v_2(t)$ et montrer que le blocage est imparfait. Au bout de combien de temps la chute de v_2 est-elle égale à 5 mV?

3.
Le schéma de principe d'un convertisseur analogique numérique, double rampe, est donné à la figure 1. La tension de référence E_R est constante.

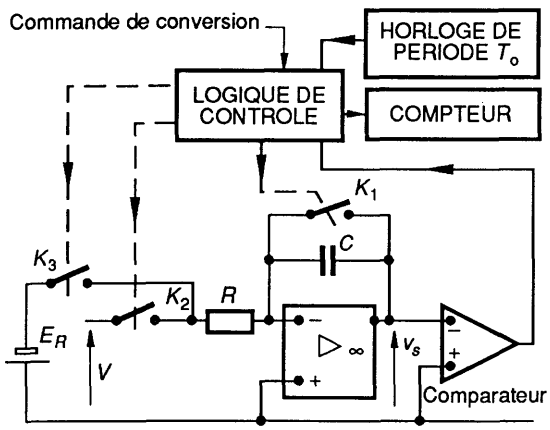


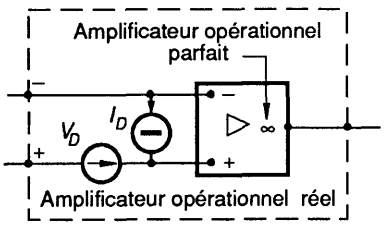
Fig. 1.

La logique de contrôle réalise les opérations suivantes :
– elle commande les interrupteurs K_1, K_2, K_3;
– elle repère le basculement du comparateur;
– elle reçoit les signaux d'une horloge de période $T_0 = 19{,}5\ \mu_s$;
– elle gère un compteur.

La tension à convertir V est constante et positive.
Initialement les interrupteurs K_2 et K_3 sont ouverts, K_1 est fermé et le compteur est initialisé avec la valeur $N_0 = 1\,024$.
A) 1° L'amplificateur opérationnel est supposé parfait
Phase 1
A la détection du signal « commande de conversion », pris comme origine des temps, la logique de contrôle ouvre l'interrupteur K_1 et ferme l'interrupteur K_2. En outre, elle transmet les signaux d'horloge au compteur pour le décrémenter.
a) Établir la loi de variations $v_s(t)$ de la tension v_s.
b) Calculer l'instant t_1 pour lequel le compteur est à zéro. Quelle est alors, en fonction de V, R, C, T_0, la valeur V_{S_1} de v_s?

Phase 2
Au passage du compteur par zéro, la logique de contrôle ouvre l'interrupteur K_2 et ferme l'interrupteur K_3, puis elle incrémente le compteur au rythme de l'horloge.
a) Établir la loi de variations $v_s(t)$ de la tension v_s pour $t > t_1$.
b) La logique de commande repère le basculement du comparateur. Elle bloque alors le compteur à sa valeur N, ferme l'interrupteur K_1 et ouvre l'interrupteur K_3. Établir la relation $N = g(V)$ et montrer que le nombre N est une image de V. La précision sur les éléments R, C, T_0 influence-t-elle la mesure?
B) L'amplificateur opérationnel est réel et peut être décrit par le modèle de la figure 2.

Fig. 2.



On pose $\alpha_1 = \dfrac{V_D}{E_R}$ et $\alpha_2 = \dfrac{RI_D}{E_R}$.

1° Quelle est la valeur de v_s à l'instant $t = 0$.
2° Établir les lois de variation $v_s(t)$ de la tension v_s pour les phases 1 et 2 définies précédemment.
3° Établir la nouvelle valeur de N en fonction de R, C, T_0, N_0, V, E_R, α_1, α_2.
4° En considérant α_1 et α_2 comme des infiniments petits, et en se limitant aux termes du premier ordre, mettre N sous la forme :

$$N = g(V) + f(V, E_R, N_0, \alpha_1, \alpha_2, T_0, R, C)$$

où $g(V)$ est la relation établie à la question relative à la phase 2, où f est une fonction représentant l'erreur commise sur N.
5° Application numérique : $R = 100\ \text{k}\Omega$, $C = 200\ \text{nF}$, $V = 10$ volts, $V_D = 5\ \text{mV}$, $I_D = 10\ \text{nA}$.
Calculer l'erreur et conclure sur le nombre de chiffres significatifs de N.

4.
Pour convertir le nombre N_1 (valeur décimale), qui s'écrira en binaire :

$$A_{11}A_{10}A_9 \ldots A_2A_1A_0$$

en une tension $V_1 = a \,.\, N_1$, on utilise un circuit intégré dont le schéma synoptique est donné figure 1. Il comporte :
– un réseau en échelle $R - 2R$, qui est alimenté par une tension constante V_0 de polarité quelconque; on donne $R = 10\ \text{k}\Omega$;
– deux sorties notées S_1 et S_2, qui devront être portées à un potentiel nul lors de l'utilisation;
– un jeu de douze commutateurs commandés par les signaux logiques $A_{11}A_{10}A_9 \ldots A_2A_1A_0$. Quand A_i est au

niveau logique 0 (on notera $A_i = 0$), la résistance $2R$ traversée par le courant I_i est connectée à la sortie S_2. Quand A_i est au niveau logique 1 (on notera $A_i = 1$), la résistance $2R$ correspondante est connectée à la sortie S_1. La figure 1 est représentée dans le cas où $A_{11} = A_{10} = A_9 = ... = A_3 = A_2 = 0$, $A_1 = 1$ et $A_0 = 0$.

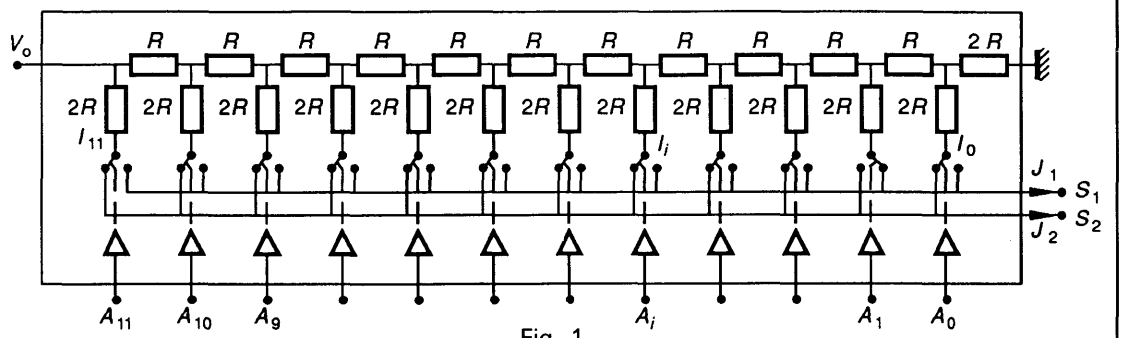


Fig. 1.

1° Les sorties S_1 et S_2 sont mises à la masse (*fig.* 2).
Calculer le courant J_1 sortant de S_1 en fonction de V_0, R, $A_{11}A_{10} ... A_1A_0$, puis en fonction de V_0, R et N_1.
Calculer le courant J_2 en fonction de V_0, R et N_1. Quelle est la valeur d'un quantum?

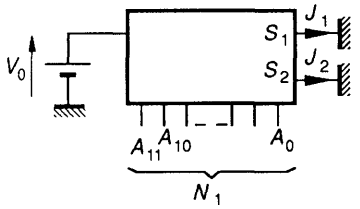


Fig. 2.

2° On réalise le montage de la figure 3 dans lequel l'amplificateur opérationnel est supposé idéal (amplification infinie, courants de polarisation et tension de décalage nuls).
Calculer V_1 en fonction de V_0 et N_1.
Quelle valeur faut-il attribuer à V_0 pour obtenir un quantum de 2 mV?

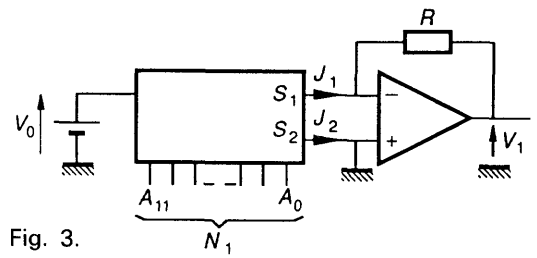
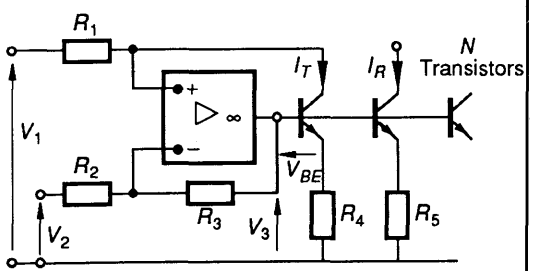


Fig. 3.

3° On va évaluer la tolérance sur les composants R et $2R$ pour que le convertisseur ait certaines performances. On admet que la tolérance x est la même pour toutes les résistances R et $2R$.
On se place dans le cas le plus défavorable en supposant que la résistance $2R$ connectée à V_0 dans le schéma figure 1 a sa valeur maximale, soit $2R(1 + x)$ et que toutes les autres résistances ont leur valeur minimale, soit $R(1 - x)$ ou $2R(1 - x)$.
On s'intéresse alors à la tension de sortie V_1 quand N_1 vaut 2047, puis 2048.
a) On désire que le convertisseur numérique analogique soit monotone. Calculer la valeur x, à attribuer à x.
b) On désire que l'erreur de non-linéarité différentielle soit inférieure à $\frac{1}{4}$ de quantum. Calculer la valeur x_2 à attribuer à x.
c) La résistance R utilisée pour boucler l'amplificateur opérationnel est en fait intégrée dans le convertisseur. Pouvez-vous justifier ce choix?
Quel type d'erreur créerait cette résistance si elle ne valait pas exactement R?

5
Le schéma de principe d'un générateur de N courants constants et égaux est donné sur la figure ci-dessous.



On négligera les courants de base des transistors; on s'intéresse dans un premier temps à la valeur du courant I_T dans le premier transistor.
On admet que l'amplificateur représenté sur le schéma a une impédance d'entrée et un gain en tension infinis.
On appele V_{BE} la tension base-émetteur du transistor.
On pose $A = \dfrac{R_2 + R_3}{R_2}$.
I_T s'exprime sous la forme :

$$I_T = F_{(V_1, V_2, A, R_1, R_4)} - \frac{V_{BE}}{AR_1 + R_4}.$$

Déterminer $F_{(V_1, V_2, A, R_1, R_4)}$.
On donne $R_1 = 1$ kΩ, $R_4 = 200$ Ω. Sachant que la tension V_B varie de 2 mV par degré Celsius et que la variation correspondante à I_T doit être inférieure à 0,01 mA dans la plage -40 à 60 °C, déterminer la valeur minimale de A.
On s'intéresse au courant I_R.

La relation liant le courant d'émetteur i_E à la tension base-émetteur V_{BE} d'un transistor est :

$$i_E = I_S\, e^{V_{BE}/V_T}$$

V_T vaut 25 mV à 25 °C.
Tous les transistors sont identiques et supposés à la même température (même valeur de I_S pour tous).
Écrire la relation liant I_R à I_T.
Dans le montage étudié on a $R_4 = R_5$.
Calculer la valeur de I_R avec les valeurs numériques précédentes.

6.
1° Soit le schéma figure 1 et soient :

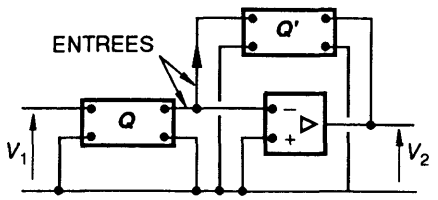


Fig. 1.

$\underline{Y}_{11}$, $\underline{Y}_{12}$, $\underline{Y}_{21}$, $\underline{Y}_{22}$ les paramètres admittance du quadripôle Q (symétrique).

$\underline{Y}'_{11}$, $\underline{Y}'_{12}$, $\underline{Y}'_{21}$, $\underline{Y}'_{22}$ les paramètres admittance du quadripôle Q' (symétrique).

a) Calculer la fonction de transfert $\underline{T} = \underline{V}_2/\underline{V}_1$ en fonction des paramètres admittance des deux quadripôles.

b) Le quadripôle Q est réalisé par le quadripôle en double T de la figure 2, et le quadripôle Q' est réalisé comme l'indique la figure 3.

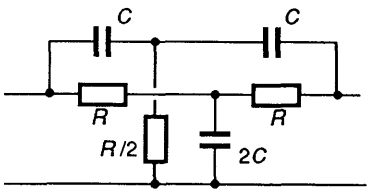


Fig. 2.

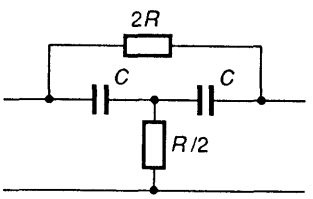


Fig. 3.

Calculer la fonction de transfert du montage ainsi réalisé et la mettre sous la forme :

$$\underline{T} = \frac{-\left[1 + \left(j\,\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}{1 + 2jm\,\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\,\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

c) Quelles sont les valeurs limites ω'_{l_1} et ω'_{l_2} de la bande rejetée.

2° Dispositif à sélectivité variable.
On réalise le dispositif figure 4 dans lequel les amplificateurs opérationnels sont supposés parfaits : $0 < \alpha < 1$.

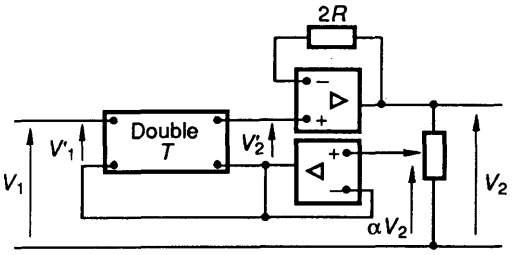


Fig. 4.

a) Montrer que le dispositif peut être décrit par le schéma bloc. Exprimer les transmittances $\underline{T}_1$, $\underline{T}_2$, $\underline{T}_3$.

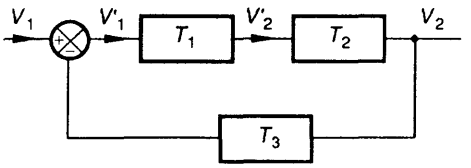


Fig. 5.

b) Calculer la fonction de transfert en boucle fermée et la mettre sous la forme :

$$\underline{T} = \frac{1 + \left(j\,\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2jm'\,\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\,\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

c) Calculer les limites ω'_{l_1} et ω'_{l_2} de la bande rejetée. Conclure.

Aubin Imprimeur
LIGUGÉ, POITIERS

Dépôt légal : mars 1991
Dépôt légal de la 1re édition : 2e trimestre 1989
N° d'impression L 37445
Imprimé en France

ELECTRONIQUE

Ce manuel d'**électronique**, conforme au programme de BTS s'adresse directement aux futurs techniciens supérieurs de cette discipline, mais aussi aux auditeurs de la formation permanente. Il complétera utilement l'enseignement théorique en électronique des classes préparatoires.

Ce premier tome aborde **la théorie du signal** (signaux sinuso¨Idaux, périodiques, échantillonnés, aléatoires ...) et **les composants** (semi-conducteurs, diodes à jonction P.N., transistors, amplificateurs opérationnels ...).

Le second tome (parution 1990) étudiera **les systèmes bouclés, les systèmes de communication, le filtrage et les lignes de transmission.**

L'ensemble répondra parfaitement aux besoins de la formation en électronique dont l'évolution rapide est liée à celle de l'informatique.

ISBN 2-04-018915-7

ELECTRONIQUE

Ce manuel d'**électronique**, conforme au programme de BTS s'adresse directement aux futurs techniciens supérieurs de cette discipline, mais aussi aux auditeurs de la formation permanente. Il complétera utilement l'enseignement théorique en électronique des classes préparatoires.

Ce premier tome aborde **la théorie du signal** (signaux sinuso¨Idaux, périodiques, échantillonnés, aléatoires ...) et **les composants** (semi-conducteurs, diodes à jonction P.N., transistors, amplificateurs opérationnels ...).

Le second tome (parution 1990) étudiera **les systèmes bouclés, les systèmes de communication, le filtrage et les lignes de transmission.**

L'ensemble répondra parfaitement aux besoins de la formation en électronique dont l'évolution rapide est liée à celle de l'informatique.

ISBN 2-04-018915-7